Prom. Nr. 2155

Gruppenstruktur und Gruppenbild

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG

DER WÜRDE EINES DOKTORS DER MATHEMATIK

GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

Hans Ulrich Krause
von Männedorf

Referent: Herr Prof. Dr. H. Hopf
Korreferent: Herr Priv.-Doz. Dr. E. Specker

Zürich 1953
Dissertationsdruckerei Leemann AG

Es ist das Gitter der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten im n-dimensionalen euklidischen Raume R^n; durch eine Kante verbunden sind je zwei Punkte, die den Abstand 1 voneinander haben, die Kanten sind also achsenparallele Strecken von der Länge 1.

2. Die Gruppenbilder G sollen dazu dienen, durch ihre geometrische Struktur algebraische Eigenschaften der Gruppe $\mathfrak{G}$ auszudrücken; daß sie nicht *alle* algebraischen Struktureigenschaften von $\mathfrak{G}$ ausdrücken können, ergibt sich schon aus folgender Tatsache: Zwei endliche Gruppen von gleicher Ordnung n besitzen immer ein gemeinsames Gruppenbild, nämlich das vollständige n-Eck (§ 13). Andererseits ist bekannt, daß zwei unendliche Gruppen — und zwar abzählbar unendlich, da wir nur Gruppen mit endlichen Erzeugendensystemen betrachten — im allgemeinen kein gemeinsames Gruppenbild besitzen: Dies ergibt sich aus einem Satz der Endentheorie[5]), welcher besagt, daß die Anzahl der Enden der Gruppenbilder G einer Gruppe $\mathfrak{G}$ (mit endlichem Erzeugendensystem) eine Invariante von $\mathfrak{G}$ ist. Aus diesem Satz hat sich u. a. ergeben: Eine abelsche Gruppe vom Range 1 kann kein gemeinsames Gruppenbild mit einer abelschen Gruppe größeren Ranges haben; ferner: Eine abelsche Gruppe kann kein gemeinsames Gruppenbild mit einer freien Gruppe (von einem Range > 1) haben. Dagegen versagt die Endentheorie prinzipiell zum Beispiel für die Beantwortung der folgenden Fragen:

(1) Können für $n > m > 1$ zwei abelsche Gruppen der Ränge n und m ein gemeinsames Gruppenbild besitzen?

(2) Können für $n > m > 1$ zwei freie Gruppen $\mathfrak{F}_n$ und $\mathfrak{F}_m$ mit n bzw. m freien Erzeugenden ein gemeinsames Gruppenbild besitzen?

Diese speziellen Fragen ordnen sich der folgenden allgemeinen Fragestellung unter:

---

[5]) *H. Hopf:* Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen (Commentarii mathematici Helvetici, 16, 1943, S. 81—100). — *H. Freudenthal:* Über die Enden topologischer Räume und Gruppen (Mathematische Zeitschrift 33, 1931, S. 692—713). — Über die Enden diskreter Räume und Gruppen (Commentarii mathematici Helvetici, 17, 1944, S. 1—38). — *E. Specker:* Endenverbände von Räumen und Gruppen (Mathematische Annalen, 122, 1950, S. 167—174).

„Welcher Art muß die algebraische Verwandtschaft zwischen zwei abstrakten Gruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ sein, wenn sie ein gemeinsames Gruppenbild G besitzen?"

Diese Fragestellung bildet den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit.

3. Der Inhalt der Arbeit besteht im wesentlichen — abgesehen von vorbereitenden Betrachtungen und einigen Nebenergebnissen — aus der Begründung und Diskussion von drei verschiedenen Methoden, die zur Behandlung der genannten Fragen dienen können. Jede einzelne dieser Methoden führt zu folgendem *Satz* A_0 (14.2):

Zwei freie abelsche Gruppen, deren endliche Ränge verschieden voneinander sind, können kein gemeinsames Gruppenbild besitzen. Eine der Methoden liefert darüber hinaus den folgenden schärferen *Satz* A (§ 16): *Zwei abelsche Gruppen (mit endlich vielen Erzeugenden) besitzen dann und nur dann ein gemeinsames Gruppenbild, wenn sie in ihren Rängen sowie in den Anzahlen ihrer Elemente endlicher Ordnung übereinstimmen.* Durch diesen Satz wird die obige Frage (1) vollständig beantwortet; dagegen ist es uns nicht gelungen, auch die Frage (2) zu beantworten. Wir halten es aber nicht für ausgeschlossen, daß eine Weiterführung unserer Methoden für die Behandlung dieses offenen Problems sowie ähnlicher Probleme nützlich sein könnte.

Die drei erwähnten Methoden lassen sich kurz folgendermaßen beschreiben:

1. Methode (§ 14)

Für jeden Eckpunkt e eines Graphen G bilden die Automorphismen von G, welche e festhalten, eine Gruppe, die wir die Drehgruppe $\mathfrak{D}_e$ nennen; ist G ein Gruppenbild, also homogen (siehe oben Nr. 1), so hängt die Struktur von $\mathfrak{D}_e = \mathfrak{D}$ nicht von e ab. Für Gruppenbilder mit *endlicher* Drehgruppe $\mathfrak{D}$ zeigt sich nun, daß die algebraischen Strukturen zweier Gruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, welche beide G als Gruppenbild besitzen, in der Tat nahe verwandt miteinander sein müssen; es gilt nämlich folgender Satz (14.1): Unter den soeben genannten Voraussetzungen enthalten $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ Untergruppen $\mathfrak{H}_1$ bzw. $\mathfrak{H}_2$, die miteinander isomorph sind und unter $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ denselben endlichen Index haben. Da andererseits der Satz gilt (§ 11), daß jedes Gruppenbild einer freien abelschen Gruppe eine endliche Drehgruppe besitzt, ergibt sich hieraus leicht die Gültigkeit des oben genannten Satzes A_0 (14.2).

2. Methode (§ 15)

Unter der „Entfernung" zweier Eckpunkte a, b eines Graphen G verstehen wir die Minimalzahl von Kanten in einem Kantenzug, der a und b verbindet. Für einen festen Eckpunkt e und eine natürliche Zahl r sei $V_e(r)$ die Anzahl der Eckpunkte, deren Entfernung von e höchstens r ist; in einem Gruppenbild ist infolge der Homogenität $V_e(r) = V(r)$ unabhängig von e. Das Verhalten der Funktion $V(r)$, insbesondere für große r, dürfte aufschlußreich sein nicht nur für die geometrische Struktur von G, sondern auch für die algebraische Struktur der Gruppen $\mathfrak{G}$, deren Gruppenbild G ist. In der Tat wird für den Fall, daß $\mathfrak{G}$ eine freie abelsche Gruppe vom Range n ist, die Formel

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln V(r)}{\ln r} = n$$

bewiesen, aus der unmittelbar noch einmal der Satz A_0 folgt.

3. Methode (§ 16)

Die Gruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ mögen das gemeinsame Gruppenbild G besitzen. Dann läßt sich durch Vermittlung der Eckpunkte von G in natürlicher Weise eine eineindeutige Abbildung f der beiden Gruppen aufeinander erklären, von der man noch voraussetzen darf, daß die beiden Einselemente einander entsprechen. Man untersucht nun die Wirkung von f auf die algebraischen Strukturen von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$. Für den Fall, daß $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ freie abelsche Gruppen sind, wird bewiesen, daß f ein Isomorphismus ist, womit wir einen dritten Beweis des Satzes A_0 haben. Diese Methode führt aber weiter als die beiden anderen: sie liefert auch einen Beweis des Satzes A.

4. Die folgende Tatsache dürfte aus prinzipiellen Gründen noch Interesse verdienen: Die Eigenschaft, ein gemeinsames Gruppen-

bild zu besitzen, ist keine transitive Eigenschaft der abstrakten Gruppenstrukturen; in der Tat werden in § 16 drei Gruppen $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$ derart angegeben, daß zwar $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ein gemeinsames Gruppenbild G_{12} sowie $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_3$ ein gemeinsames Gruppenbild G_{23}, daß jedoch $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_3$ kein gemeinsames Gruppenbild besitzen.

Zum Schlusse möchte ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. H. Hopf, für die mannigfaltigen Anregungen und für das Interesse, das er meiner Arbeit stets entgegenbrachte, von Herzen danken. Auch Herrn Dr. E. Specker spreche ich für manche wertvolle Anregung meinen herzlichen Dank aus.