

Bestimmung von Überfall-Koeffizienten bei verschiedenen Neigungen der Überfallwand

Von der
Eidgenössischen Technischen Hochschule
in Zürich

zur Erlangung der
Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften
genehmigte

Promotionsarbeit No. 692

vorgelegt von

HUSSEIN EL DEEB, KAIRO
Dipl. Maschinen-Ingenieur

Referent: Herr: Prof. R. Dubs

Korreferent: Herr: Prof. Dr. P. Scherrer

Leer - Vide - Empty

Dem Andenken
meines Vaters sel.
gewidmet

Lebenslauf.

Ich, Hussein El Deeb aus Ägypten, wurde am 15. März 1903 in Naheit Ibtuk (Behera) geboren. Bis zur Maturitätsprüfung besuchte ich die Saidia- und Ras El-Tine-Schulen zu Kairo und Alexandrien. Im Herbst 1920 begann ich mit den Studien an der Abteilung für Maschinenbau an der Royal School of Engineering in Gizeh, wo ich im Juni 1925 die Diplomprüfung bestand. Bis zum Herbst 1925 betätigte ich mich als Maschineningenieur bei den ägyptischen Staatsbahnen in Kairo. Im Frühjahr 1926 begannen meine Studien an der 3. Abteilung der E. T. H. in Zürich. Im Herbst 1928 schloß ich diese Studien mit der Diplomprüfung an der E. T. H. ab. Vom Frühjahr 1929 bis zum Herbst 1929 arbeitete ich als Volontär bei der Firma Escher, Wyß & Cie. in Zürich. Seither beschäftigte ich mich mit vorliegender Arbeit.

Zürich, Februar 1932.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorwort	6
Einleitung	6
Übersicht über die verschiedenen Überfallformeln	7
Formel von Bazin	7
Formel von Frese	9
Formel des Schweizerischen Ingenieur- und Architekten-Vereins	11
Formel von Rehbock (1929)	12
 I. Theoretischer Teil.	
Kurze Zusammenfassung der Theorie von Prof. R. von Mises	16
A. Grundlagen der Berechnungen	16
B. Energie und Impulsgleichung	18
C. Ermittlung des Geschwindigkeitsplanes	22
D. Gleichungen für die Ausflußzahl φ und die Strahlneigung δ	25
E. Theoretische Behandlung des Überfalls (nach Prof. R. von Mises)	28
1. Überfall mit senkrechter und scharfkantiger Wand (ohne Seitenkontraktion)	28
2. Überfall mit scharfer Kante und 45° Wandneigung	34
3. » » » » 30° »	37
4. » » » » 60° »	39
 II. Die Versuche.	
A. Die Versuchseinrichtung	42
B. Der Meßkanal	43
C. Die Messungen	43
a) Messung der Überfallhöhe	43
b) Messung der Wassergeschwindigkeit	44
D. Die Durchführung der Versuche	46
E. Genauigkeit der Messungen	47
 III. Versuchsergebnisse und Diskussion	
Geschwindigkeitsverteilung	69
Vergleich zwischen den experimentellen und theoretischen μ -Werten	75
Schlußfolgerungen	77

Vorwort.

Die erste Aufgabe, welche in der vorliegenden Arbeit gelöst werden soll, besteht in der experimentellen Ermittlung des Überfallkoeffizienten μ für verschiedene Neigungen der Überfallwand bei scharfer und kreisförmiger Wehrkante. Die Arbeit ist daher in erster Linie experimenteller Natur. Alle Formeln der praktischen Hydraulik sind empirischer Art, d. h. sie sind nicht streng wissenschaftlich abgeleitet und sind demzufolge nicht allgemein gültig. Ihr Gültigkeitsbereich beschränkt sich auf das Versuchsintervall und die Versuchsbedingungen, unter denen sie aufgestellt wurden.

Einleitung.

Bei Versuchen an Wasserkraftanlagen und -Maschinen wird sehr häufig die Aufgabe gestellt, eine durch ein Gerinne pro Zeiteinheit fließende Wassermenge mit größtmöglicher Genauigkeit zu bestimmen. Dabei hat die Wassermessung durch Überfall, zufolge ihrer einfachen Einrichtung und Durchführung (scheinbar gewisse bestehende) Vorzüge. Aber die aus der Formel

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot b \cdot h \cdot \sqrt{2gh}$$

zu berechnende Wassermenge ist auch stark abhängig von der Größe des Überfallkoeffizienten μ . Es haben sich daher seit vielen Jahrzehnten die namhaftesten Hydrauliker bemüht, auf Grund von Versuchen an rechteckigen Überfällen eine Gleichung für μ aufzustellen, welche die Einflüsse der Überfallhöhe h und der Wehrhöhe s festlegen. Es wurden zahlreiche Versuche ausgeführt und Formeln aufgestellt, die aber meist mehr oder minder stark voneinander abweichende Resultate zeigten. Ohne auf die Ursache dieser Abweichungen näher einzutreten, soll hier nur erwähnt werden, daß die Ausführung des Meßüberfalles und die Methode der Überfallhöhenmessung von wesentlichem Einfluß auf das Ergebnis ist.

Seit vielen Jahren ist es in der Technik üblich, alle Zahlenwerte, welche man bei Rechnungen benötigt, aus unmittelbaren Versuchsergebnissen zu schöpfen. Dieser Verzicht auf theoretische Behandlung ist in sehr vielen Fällen berechtigt. Für die Lösung meiner Aufgabe erschien es zweckmäßig, neben der experimentellen Untersuchung das Problem auch theoretisch zu erfassen. Es geschah dies gestützt auf die Theorie, welche Prof. R. von Mises in der Z. d. V. D. I. im Jahre 1917 veröffentlichte (Band 61 der Zeitschrift). Es zeigt sich oft weitgehende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch, wie am Schlusse dieser Arbeit gezeigt wird.

Es soll hier nicht untersucht werden, woher Differenzen zwischen den verschiedenen Formeln herrühren, sondern nur der Einfluß der Neigung der Überfallwand auf den Koeffizienten μ bzw. auf die durchfließende Wassermenge bei scharfer und abgerundeter Wehrkrone.

Übersicht

über die verschiedenen Überfall-Formeln.

Senkrechter scharfkantiger Überfall ohne Seitenkontraktion.

Der vollkommene Überfall (ohne Seitenkontraktion) wird sehr häufig in der Praxis für Wassermessungen und für die Regelung des Wasserzuflusses bei Modellversuchen verwendet. Für diese Regelung eignen sich Überfallwehre sehr gut, da diese gestatten, den gewünschten Zufluß in kurzer Zeit genau einzustellen.

Um das Verhältnis zwischen der wirklich abfließenden und der theoretischen Wassermenge zu erhalten, sind schon sehr ausgedehnte und kostspielige Versuche angestellt worden. Beim Abfluß von Wasser über einen vollkommenen Überfall berechnet sich die Wassermenge Q nach der Grundformel von Du Buat (Poleni) :

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot b \sqrt{2g} \cdot h^{\frac{3}{2}}$$

Nach μ aufgelöst:

$$\mu = \frac{Q}{\frac{2}{3} \cdot b \sqrt{2g} h^{\frac{3}{2}}}$$

Bei der experimentellen Bestimmung von μ hat man also die drei Größen h , b und Q zu ermitteln. Um den Zusammenhang mit schon von anderer Seite ausgeführten Versuchen zur Ermittlung des Überfallkoeffizienten für senkrechte, scharfkantige Wehre herzustellen, wird im folgenden von 4 Formeln eine Übersicht gegeben:

a) Formel von Bazin 1886.

Im Jahre 1886 hatte Bazin mit Unterstützung des französischen Arbeitsministeriums eine Reihe von Studien über die Abflußverhältnisse an Überfällen begonnen, welche sich in der Folge über zehn Jahre ausdehnten und über welche in den «Annales des Ponts Chaussés» (1888 bis 1898) mehrere Einzelberichte vorliegen. Nach Abschluß der Untersuchungen gab Bazin eine zusammenfassende Darstellung und hat damit ein Werk von derart reichem und wertvollem Material niedergelegt, daß ein ausführliches Eingehen auf seine Arbeiten geboten erscheint.

Die Aufgabe, um welche es sich handelt, besteht in der Auffindung der Gesetzmäßigkeiten, welche zwischen dem Koeffizienten μ und den Abflußbedingungen bestehen.

Die Versuche von Bazin zeigen außerordentlich deutlich, wie wichtig es ist, auf die Strahlform Rücksicht zu nehmen, da der Abflußkoeffizient sich von

Fall zu Fall ändert. Hat man für senkrechten, scharfkantigen Überfall die Formel:

$$Q = \mu_0 \cdot b_0 \cdot h_0^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2g}$$

und für irgendeinen andern Überfall die Gleichung:

$$Q = \mu \cdot b \cdot h^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2g}$$

worin Q in beiden Fällen die gleiche Menge bedeutet, so ist:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{b_0}{b} \cdot \left(\frac{h_0}{h}\right)^{\frac{3}{2}}$$

wodurch die relative Bestimmung des Koeffizienten erleichtert ist.

Bazin führte seine Versuche in einem 2 Meter breiten Betongerinne am Kanal von Bourgogne bei Dijon in Frankreich durch. Für einen Überfall mit scharfer Kante, senkrechter Wand und einer Höhe von 113,5 cm über Gerinne-sole hat Bazin auf Grund einer großen Zahl von Messungen die μ -Werte bestimmt. Dabei nimmt μ anfangs mit wachsendem h ab bis bei ungefähr $h = 0,235$ m ein Minimum eintritt, worauf μ mit zunehmendem h wächst. Bazin macht mit Recht darauf aufmerksam, daß diese bei kleinem h fallende Tendenz von μ bald durch den wachsenden Einfluß der Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser am Wehre ankommt, kompensiert werden muß.

Dieser Umstand wird auch tatsächlich dadurch berücksichtigt, daß man h durch den Ausdruck

$$h + a \cdot \frac{c^2}{2g}$$

ersetzt, worin c die Ankunftsgeschwindigkeit und a eine nicht genau bestimmbare Konstante bedeutet. Beachtet man, daß $\frac{c^2}{2g}$ stets eine sehr kleine Zahl ist (wenige Hundertstel Meter), so erhält man nach entsprechender Umformung:

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{3}{2} \cdot a \cdot \frac{c^2}{2gh}\right)$$

worin $\mu = \mu_0$ für $c = 0$. Man berechnet nun weiter c nach der Kontinuitätsgleichung:

$$c = \frac{Q}{b(h+s)} = \frac{\mu \cdot h \cdot \sqrt{2gh}}{(h+s)}$$

oder:

$$\frac{c^2}{2gh} = u^2 \left(\frac{h}{h+s}\right)^2$$

und mit:

$$k = \frac{3}{2} \cdot a \cdot m^2$$

wird

$$u = \mu_0 \left\{1 + k \left(\frac{h}{h+s}\right)^2\right\}$$

Bazin findet, daß α und k nicht völlig konstant sind. Er setzt jedoch für α und k Mittelwerte und gibt an:

$$\alpha = \frac{5}{3}; k = 0,55$$

Schließlich findet Bazin für μ folgende empirische Formel:

$$\mu = \left(0,6075 + \frac{0,0045}{h} \right) \left\{ 1 + 0,55 \left(\frac{h}{h+s} \right)^2 \right\}$$

worin h und s in Metern einzusetzen sind.

b) Formel von Frese 1890.

Prof. F. Frese von der technischen Hochschule Hannover begann seine Versuchsreihe zur Bestimmung der Überfallkoeffizienten im Jahre 1887 in der Nähe der Stadt Hannover. Eine in den Sommermonaten nur wenig benützte Schiffsschleuse wurde wochenlang für diese Versuche zur Verfügung gestellt. Die Schleusenammer war durch eine eingebaute Querwand in zwei Teile geteilt, von welchen der obere als Zulaufkanal, der untere als Meßbehälter diente. Im oberen Teil der Querwand befand sich eine scharfkantig begrenzte Öffnung, welche leicht verändert werden konnte und in welcher das im oberen Schleusentor zuströmende Wasser in den Meßbehälter abfloß. Die durch Behältermessung bestimmte Wassermenge konnte verglichen werden mit der theoretischen Wassermenge, welche bei einer Absenkung null und ohne Strahlkontraktion hätte abfließen sollen. Da die Schleusenbreite 6,3 Meter betrug, konnte eine Überfallbreite von 5,5 Metern ausgenützt werden. Die größte Überfallhöhe betrug bei kleineren Breiten 0,60 Meter, mußte aber bei größeren Breiten mit Rücksicht auf den kleinen Behälterinhalt und die dadurch bedingte kurze Füllungs- bzw. Beobachtungszeit herabgemindert werden. Die Überfallwand war verstellbar, so daß einerseits der Meßbehälter vom Zulaufkanal völlig abgeschlossen werden konnte, andererseits aber auch jeder beliebige Wasserstand über der Kante einstellbar war, ohne die Höhe des Wasserspiegels selbst zu verändern. Die Überfallbreiten wurden um je 0,50 Meter abgestuft, die Überfallhöhen um je 0,05 Meter.

Die Versuche bezweckten, innerhalb möglichst weiter Grenzen das Verhältnis der wirklichen zur theoretischen Wassermenge eines vollkommen scharfkantigen Überfalles festzulegen.

Man nimmt allgemein an, daß bei Überfällen ohne Seitenkontraktion der Ausflußkoeffizient von der Breite unabhängig ist. Es wird sich also lediglich darum handeln, die Abhängigkeit des Koeffizienten von der Überfallhöhe h und von der Wassertiefe H zu ermitteln. Man vertritt die Ansicht, daß die Änderung des Ausflußkoeffizienten, welche dieser infolge der endlichen Größe des Zulaufkanals erfährt, entweder eine direkte Folge der Zuflußgeschwindigkeit selbst ist, oder aber, daß diese Änderung wenigstens teilweise durch die Zuflußgeschwindigkeit hervorgerufen wird. Man geht aus von der Formel:

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot \left\{ \left(h + \frac{c^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{c^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

worin nach Weisbach c die mittlere Geschwindigkeit des Wassers vor dem Überfall bedeutet. Dabei ist μ ein Koeffizient, welcher nicht von den Kanalabmessungen beeinflusst wird. Francis verwendet diese Formel, indem er statt des beobachteten Wasserstandes h eine neue Höhe

$$h_1 = \left\{ \left(h + \frac{c^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{c^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{2}{3}}$$

eingführt. Dann lautet die Formel für die Wassermenge:

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot h_1^{\frac{3}{2}}$$

Die Erfahrung zeigt, daß die Veränderungen, welche der Koeffizient μ infolge der endlichen Abmessungen des Zulaufkanales erfährt, in Wirklichkeit größer sind, als sie die Weisbach'sche Formel angibt. Diese Abweichung hat man korrigiert, indem man die Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ mit einem Faktor α größer als eins multiplizierte. Man erhält dann, wenn man gleichzeitig den im Vergleich zu $\left(h + \frac{c^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}}$ kleinen Wert $\left(\frac{c^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}}$ vernachlässigt, die einfachere Formel:

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot b \cdot \sqrt{2g} \left(h + \alpha \cdot \frac{c^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Bazin fand:

$$u = \mu_0 \cdot \left\{ 1 + k \left(\frac{h}{h+s} \right)^2 \right\}$$

wobei:

$$k = \frac{3}{2} \cdot \alpha \cdot m^2$$

Um die Werte von k und α zu berechnen, hat Frese den folgenden Weg gewählt: Schreibt man in der Gleichung:

$$\mu = \mu_0 \cdot \left\{ 1 + k \left(\frac{h}{h+s} \right)^2 \right\}$$

für $\left(\frac{h}{h+s} \right)^2 = \left(\frac{h}{H} \right)^2 = x$, so erhält man:

$$\mu = \mu_0 + k \cdot \mu_0 \cdot x$$

Da μ_0 unveränderlich ist, so würde, falls auch k sich nicht änderte, obige Gleichung diejenige einer geraden Linie sein. Trägt man die einzelnen μ -Werte in Funktion von x auf, so liegen die Punkte tatsächlich annähernd in einer Geraden, und man kann mit der Methode der kleinsten Quadrate von Gauß die wahrscheinlichen Werte von μ_0 und k berechnen. Dann bestimmt sich der Überfallkoeffizient μ nach Frese für einen vollkommenen Überfall ohne Seitenkontraktion und von beliebiger Breite nach folgender Formel:

$$\mu = \left(0,6150 + \frac{0,0021}{h} \right) \cdot \left\{ 1 + 0,55 \left(\frac{h}{H} \right)^2 \right\}$$

wenn h und H in Metern eingesetzt werden.

c) Formel des schweiz. Ingenieur- und Architekten-Vereins (S. I. A.)

Im Jahr 1924 wurden vom Schweiz. Ingenieur- und Architekten-Verein ausgedehnte Versuche über die verschiedenen Wassermeßmethoden durchgeführt. Der Zweck dieser Versuche war:

1. Schaffung einheitlicher Grundlagen für die Durchführung von Wassermessungen.
2. Aufstellung einer von jeglicher individueller Beeinflussung freien Berechnungsmethode für alle diejenigen Fälle, wo die Wassermenge aus Beobachtungswerten errechnet werden muß.
3. Ermittlung von Beziehungen, die die für die Praxis nötige Genauigkeit gewährleisten.
4. Angabe der durch die genormten Meßmethoden erreichbaren Genauigkeitsgrade.

Die letzte Bedingung wurde aufgestellt, um unmöglichen Garantieforderungen vorzubeugen.

Bei der Aufstellung der Normen wurden alle verschiedenen Wassermeßmethoden und deren Ergebnisse systematisch geordnet und auf Grund der unmittelbaren Versuchsergebnisse neu bearbeitet.

Die bereits bekannten Versuchsergebnisse reichten nicht aus, um daraus allgemeingültige Formeln ableiten zu können.

Im Laboratorium der Eidg. Techn. Hochschule, sowie im Versuchskanal der Wasserkraftanlage Ackersand im Wallis wurden über 6000 neue, zum Teil grundlegende Versuche durchgeführt. Die Dimensionen des Meßkanals von Ackersand sind:

$$\text{Breite: } b = 3,5 \text{ m}$$

$$\text{Tiefe: } h = 1,8 \text{ m}$$

Ferner betätigte sich auch die Abteilung für Wasserwirtschaft des eidgenössischen Departements des Innern an der Vervollständigung der Messungen.

Die Versuche haben gezeigt, daß die Strömung des Wassers über einen Überfall ohne Seitenkontraktion viel gleichmäßiger und stabiler ist als bei einem Überfall mit Seitenkontraktion. Beim Überfall mit Seitenkontraktion ist infolge der Einschnürung des Wasserstrahls die Strömung vor und nach der Überfallwand dreidimensional. Beim Überfall ohne Seitenkontraktion verläuft die Strömung prinzipiell zweidimensional, so daß sie noch rein rechnerisch verfolgt werden kann. (Siehe Theorie von Prof. von Mises.)

Der Normenausschuß des Schweiz. Ingenieur- und Architekten-Vereins schlug demgemäß vor, bei Überfallmessungen nach Möglichkeit nur mit Überfällen ohne Seitenkontraktion zu arbeiten.

Auf Grund der eingehenden Studien über die Wassermessung mit Überfällen gelangt der Schweiz. Ingenieur- und Architekten-Verein zu folgender Formel für die Berechnung des Überfallkoeffizienten μ :

$$\mu = 0,615 \left(1 + \frac{1}{h + 1,6} \right) \cdot \left(1 + 0,5 \left(\frac{h}{h + s} \right)^2 \right)$$

Dabei sind die Überfallhöhe h und die Wehrhöhe s stets in Millimetern in die Formel einzusetzen. Aus der Struktur der Formel ersehen wir, daß der Überfallkoeffizient μ stets größer als 0,615 ist, aber den Wert 1 selbst bei den Grenzwerten $h = 0$ und $h = \infty$ nie erreicht.

d) Formel von Prof. Th. Rehbock, Karlsruhe.

Prof. Th. Rehbock führte im Jahre 1929 erneut Versuche zur Bestimmung des Überfallkoeffizienten μ durch. Die Versuche in Karlsruhe wurden mit einem senkrechten scharfkantigen Wehr ausgeführt. Um gleichzeitig den Einfluß der Temperatur auf die Wassermessung zu untersuchen, machte Prof. Rehbock Versuche bei 7° und 19° Celsius.

Nach Angaben von Prof. Rehbock konnte bei diesen Messungen kein wesentlicher Einfluß der Temperatur auf die Wassermenge festgestellt werden.

Ferner wurde bei diesen Versuchen auch der Einfluß der Geschwindigkeitsverteilung im Meßgerinne auf die Meßergebnisse untersucht.

Prof. Rehbock kam zum Schluß, daß bei zweckmäßig gebauten Meßanlagen der Einfluß der Geschwindigkeitsverteilung vernachlässigbar klein sei. Anders liegt der Fall bei allzu kurzem Zulaufkanal, stark unsymmetrischer Wasserzuleitung oder bei unzuweckmäßigem Einbau von Wasserführungen, wodurch der Abfluß künstlich in einzelne Teile des Rinnquerschnittes zusammengedrängt wird.

Allgemein darf der Einfluß der Geschwindigkeitsverteilung vernachlässigt werden, wenn die Überfallhöhe kleiner als sechs Zehntel der Wehrhöhe ist.

Im toten Wasserraum oberhalb des Wehres treten bei nahezu stillstehendem Wasser, dicht über der Kanalsohle ungesetzmäßige Strömungen auf. Nach Ansicht von Prof. Rehbock beeinflussen diese Strömungen den Abfluß des Wassers über das Wehr nicht, da die auftretenden Geschwindigkeiten und infolgedessen die im Wasser enthaltenen kinetischen Energien zu klein sind.

Prof. Rehbock hat sich lange bemüht, auf Grund der Weisbach'schen Formel für μ eine zuverlässige Abflußformel zu finden. Im Jahre 1913 stellte er folgende Beziehung auf:

$$\mu = 0,605 + \frac{1}{1000 h} + 0,8 \cdot \frac{h}{s}$$

Die Nachteile dieser Beziehung sind: Die Formel ist nicht dimensionsrichtig und kann somit nicht ohne weiteres für alle Maßsysteme benützt werden.

Tragen wir die Werte μ für verschiedene Wehrhöhen s in Funktion der Überfallhöhe h auf, so erhalten wir, wie dies bei allen aus der Grundformel abgeleiteten Abflußformeln der Fall ist, eine Hyperbelschar, wodurch die Auswertung der Beobachtungen erneut erschwert wird.

Um diesen Übelstand zu beseitigen, hat Prof. Rehbock in neuester Zeit eine von der Grundformel etwas abweichende Beziehung aufgestellt. Darin ersetzt er die tatsächliche Überfallhöhe h durch eine Ersatzüberfallhöhe h_e

$$h_e = h + 0,0011 \text{ m.}$$

Diese Ersatzüberfallhöhe h_e kann unmittelbar am Maßstab abgelesen werden, wenn der Nullpunkt des Maßstabes 1,1 mm unterhalb der Wehrschneidenhöhe festgelegt wird. Durch die Einführung dieser h_e erhalten wir eine neue Grundformel Prof. Rehbock 1928

$$q = 2,953 \mu \cdot h_e^{\frac{3}{2}} = \rho_o \cdot h_e^{\frac{3}{2}}, \text{ für 1 Meter Breite.}$$

In dieser neuen Grundformel ist das dimensionsunrichtige Glied μ der Formel von Poleni in einem dimensionsrichtigen Wert μ bzw. ρ_o übergeführt.

Aus Versuchen wurde festgestellt, daß die Koeffizienten μ und ρ_o für jede Wehrhöhe s eine lineare Funktion der Ersatzüberfallhöhe h_e sind. Für verschiedene Wehrhöhen s erhalten wir somit für μ und ρ_o Strahlenbüschel.

Die Koeffizienten μ und ρ_o errechnen sich aus den Gleichungen:

$$\mu = a' + b' \cdot \frac{h_e}{s}$$

$$\rho_o = a + b \cdot \frac{h_e}{s}$$

Die Konstanten a' , b' und a , b müssen aus den Eichwerten so bestimmt werden, daß das Mittel der Abweichungen der Meßwerte von den Formelwerten

$$\Delta \mu = \frac{q}{2,953 h_e^{\frac{3}{2}}} - \left(a' + b' \cdot \frac{h_e}{s} \right)$$

$$\Delta \rho_o = \frac{q}{h_e^{\frac{3}{2}}} - \left(a + b \cdot \frac{h_e}{s} \right)$$

möglichst klein ist.

Die Ermittlung der Konstanten a , b und a' , b' erfolgt nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Prof. Rehbock fand folgende Werte für

$$a = 1,782$$

$$b = 0,240$$

$$a' = 0,6035$$

$$b' = 0,0813$$

Setzen wir obige Werte in die Formeln für q und μ ein, so erhalten wir die Beziehungen (Rehbock 1929):

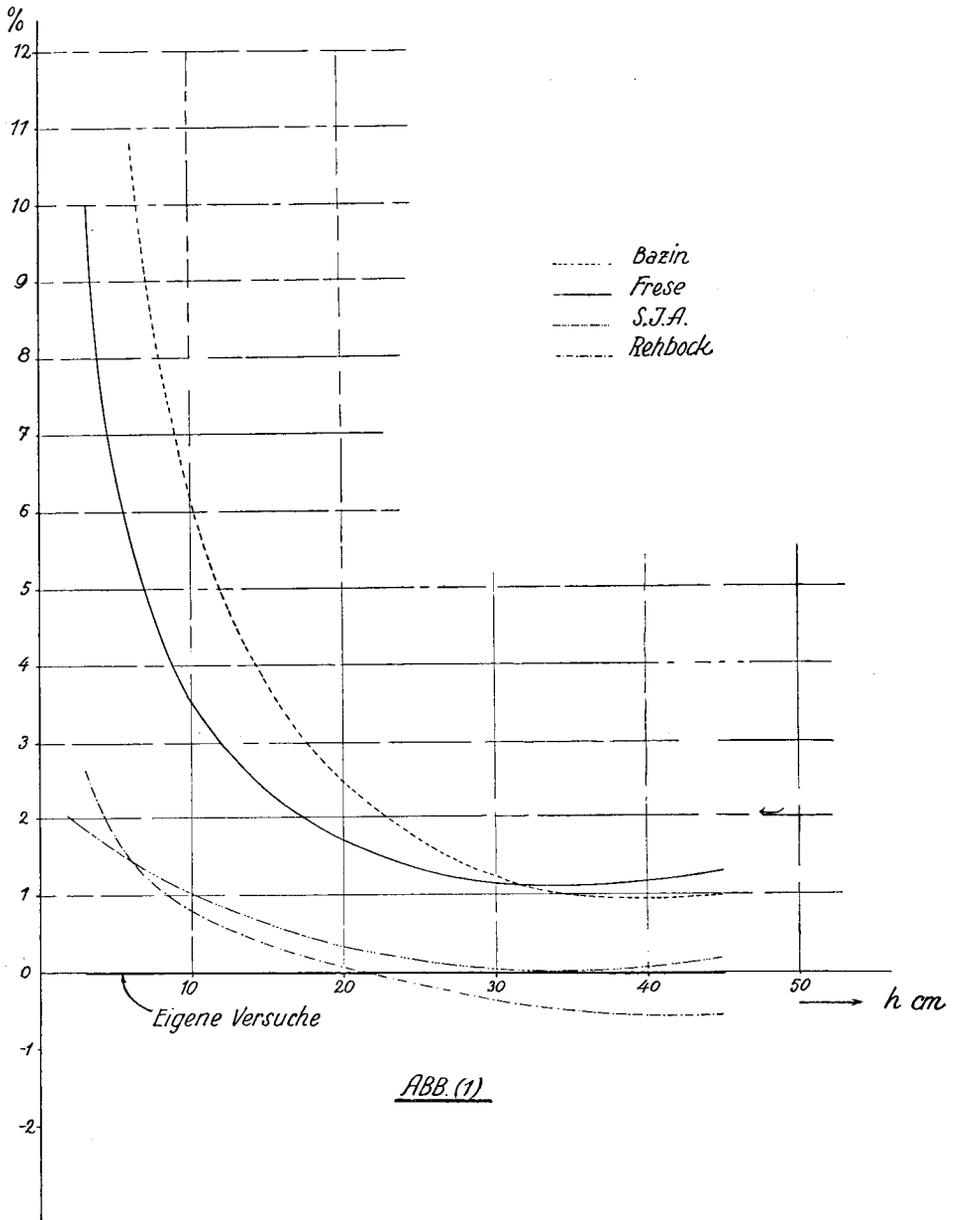
$$q = \left(1,782 + 0,24 \frac{h_e}{s} \right) \cdot h_e^{\frac{3}{2}}$$

$$\mu = \left(0,6035 + 0,0813 + \frac{h}{s} + \frac{0,00009}{s} \right) \left(1 + \frac{0,0011}{h} \right)^{\frac{3}{2}}$$

h und s sind in Metern einzusetzen.

Zum Schluß bleibt noch übrig, den Genauigkeitsgrad der entwickelten Formeln anzugeben. Für diese Angaben müssen wir uns auf das Gebiet beschränken, für welches Versuche durchgeführt wurden.

Die Breite des Überfalles kann beliebig sein, sollte aber nicht kleiner als die zu messende Überfallhöhe h gewählt werden.



Der Schweiz. Ingenieur- und Architektenverein beschränkt die absolute Gültigkeit seiner Formel für Meßanlagen mit

$$\text{Wehrhöhe } s \geq 300 \text{ mm}$$

$$\text{Überfallhöhe } 25 \text{ mm} \leq h \leq 800 \text{ mm}$$

Dabei soll aber das Verhältnis zwischen Überfallhöhe h und der Wehrhöhe s den Wert 1 nie überschreiten.

$$\frac{h}{s} \leq 1$$

Um einen Vergleich zwischen den verschiedenen Formeln machen zu können, ist in Zahlentafel 1 eine tabellarische Zusammenstellung der μ -Werte für einen

Zahlentafel (1).

h mm	Eigene Versuche 1930 ÷ 31 μ	Bazin 1886		Frese 1890		S. J. A. 1924		Rehbock 1929	
		μ	Δ %	μ	Δ %	μ	Δ %	μ	Δ %
30	0,6232	0,7580	21,6	0,6855	10,0	0,6348	1,86	0,6395	2,62
60	0,6175	0,6843	10,8	0,6517	5,55	0,6266	1,47	0,6262	1,41
90	0,6180	0,6612	7,0	0,6419	3,86	0,6249	1,115	0,6238	0,94
120	0,6203	0,6510	4,95	0,6384	2,91	0,6254	0,822	0,6238	0,565
150	0,6230	0,6462	3,72	0,6376	2,34	0,6268	0,610	0,6251	0,337
180	0,6265	0,6442	2,82	0,6383	1,88	0,6288	0,467	0,6275	0,1595
210	0,6295	0,6439	2,29	0,6399	1,655	0,6313	0,286	0,6300	0,0795
240	0,6330	0,6446	1,83	0,6420	1,42	0,6340	0,158	0,6324	−0,095
270	0,6365	0,6460	1,49	0,6446	1,27	0,6370	0,0785	0,6352	−0,24
300	0,6400	0,6480	1,24	0,6475	1,17	0,6405	0,0777	0,6378	−0,342
330	0,6430	0,6503	1,135	0,6508	1,21	0,6431	0,0156	0,6402	−0,435
360	0,6465	0,6529	0,989	0,6537	1,11	0,6464	0,0000	0,6428	−0,575
390	0,6495	0,6556	0,940	0,6570	1,153	0,6497	0,034	0,6457	−0,585
420	0,6525	0,6585	0,965	0,6604	1,21	0,6529	0,0614	0,6485	−0,613
450	0,6550	0,6615	0,994	0,6638	1,34	0,6563	0,198	0,6513	−0,565

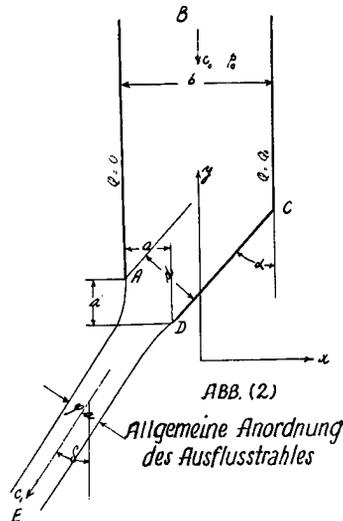
1 m breiten Meßkanal mit 0,8 m hohem Wehr bei verschiedenen Überfallhöhen 0,03 ÷ 0,45 m gemacht worden. Die unter Δ aufgeführten Werte zeigen die prozentualen Abweichungen des Überfallkoeffizienten μ von den eigenen Messungen. In Abb. (1) finden wir die graphische Darstellung dieser Tabelle.

I. Theoretischer Teil.

Kurze Zusammenfassung der Theorie von Prof. R. von Mises.

A. Grundlagen der Berechnungen.

Bei solchen Aufgaben, d. h. bei der Behandlung der Theorie von Flüssigkeitsbewegungen muß man bestimmte Voraussetzungen treffen, um das Problem lösen zu können. Wie schon erwähnt, soll die Aufgabe auf Grund der von Prof. R. von Mises entwickelten Theorie gelöst werden. Diese setzt voraus:



- 1) Die Bewegung ist mit der Zeit nicht veränderlich, also stationär.
- 2) Die innere Reibung oder die Zähigkeit hat keinen Einfluß auf den Bewegungsvorgang.
- 3) Die Bewegung erfolgt wirbelfrei, oder mit überall gleicher Strömungsenergie.
- 4) Die Bahnen aller Teilchen sind einer festen Ebene parallel.
- 5) Der Ausfluß erfolgt nicht unter der Wirkung der Schwerkraft, sondern unter der eines Überdruckes, den ein auf den Wasserspiegel im Gefäß gepreßter Kolben ausübt.

Abb. 2 zeigt eine Flüssigkeitsbewegung, welche nach den obigen Voraussetzungen stattfindet. Es bedeuten x, y die Koordinaten eines Punktes für ein rechtwinkliges Axenkreuz in der Bewegungsebene; c_x, c_y die Geschwindigkeitskomponenten in den einzelnen Axrichtungen. Nach Voraussetzung (3) besteht eine Funktion, das sog. Geschwindigkeitspotential P derart, daß seine ersten

partiellen Ableitungen nach den Koordinaten x und y die Geschwindigkeitskomponenten c_x und c_y darstellen:

$$c_x = \frac{\partial P}{\partial x} \qquad c_y = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad (1)$$

Außerdem besteht eine zweite Funktion Q von x und y , die sog. Stromfunktion so, daß:

$$c_x = \frac{\partial Q}{\partial y} \qquad c_y = -\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (2)$$

Die Q -Konstant-Linien sind Stromlinien, welche von den P -Konstant-Linien unter rechten Winkeln geschnitten werden. Der Unterschied der Q -Werte von zwei Stromlinien ist gleich der Flüssigkeitsmenge, die zwischen beiden Linien durch eine Schicht von der Dicke 1 (senkrecht zur Bewegungsebene gemessen) hindurchfließt.

Ist entweder P oder Q bekannt, so ist die Bewegung vollkommen bestimmt, da man aus Gleichung 1) oder 2) die Geschwindigkeitskomponenten für jeden Punkt nach Größe und Richtung berechnen kann. Aber naturgemäß liefert nicht jede beliebige Funktion $P(x, y)$ oder $Q(x, y)$ eine mögliche Flüssigkeitsbewegung, sondern, wie die Hydrodynamik lehrt, nur eine solche, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \text{ bzw. } \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0 \qquad (3)$$

genügt. Mit Hilfe der Rechenregeln für komplexe Zahlen mit der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$ besitzt man ein Verfahren, um beliebig viele Lösungen von Gleichung 3) anzugeben. Dieses Verfahren besteht in folgendem: Man wählt irgendeine differenzierbare Funktion W einer Variablen z und führt die Beziehung

$$z = x + iy \qquad (4)$$

in den Ausdruck für W ein. In der dadurch entstandenen komplexen Funktion trennt man den reellen vom imaginären Teil und setzt den ersten gleich P , den zweiten gleich iQ , also:

$$W = P + iQ \qquad (5)$$

Dann sind P und Q Potential und Stromfunktion einer Bewegung.

Helmholtz hat gezeigt, daß für die Lösung des Ausflußproblems weniger die Kenntnis des eigentlichen Strömungsbildes, als die des sog. Geschwindigkeitsplanes von Bedeutung ist. Ein Geschwindigkeitsplan wird gebildet, indem man für jedes bewegte Teilchen die Geschwindigkeit nach Größe und Richtung von einem festen Anfangspunkt aus aufträgt und die Endpunkte verbindet, die dem auf einer Strom- oder Niveaulinie liegenden Teilchen entsprechen. Es entstehen dabei neue Linien, die analytisch durch $P = \text{konstant}$ und $Q = \text{konstant}$ gegeben sind, sobald als unabhängig Veränderliche in P und Q an Stelle von x und y die Geschwindigkeitskomponenten c_x und c_y eingeführt werden. Nun fragt es sich, wie man allgemein solche Funktionen $P(c_x, c_y)$ und $Q(c_x, c_y)$ erhält,

welche mögliche Strömungen liefern. Nennen wir W' die Ableitung der eben eingeführten Funktion W nach z' , so folgt aus Gleichung 4):

$$\frac{\partial W}{\partial x} = W' \frac{\partial z}{\partial x}$$

und aus 5):

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Stellt man diese beiden Gleichungen zusammen und beachtet Gleichung 1) und 2), so erhält man:

$$W' = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = c_x - i c_y \quad (6)$$

d. h. die Ableitung W' ist eine komplexe Größe mit dem reellen Bestandteil c_x und dem imaginären $-i c_y$. Da W' durch Differentiation aus W hervorgeht, ist es auch wie W -Funktion von z , und man kann daher umgekehrt z durch W' ausdrücken. (z. B. $W = 2 \cdot z^2$; $W' = 4 \cdot z$; $z = \frac{W'}{4}$). Führt man diesen Ausdruck für z in W ein, so erscheint W als Funktion von W' . Demnach verhält sich W zu den Veränderlichen c_x und $-i c_y$ gleichartig wie zu x und y , und es ergibt sich die Regel: Man findet den Geschwindigkeitplan einer möglichen Flüssigkeitsbewegung, indem man irgendeine analytische Funktion W einer Veränderlichen W' wählt, für W' den Ausdruck $c_x - i c_y$ einsetzt, dann in W den reellen vom imaginären Teil trennt und endlich den ersteren gleich P , den letzterengleich iQ setzt. Die Aufgabe besteht nun darin, diejenige Funktion W von W' aufzusuchen, die den besondern Bedingungen der in Abb. 2) angedeuteten Bewegung entspricht.

B. Energie und Impulsgleichung.

Nach den in (2) und (5) gemachten Voraussetzungen ist von Schwere und Reibungswirkungen abzusehen. Aus der Energiegleichung folgt, daß die Summe aus Geschwindigkeits- und Druckhöhe längs jeder Stromlinie einen konstanten Wert hat. In hinreichend weiter Entfernung von der Mündung dürfen wir die Geschwindigkeit c über den ganzen Querschnitt als konstant betrachten. Der durch einen Kolben ausgeübte Überdruck sei p_o , wofür wir $\gamma \cdot h$ ($\gamma =$ spez. Gewicht der Flüssigkeit) schreiben wollen. Dabei bedeutet h die Überdruckhöhe. An einer beliebigen Stelle sei die Geschwindigkeit c und der Überdruck p . Nach Bernoulli lautet somit die Energiegleichung:

$$\frac{c_o^2}{2g} + \frac{p_o}{\gamma} = \frac{c^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} \quad (7)$$

Der austretende Strahl besteht aus einzelnen Stromfäden, die an der Mündung AD Abb. (2) von verschiedenen Seiten zusammenlaufen und erst in weiter Entfernung eine einheitliche Richtung δ und eine Geschwindigkeit c annehmen. Von

der Stelle, wo die Stromfäden nicht mehr unter Überdruck stehen, d. h. parallel verlaufen, gilt die Gleichung:

$$\frac{c_1^2}{2g} = \frac{c_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} = \frac{c_0^2}{2g} + h \quad (7)$$

Die am Stahlrand liegenden Teilchen besitzen die Geschwindigkeit c , schon beim Verlassen des Gefäßes, während die weiter innen liegenden Teilchen zunächst noch unter Überdruck stehen und daher langsam fließen.

Bezeichnen wir die ganze Ausflußmenge mit Q_0 , die obere Breite des Gefäßes mit b , die lichte Austrittsweite (siehe Abb.2) mit a , die Breite des Strahles gemessen in genügender Entfernung von der Mündung mit $\varphi \cdot a$, so gilt die Beziehung:

$$Q_0 = c_0 \cdot b = c_1 \cdot \varphi \cdot a \quad (8)$$

Aus Gleichung (7') und (8) haben wir

$$\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2 = 1 - \frac{2gh}{c_1^2}$$

$$\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2 = \left(\frac{\varphi \cdot a}{b}\right)^2$$

Also ist:

$$1 - \frac{2gh}{c_1^2} = \left(\frac{\varphi \cdot a}{b}\right)^2 \text{ oder}$$

$$1 - \left(\frac{\varphi \cdot a}{b}\right)^2 = \frac{2gh}{c_1^2}$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\varphi a}{b}\right)^2}}$$

Ferner ist

$$Q_0 = c_1 \cdot \varphi \cdot a$$

also

$$Q_0 = \frac{\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\varphi a}{b}\right)^2}} \cdot a \cdot \sqrt{2gh} \quad (9)$$

Aus obiger Formel ist ersichtlich, daß die Ausflußmenge Q_0 bei bekanntem h lediglich eine Funktion von φ ist.

Dieses φ bezw φ'

$$\varphi' = \frac{\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\varphi a}{b}\right)^2}} \quad (10)$$

nennen wir die Ausflußzahl (Koeffizient) und es ist nun unsere Aufgabe, dieselbe zu ermitteln.

Den Zusammenhang zwischen der Größe φ und dem Strömungsvorgang im Innern des Gefäßes vermittelt der sogenannte Impulssatz. Er besagt, daß die Änderung der Bewegungsgröße zwischen Anfang und Ende der Strömung gleich der Summe der wirksamen Kräfte ist. In der Richtung senkrecht nach unten bzw. waagrecht nach links vermehrt sich in unserem Fall die Bewegungsgröße um:

$$\frac{\gamma}{g} Q_0 (c_1 \cos \delta - c_0) \text{ bzw. } \frac{\gamma}{g} \cdot Q_0 c_1 \sin \delta \quad (11)$$

Die wirksamen Kräfte sind:

- 1) Kolbendruck $p_0 \cdot b$ nach unten gerichtet.
- 2) Die von den Gefäßwänden herrührenden Drücke $\int p dx$ und $\int p dy$ nach unten bzw. nach rechts gerichtet.

Die beiden Integrale erstrecken sich über die ganze Umrandung von A nach dem im Unendlichen liegenden B und von B über C nach D . Längs AB ist dy positiv und $dx = 0$, während dy längs BC negativ wird. Im Intervall CD sind dx und dy negativ.

Führt man nun für p und p_0 die Werte aus den Gleichungen (7) und (7') ein, so erhält man:

Aus Gleichung (7):

$$\begin{aligned} \frac{c_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} &= \frac{c^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} \\ \frac{\gamma \cdot c_0^2}{2g} + p_0 &= \frac{\gamma \cdot c^2}{2g} + p \end{aligned}$$

Aus Gleichung (7'):

$$\begin{aligned} \frac{c_1^2}{2g} &= \frac{c_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} \\ \frac{p_0}{\gamma} &= \frac{c_1^2 - c_0^2}{2g} \\ p_0 &= \gamma \cdot \left(\frac{c_1^2 - c_0^2}{2g} \right) \end{aligned}$$

Setzt man p_0 nun in Gleichung (7) ein, so ergibt sich für p die Beziehung:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma \cdot c_0^2}{2g} + \gamma \cdot \frac{c_1^2 - c_0^2}{2g} &= \gamma \cdot \frac{c^2}{2g} + p \\ p &= \frac{\gamma}{2g} (c_0^2 - c^2) + \frac{\gamma}{2g} (c_1^2 - c_0^2) \\ p &= \frac{\gamma}{2g} (c_1^2 - c^2) \end{aligned}$$

Die Summe der wirksamen Kräfte ist also

$$\begin{aligned}
 &= p_0 \cdot b + \int_{A \div D} p dx \\
 &= \frac{\gamma}{2g} (c_1^2 - c_0^2) b + \int_{A \div D} \frac{\gamma}{2g} (c_1^2 - c^2) dx \\
 &= \frac{\gamma}{2g} \left\{ (c_1^2 - c_0^2) b + \int_{A \div D} c_1^2 dx - \int_{A \div D} c^2 dx \right\} \\
 &= \frac{\gamma}{2g} (c_1^2 - c_0^2) b - (b-a) c_1^2 - \int_{A \div D} c^2 dx
 \end{aligned}$$

oder

$$= \frac{\gamma}{2g} \left(a c_1^2 - b c_0^2 - \int_{A \div D} c^2 dx \right)$$

Die Änderung der Bewegungsgröße zwischen Anfang und Ende der Bewegung ist daher:

$$= \frac{\gamma}{g} Q_0 (c_1 \cos \delta - c_0)$$

und gleich der Summe der wirkenden Kräfte. Daher gilt:

$$\frac{\gamma}{2g} \left(a \cdot c_1^2 - b c_0^2 - \int_{A \div D} c^2 dx \right) = \frac{\gamma}{g} Q_0 (c_1 \cos \delta - c_0)$$

Durch Division mit $Q_0 \cdot c_1$ geht die Formel über in

$$\frac{\gamma}{2g} \left(\frac{a c_1}{Q_0} - \frac{b c_0^2}{Q_0 c_1} - \frac{1}{c_1 Q_0} \int_{A \div D} c^2 dx \right) = \frac{\gamma}{g} \left(\cos \delta - \frac{c_0}{c_1} \right)$$

$$\frac{c_0}{c_1} = \frac{\varphi \cdot a}{b}$$

$$\frac{1}{\varphi} - \frac{\varphi \cdot a}{b} - \frac{1}{c_1 \cdot Q_0} \int_{A \div D} c^2 dx = 2 \left(\cos \delta - \frac{\varphi a}{b} \right)$$

$$\frac{1}{\varphi} = 2 \cos \delta - \frac{\varphi \cdot a}{b} + \frac{1}{Q_0 c_1} \int_{A \div D} c^2 dx. \quad \dots \dots \dots \text{I}$$

Mit a' bezeichnet man die Höhendifferenz der Punkte A und D , so daß

$$a' = - \int dy$$

und man erhält als Summe der wirksamen Kräfte in der y -Richtung den Wert

$$\frac{1}{\varphi} \cdot \frac{a'}{a} = 2 \sin \delta - \frac{1}{c_1 Q_0} \int_{A \div D} c^2 dy \quad \dots \dots \dots \text{II}$$

Die beiden Gleichungen (I) und (II) zeigen deutlich, daß die Ausflußzahl φ und die Strahlablenkung δ nur von der Geschwindigkeitsverteilung längs der Gefäßwand abhängig sind.

Zur Bestimmung von φ und δ müssen wir zuerst die in den beiden letzten Gleichungen auftretenden Größen

$$V_x = - \frac{1}{Q_0 c_1} \int_{A \div D} c^2 dx \quad \text{und} \quad V_y = \frac{1}{Q_0 c_1} \int_{A \div D} c^2 dy \quad \dots \dots \text{III}$$

berechnen.

C. Ermittlung des Geschwindigkeitsplanes.

Für die beiden äußersten, die Strömung begrenzenden Stromlinien BAE und $BCDE$, Abb. (2) kann man den Verlauf des Geschwindigkeitsvektors bis zu einem gewissen Grade sofort angeben. In dem unendlich fernen Punkt B

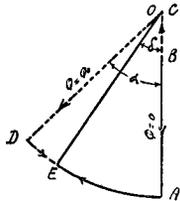


ABB. (3)
Geschwindigkeitsplan

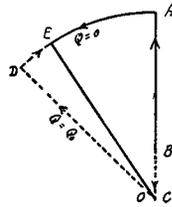


ABB. (4)
Spiegelbild des
Geschwindigkeitsplanes

haben übrigens alle Stromlinien eine vertikal gerichtete Geschwindigkeit c_0 , gleich OB in Abb. (3). Zwischen A und B Abb. (2) bleibt die Geschwindigkeit jedenfalls vertikal gerichtet, so daß die entsprechenden Punkte im Geschwindigkeitsplan Abb. (3) auf der Geraden OB bleiben. Im Punkt A Abb. (2) muß die Geschwindigkeit c den Wert c_1 angenommen haben, den sie auf der Strahl- oberfläche dauernd beibehält, weil dort der Überdruck Null ist.

In Abb. (3) ist demgemäß OA gleich c_1 .

Von A nach E Abb. (2) dreht sich der Geschwindigkeitsvektor, ohne seine Länge c_1 zu verändern, um den Winkel δ . Die entsprechenden Punkte in Abb. (3) liegen daher auf dem AE , dessen Zentriwinkel gleich δ ist. Der Linienzug BAE in Abb. (3) entspricht somit im Geschwindigkeitsplan der linken begrenzenden Stromlinie BAE von Abb. (2). Weisen wir der Stromlinie BAE den Wert $Q = 0$ zu, so muß die Stromlinie $BCDE$ notwendig den Wert $Q = Q_0$ erhalten, da wir mit Q_0 die ganze Ausflußmenge bezeichnet haben. Die Q_0 -Linie im Geschwindigkeitsplan muß nun den Verlauf $ABDE$ Abb. (3) nehmen, wobei der Winkel DCA gleich α ist. Längs BC Abb. (2) ist die Geschwindigkeit vertikal nach unten gerichtet, längs CD unter dem Winkel α geneigt. Dazwischen muß c Null werden, da sonst unendlich große Beschleunigung auftreten würde. Für

das Stück DE , das im Geschwindigkeitsplan wieder ein Kreisbogen vom Halbmesser c_1 ist, gilt dasselbe für AE . Damit ist der Umriß des Geschwindigkeitsplanes gefunden. Der ausgezogene Teil BAE entspricht der Schaulinie $Q = 0$, der gestrichelte $BCDE$ der Stromlinie $Q = Q_0$.

Im Vorangehenden ist festgestellt worden, daß die aus Stromfunktion und Potential gebildete Größe $W = P + Qi$, vorausgesetzt, daß darin die Geschwindigkeitsanteile c_x und c_y als unabhängige Veränderliche eingeführt werden, eine analytische Funktion der Größe $W' = c_x - c_y \cdot i$ sein muß. Stellt man W' in der erwähnten Weise durch Vektoren dar, so erhält man wegen dem negativen Vorzeichen bei c_y das Spiegelbild des Geschwindigkeitsplanes bezüglich der X -Achse. In Abb. (4) ist das Spiegelbild der Abb. (3) gezeichnet. Die Aufgabe besteht nun darin, eine Funktion $W = f(W')$ zu finden, deren imaginärer Teil gleich Null gesetzt den Linienzug BAE und gleich $Q_0 i$ gesetzt den Linienzug $BCDE$ ergibt.

Die Lösung der Aufgabe ergibt sich, indem man den gespiegelten Geschwindigkeitsplan durch verschiedene Abbildungen mehrmals vereinfacht.

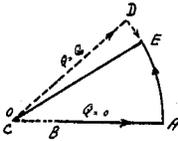


ABB. (5)

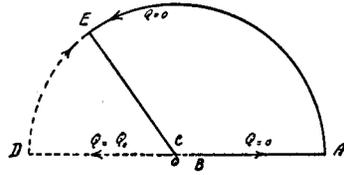


ABB. (6)

Bild der Veränderlichen $u = -\frac{i}{c_1} \cdot W'$

Bild der Veränderlichen $u' = u^x$

Zunächst führen wir an Stelle von W' die Veränderliche

$$u = -\frac{i \cdot W'}{c_1} \tag{12}$$

ein, Abb. (5). Die Multiplikation mit $-i$ bedeutet eine Drehung um 90° im negativen Sinn. Die Division durch c_1 verändert nur den Maßstab, so daß der Halbmesser des Kreisbogens in Abb. (5) nicht mehr c_1 , sondern 1 ist. Die Länge der in Abb. (5) aufgetragenen komplexen Größe u ist gleich dem Verhältnis $c : c_1$.

Setzt man jetzt

$$z = \frac{\pi}{\alpha}$$

und trägt statt u die Größe

$$u' = u^z \tag{13}$$

auf, so verwandelt sich der Kreisbogen Abb. (5) in einen Halbkreis Abb. (6). Der Punkt E verschiebt sich derart, daß der Winkel EOA gleich $z \cdot \delta$ wird, während B auf die X -Achse zu liegen kommt.

$$OB = u_1' = \left(\frac{c_0}{c_1}\right)^z$$

Ersetzen wir noch die Größe u' , die Abb. (6) ergeben hat, durch die Veränderliche

$$u'' = u' + \frac{1}{u'} \tag{14}$$

so kommen alle Punkte $ABCDE$ auf die reelle Achse zu liegen Abb. (7), und zwar liegen

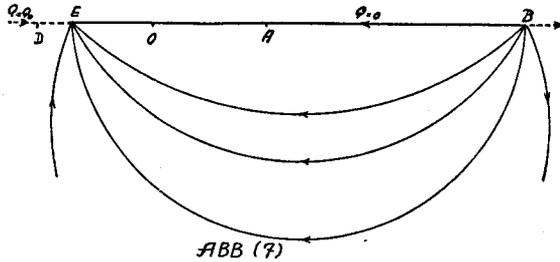


ABB (7)
Bild der Veränderlichen $u'' = u' + \frac{1}{u'}$.

- C im Unendlichen
- A bei $+ 2$
- D bei $- 2$ und
- E hat die Abszisse

$$E: u_2'' = 2 \cos x \delta$$

$$B: u_1'' = u_1' + \frac{1}{u_1'} = \left(\frac{c_0}{c_1}\right)^x + \left(\frac{c_0}{c_1}\right)^{-x}$$

Die Linie $Q = 0$, in Abb. (7) ist die unmittelbare Verbindung BAE , die Linie $Q = Q_0$ hat den Verlauf von B nach rechts ins Unendliche und von dort über D zurück zu E . Alle anderen Stromlinien müssen auf der unteren Halbebene verlaufen, in B beginnen und in A enden. Wir wissen, daß die Funktion

$$lg - \frac{u'' - u_1''}{u'' - u_2''}$$

gleich W gesetzt Q -Linien ergibt, die alle B und E geben, wobei der Geraden BE der Wert $Q = 0$, ihrer Verlängerung ins Unendliche der Wert $Q = \pi$ entspricht. Daher ist:

$$W = \frac{Q_0}{\pi} lg - \frac{u'' - u_1''}{u'' - u_2''}$$

die von uns gesuchte Funktion, in die wir nur der Reihe nach Gleichung (14), (13) und (12) einzuführen brauchen, um den Ausdruck W zu erhalten.

Schreiben wir nun statt:

$$u'' - u_1'' = u' - u_1' + \frac{1}{u'} - \frac{1}{u_1'} = \frac{1}{u'}(u' - u_1') \left(u' - \frac{1}{u_1'}\right)$$

und

$$u'' - u_2'' = u' - u_2' + \frac{1}{u'} - \frac{1}{u_2'} = \frac{1}{u'}(u' - u_2') \left(u' - \frac{1}{u_2'}\right)$$

so erhalten wir W zu

$$W = \frac{Q_0}{\pi} lg - \frac{(u' - u_1') \left(u' - \frac{1}{u_1'}\right)}{(u' - u_2') \left(u' - \frac{1}{u_2'}\right)} \tag{15}$$

Hierbei ist $u_2' = e^{x\delta i}$

D. Gleichungen für die Ausflußzahl φ und die Strahlneigung δ .

Wir haben folgende drei Gleichungen:

$$\frac{1}{\varphi} = 2 \cos \delta - \frac{\varphi a}{b} + \frac{1}{Q_0 c_1} \int_{A \div D} c^2 dx \quad \text{I}$$

$$\frac{1}{\varphi} \cdot \frac{a'}{a} = 2 \sin \delta - \frac{1}{Q_0 c_1} \int_{A \div D} c^2 dy \quad \text{II}$$

$$V_x = - \frac{1}{Q_0 c_1} \int_{A \div D} c^2 dx \quad V_y = \frac{1}{Q_0 c_1} \int_{A \div D} c^2 dy \quad \text{III}$$

Wir führen nun in die Gleichung I und II die in III gebrauchten Abkürzungen V_x und V_y , ferner die Beziehung

$$\varepsilon = \frac{c_0}{c_1} = \frac{\varphi \cdot a}{b} \quad (16)$$

ein. ε bedeutet das Geschwindigkeitsverhältnis für Beginn und Ende der Strömung. Wir erhalten damit:

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{a}{b} = 2 \cos \delta - \varepsilon - V_x; \quad \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{a'}{b} = 2 \sin \delta - V_y \quad (17)$$

Multiplizieren wir die erste dieser Gleichungen mit $\cos \alpha$, die zweite mit $\sin \alpha$, so ergibt sich nach Addition der beiden Produkte:

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{a}{b} (a \cos \alpha - a' \sin \alpha) = 2 \cos \alpha \cdot \cos \delta + 2 \sin \delta \sin \alpha - (V_x \cos \alpha + V_y \sin \alpha) - \varepsilon \cos \alpha$$

Wenn $d = a \cos \alpha - a' \sin \alpha$ und gleich der in Abb. (2) angegebenen Größe ist, folgt:

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{d}{b} = 2 \cos (\delta - \alpha) - \varepsilon \cos \alpha - (V_x \cos \alpha + V_y \sin \alpha) \quad (18)$$

Die Integrale der Gleichung III erstrecken sich über die beiden äußersten Teile der Stromlinien BAE und $BCDE$ Abb. (2). Längs einer Stromlinie ist:

$$\frac{\partial P}{\partial s} = c; \quad c ds = dP$$

Daher ergibt sich, bei Berücksichtigung der Vorzeichen für die drei Teile AB , BC und CD des Integrationsweges

$$\begin{array}{ll} \text{längs } AB & cdx = 0 \qquad cdy = -dP \\ BC & cdx = 0 \qquad cdy = -dP \\ CD & cdx = -\sin \alpha dP \qquad cdy = -\cos \alpha dP \end{array}$$

Setzt man nun:

$$\frac{1}{Q_0} \int_{C \div D} \frac{c}{c_1} dP = A; \quad \frac{1}{Q_0} \int_{ABC} \frac{c}{c_1} dP = -B \quad (19)$$

so wird aus Gleichung III

$$V_x = A \sin \alpha \qquad V_y = B - A \cos \alpha \qquad (20)$$

und aus der Gleichung (17) und (18) entstehen die beiden Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{a}{b} &= 2 \cos \delta - \varepsilon - A \sin \alpha \\ \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{d}{b} &= 2 \cos (\delta - \alpha) - \varepsilon \cos \alpha - B \sin \alpha \end{aligned} \right\} \qquad (21)$$

Um die Integrale A und B näher zu bestimmen, beachte man, daß längs einer Stromlinie, weil $Q = \text{konstant}$, das Differential dP mit dW übereinstimmt. Durch Differentiation von Gleichung (15) erhält man:

$$dW = \frac{Q_0}{\pi} \left(\frac{1}{u' - u_1'} + \frac{1}{u' - \frac{1}{u_1'}} - \frac{1}{u' - u_2'} - \frac{1}{u' - \frac{1}{u_2'}} \right) du' = dP \qquad (22)$$

und nach einfacher Umformung:

$$dP = \frac{Q_0}{\pi} \cdot \frac{1}{u'} \left\{ \frac{u'}{u' - u_1'} + \frac{\frac{1}{u_1'}}{u' - \frac{1}{u_1'}} - \frac{u_2'}{u' - u_2'} - \frac{\frac{1}{u_2'}}{u' - \frac{1}{u_2'}} \right\} du' \qquad (23)$$

In dieser Gleichung ist

$$u_1' = \left(\frac{c_0}{c_1} \right)^x = \varepsilon^x \text{ und } u_2' = e^{x\delta i}$$

wie es früher erwähnt wurde.

Die im allgemeinen komplexe Größe u' hat die Länge der x^{ten} Potenz des Verhältnisses $\frac{c_0}{c_1}$. Da auf dem ganzen Integrationsweg $ABCD$ (nach Abb. 5) u' reel ist, und zwar längs ABC positiv, längs CD negativ, so hat man in Gleichung (19) für $\frac{c}{c_1}$ einzusetzen:

$$\begin{aligned} \text{Längs } ABC: \frac{c}{c_1} &= u'^x \\ CD: \frac{c}{c_1} &= (-u')^x \end{aligned}$$

Diese und Gleichung (23) in Gleichung (19) eingesetzt, läßt A und B als bestimmte Integrale mit den Grenzen (Abb. 5) $u' = 0$ bis $u' = -1$ bzw. $u' = 1$ bis $u' = 0$ erscheinen. Der Wert der Integrale hängt, von x abgesehen, nur von den Konstanten u_1' und u_2' , d. h. von ε und δ ab. Man kann daher die beiden Gleichungen (21) in der Form

$$\frac{a}{b} = \varepsilon \left(f_1(\varepsilon) + f_2(\delta) \right) \qquad \text{I'}$$

$$\frac{d}{b} = \varepsilon \left(g_1(\varepsilon) + g_2(\delta) \right) \qquad \text{II'}$$

schreiben.

Wenn wir der Einfachheit halber im ersten Integral der Gleichung (19) x für $(-u')$, im zweiten x für u' schreiben, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} f_1(\varepsilon) &= -\varepsilon + \frac{\sin a}{\pi} \int_0^1 x^{\frac{1}{q}-1} \left(\frac{\varepsilon^x}{x + \varepsilon^x} + \frac{\varepsilon^{-x}}{x + \varepsilon^{-x}} \right) dx \\ f_2(\delta) &= 2 \cos \delta - \frac{\sin a}{\pi} \int_0^1 x^{\frac{1}{q}-1} \left(\frac{e^{x\delta i}}{x + e^{x\delta i}} + \frac{e^{-x\delta i}}{x - e^{-x\delta i}} \right) dx \\ g_1(\varepsilon) &= -\varepsilon \cos a - \frac{\sin a}{\pi} \int_0^1 x^{\frac{1}{q}-1} \left(\frac{\varepsilon^x}{x - \varepsilon^x} + \frac{\varepsilon^{-x}}{x - \varepsilon^{-x}} \right) dx \\ g_2(\delta) &= 2 \cos(\delta - a) + \frac{\sin a}{\pi} \int_0^1 x^{\frac{1}{q}-1} \left(\frac{e^{x\delta i}}{x - e^{x\delta i}} + \frac{e^{-x\delta i}}{x - e^{-x\delta i}} \right) dx \end{aligned} \right\} \text{III}$$

Nach Prof. von Mises sind die Endresultate der Integrale:

$$\left. \begin{aligned} f_1(\varepsilon) &= -\frac{\sin a}{\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \sum_{n=1}^{\frac{p}{2}} \cos q \cdot a_n \lg \left(1 + \eta^2 - 2 \eta \cos a_n \right) + \\ &\quad + \frac{2 \sin a}{\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \sum_{n=1}^{\frac{p}{2}} \sin q \cdot a_n \operatorname{arctg} \frac{\eta \sin a_n}{1 - \eta \cos a_n} \\ g_1(\varepsilon) &= -\frac{\sin a}{\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \right) \lg \frac{1 - \eta}{1 + \eta} + \sum_{n=1}^{\frac{p}{2}-1} \cos q a_n' \lg \left(1 + \eta^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2 \eta \cos a_n' \right) + 2 \frac{\sin a}{\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \sum_{n=1}^{\frac{p}{2}-1} \sin q a_n' \operatorname{arctg} \frac{\eta \sin a_n'}{1 - \eta \cos a_n'} \\ f_2(\delta) &= \cos \delta + \frac{\sin a}{\pi} \sum_{n=1}^p \cos(\delta + q a_n) \cdot \lg \left(\sin^2 \frac{\delta + q \cdot a_n}{2q} \right) \\ g_2(\delta) &= f_2(\delta - a) \end{aligned} \right\} \text{IV}$$

Hier ist beizufügen, daß η die reelle q te Wurzel aus ε bedeutet, ferner

$$a_n = \frac{2n-1}{q} \cdot a; \quad a_n' = \frac{2n}{q} a; \quad \frac{p}{q} = \frac{\pi}{a}$$

p muß stets geradzahlig, q ungeradzahlig sein und dem Wert von arctg soll immer ein zwischen 0 und π liegender Winkel entsprechen. Die Gleichung I' , II' und IV enthalten die vollständige Lösung der Aufgabe.

Theoretische Behandlung des Überfalles.

(nach Prof. von Mises)

1. Überfall mit senkrechter und scharfkantiger Wand (ohne Seitenkonstruktion)

Prof. R. von Mises hat das Problem wie folgt behandelt: In Abb. (8) ver-

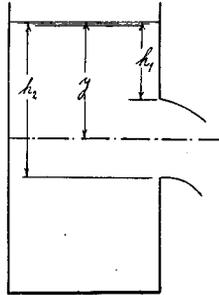


ABB (8)

lassen die einzelnen Stromfäden des Ausflußstrahles das Gefäß in verschiedenen Höhen, so daß man nicht von vorneherein sagen kann, was für eine Überdruckhöhe h in die Gleichung der Ausflußmenge einzuführen ist. Die übliche Rechnungsweise ist nun die, daß man jeden einzelnen Stromfaden als einen selbständigen, allerdings unendlich kleinen Ausflußstrahl betrachtet und dann die ganze Ausflußmenge durch Integration ermittelt. Bei einer Mündung in senkrechter Wand hat ein beliebiger Stromfaden die Austrittshöhe y , die zwischen den Grenzen h_1 und h_2 liegt. Nimmt man an, daß die einzelnen Teilchen bei Durchgang durch die Mündungsebene bereits ins Freie treten, und zwar senkrecht zur Mündungsebene, so sagt die Energiegleichung aus:

$$\frac{c_1^2}{2g} = \frac{c_0^2}{2g} + y \quad c_1 = \sqrt{2gy + c_0^2}$$

c_1 bezeichnet die Geschwindigkeit des austretenden Stromfadens. Die Ausflußmenge des Stromfadens ergibt sich aus $c_1 \cdot dy$. Es muß daher

$$\int_{h_1}^{h_2} \sqrt{2gy + c_0^2} \, dy = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \cdot \left\{ \sqrt{h_2 + \frac{c_0^2}{2g}}^3 - \sqrt{h_1 + \frac{c_0^2}{2g}}^3 \right\}$$

gleich der Ausflußmenge des ganzen Strahles sein. Dies gilt allerdings nur bei der Annahme, daß die Stromfäden sich gegenseitig nicht beeinflussen, ohne Überdruck und senkrecht zur Mündungsebene das Gefäß verlassen. Um aber dem tatsächlich vorhandenen Überdruck in der Mündungsebene und der Strahl-

ablenkung Rechnung zu tragen, setzt man vor den Ausdruck noch den Koeffizienten φ

$$Q_o = \frac{2}{3} \cdot \varphi \cdot \sqrt{2g} \cdot \left\{ \sqrt{h_2 + \frac{c_o^2}{2g}} - \sqrt{h_1 + \frac{c_o^2}{2g}} \right\} \quad (25)$$

Aus obiger Gleichung können wir, selbst wenn die notwendigen Abmessungen des Gefäßes bekannt sind, nicht direkt Q_o bestimmen, da auf der rechten Seite der Gleichung c_o steht. Es gilt ferner die Beziehung

$$c_o \cdot b = Q_o$$

Man bestimmt zunächst aus Gleichung (24) mit einem angenommenen Wert c_o (z. B. $c_o = 0$) einen Näherungswert für Q_o . Für dieses Q_o ergibt sich aus Gleichung (25) ein neues c_o , das wiederum in (24) eingesetzt wird usw.

Wenn wir an der Annahme festhalten, daß die Schwerkraft, d. h. die dadurch bedingte Strahlablenkung keinen Einfluß auf die Ausflußmenge ausübt, so ist das Problem des Überfalls für ein senkrecht Wehr Abb. (9) sehr

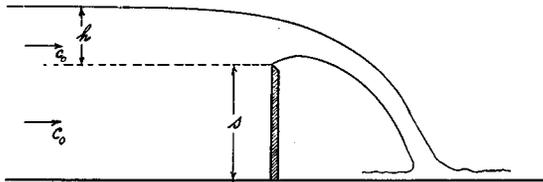


Abb. (9)

leicht zu erledigen. Vor allem müssen wir in Gleichung (24) $h_1 = 0$ und $h_2 = h$ setzen. Es gilt also:

$$Q_o = \frac{2}{3} \cdot \varphi \cdot \sqrt{2g} \cdot \left\{ \sqrt{h + \frac{c_o^2}{2g}} - \sqrt{\frac{c_o^2}{2g}} \right\} \quad (26)$$

wobei φ eine Funktion des Mündungsverhältnisses $x = \frac{h}{h+s}$ ist, die wir später bestimmen werden.

Analog zu Gleichung (25) gilt

$$Q_o = c_o(h+s) \quad \text{für 1 m Breite.} \quad (27)$$

Berechnet man aus Gleichung (27) c_o und setzt dieses in Gleichung (26) ein, so ist Q_o die einzige Unbekannte, sofern h und s bekannt sind. Es liegt nahe, den Ausdruck für Q_o in der Form

$$Q_o = \psi \cdot h \cdot \sqrt{2g h} \quad (28)$$

zu schreiben, wobei Q_o nur vom Verhältnis $\frac{h}{h+s}$ oder (x) abhängt. Wir bezeichnen den Überfallkoeffizienten mit ψ dessen zahlenmäßige Ermittlung in nachfolgendem Abschnitt erfolgt.

Berechnung des Überfall-Koeffizienten.

Führt man in die oben aufgestellten Gleichungen (26) und (27) die Abkürzung

$$\frac{c_0}{\sqrt{2gh}} = z$$

ein, so erhält man

$$Q_0 = z \cdot \sqrt{2gh} (h + s) = \frac{z}{x} h \cdot \sqrt{2gh} \quad (29)$$

Somit ist

$$\psi = \frac{z}{x}$$

Gleichung (26) = Gleichung (29)

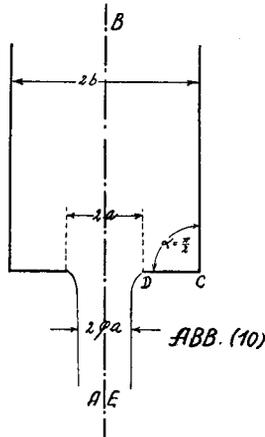
$$Q_0 = \frac{2}{3} h \sqrt{2gh} \left\{ (1 + z^2)^{\frac{3}{2}} - z^3 \right\} = \frac{z}{x} h \cdot \sqrt{2gh} \quad (30)$$

oder nach $\varphi \cdot x$ aufgelöst:

$$\varphi \cdot x = \frac{3}{2} \frac{z}{(1 + z^2)^{\frac{3}{2}} - z^3} \quad (31)$$

Bestimmung der Funktion $\varphi \cdot x$

Die in Abb. (10) dargestellte Versuchsanordnung ergibt sich aus Abb. (2), indem man



- 1) die Bodenneigung $\alpha = 90^\circ$ werden läßt,
- 2) die Begrenzung AB ins Unendliche verlängert und dann das Spiegelbild von CD in bezug auf AB herstellt.

Für die Rechnung sind nur die folgenden Annahmen maßgebend:

$$a = \frac{\pi}{2}; \quad \frac{d}{a} = -\infty \quad (32)$$

Aus der ersten folgt:

$$x = \frac{\pi}{a} = 2 = \frac{p}{q} \quad p = 2 \text{ und } q = 1 \quad (33)$$

Man erkennt von vornherein, daß die Neigung δ des Strahles gegen die Senkrechte hier Null sein muß. Tatsächlich wird die Gleichung II' durch $\delta = 0$ und $\frac{d}{b} = -\infty$ ohne Rücksicht auf den Wert von φ befriedigt, da nach Gleichung IV in $g_2(o)$ das Glied $lg(\sin^2 o) = -\infty$ auftritt. Somit bleibt nur die Gleichung I' übrig, aus der die einzige Unbekannte φ als Funktion der unabhängig Veränderlichen x

$$\frac{a}{b} = x = \text{Mündungsverhältnis} \quad (34)$$

berechnet werden muß.

Gleichung IV_1 ergibt mit Rücksicht auf Gleichung (33)

$$\begin{aligned} f_1(\varepsilon) &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \right) \cdot 0 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \operatorname{arctg} \varepsilon \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \operatorname{arctg} \varepsilon \end{aligned}$$

Die Gleichung IV_3 liefert für $\delta = 0$

$$f_2(o) = 1$$

Die Gleichung I' lautet daher mit der Beziehung (34)

$$x = \varepsilon \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \operatorname{arctg} \varepsilon \right\} \quad (35)$$

Dazu kommt die Definition von ε :

$$\varepsilon = \frac{c_0}{c_1} = \frac{\varphi a}{b} = \varphi \cdot x$$

Für den Grenzfall, d. h. bei einem sehr weiten Gefäß konvergiert $x = a : b$ und auch $\varepsilon = \varphi \cdot x$ gegen Null. Da für kleine Winkel der tg gleich dem Bogen ist, wird aus Gleichung (35)

$$\begin{aligned} \frac{x}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{2}{\pi} \\ \varphi &= \frac{\pi}{\pi + 2} = 0,611 \text{ für } x = 0 \end{aligned}$$

Für den Fall, wo die endliche Weite des Gefäßes zur Geltung kommt, löst man Gleichung (35) am besten wie folgt:

$$tg \frac{\delta}{2} = \varepsilon$$

so daß

$$\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon = \operatorname{cotg} \frac{\delta}{2} - tg \frac{\delta}{2} = 2 \operatorname{cotg} \delta$$

und aus Gleichung (35) wird

$$\frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{2}{\pi} \delta \operatorname{cotg} \delta \quad (36)$$

Läßt man δ alle Winkel von $0 \div \frac{\pi}{2}$ durchlaufen, für die auch ε und φ bestimmt sind, so kennt man das zugehörige x und kann somit die Linie φ als

Funktion von x aufzeichnen. Dem Überfall mit senkrechter scharfkantiger Wand entspricht die um 90° gedrehte linke Hälfte der symmetrischen Anordnung Abb. (10), sofern von der späteren Strahlablenkung abgesehen wird. Die Endresultate sind:

$$\frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{2}{\pi} \delta \cotg \delta$$

$$\varphi \cdot x = \frac{3}{2} \frac{z}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}} - z^3}$$

$$\psi = \frac{z}{x}$$

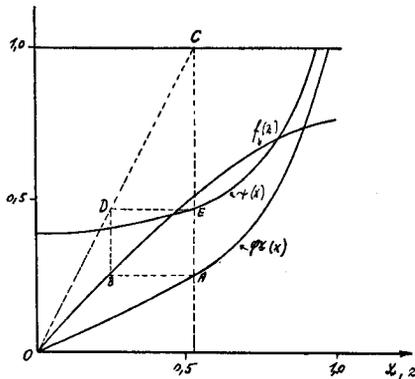
Aus der zweiten dieser Gleichungen errechnen wir für jedes x das zugehörige z und erhalten dann aus der dritten Gleichung das entsprechende ψ .

Die graphische Ermittlung von ψ wird nach Prof. von Mises wie folgt durchgeführt:

Die aus der Zahlentafel 2 entnommenen Werte $\varphi \cdot x$ werden als Ordinaten in Funktion von x aufgetragen. Im gleichen Maßstab wie $\varphi \cdot x$ und x wird

$$f(z) = \frac{3}{2} \frac{z}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}} - z^3}$$

in Funktion von z in das Diagramm eingetragen Abb. (11). Geht man von einem



beliebigen Punkt A der $\varphi \cdot x$ -Linie waagrecht zum Punkt B auf der $f(z)$ -Linie, so stellt das Verhältnis der Abszissen B und A den gesuchten Wert ψ dar. D ergibt sich als Schnittpunkt der Linie OC und der Senkrechten durch B . Von dem zu A zugehörigen Punkt E der ψ -Kurve kennt man nun die beiden Koordinaten, da eine Abszisse gleich OA und die Ordinate gleich der des Punktes D ist.

Die für diesen Fall errechneten Zahlenwerte sind in Zahlentafel (2) tabellarisch und in Abb. (12) graphisch zusammengestellt.

Zahlentafel (2).

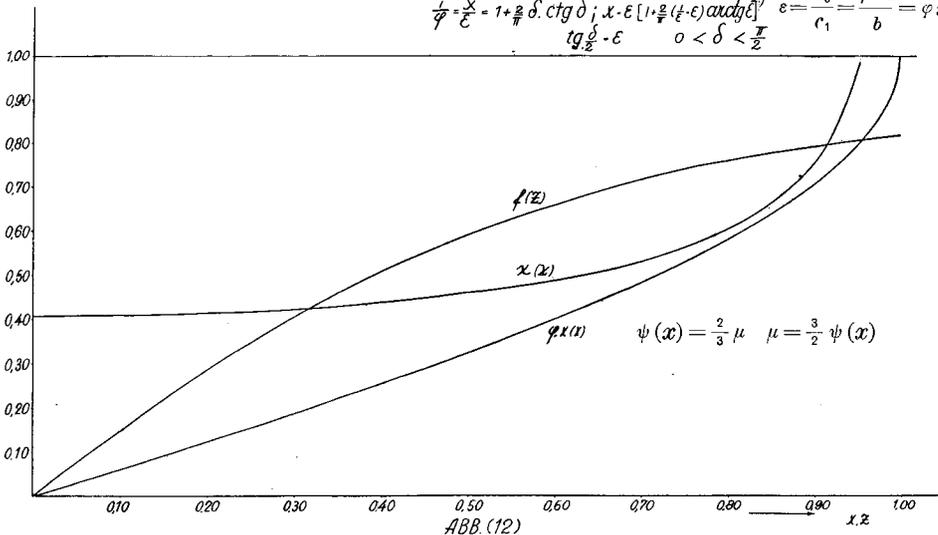
φ	$\varepsilon = \varphi \cdot x$	$x = \frac{\varepsilon}{\varphi}$	z	$f(z)$
0,6125	0,04379	0,0715	0,050	0,0747
0,6140	0,08755	0,1426	0,100	0,1476
0,6151	0,13157	0,2139	0,150	0,2182
0,6210	0,17636	0,2840	0,200	0,2850
0,6270	0,2207	0,3520	0,250	0,3462
0,6350	0,2673	0,4210	0,300	0,4050
0,6430	0,3151	0,4900	0,350	0,4585
0,6535	0,3643	0,5575	0,400	0,506
0,6675	0,4138	0,6200	0,450	0,550
0,6830	0,4672	0,6840	0,500	0,590
0,7000	0,5215	0,7450	0,550	0,624
0,7220	0,5765	0,7985	0,600	0,655
0,7495	0,6385	0,8520	0,650	0,686
0,7800	0,7000	0,8975	0,700	0,713
0,8175	0,7668	0,9380	0,750	0,740
0,8660	0,8378	0,9675	0,800	0,756
0,9245	0,9175	0,9925	0,900	0,790
1,0000	1,0000	1,0000	1,000	0,820

Theoretische Bestimmung von Ueberfallkoeffizient nach der Methode von Prof. R. von Mises

ÜBERFALLWANDNEIGUNG $a = \frac{\pi}{2} \quad \frac{a}{\pi} = \frac{1}{2}$

$$\frac{\varphi x \cdot \frac{z}{(1+z^2)^{1/2}}}{\frac{1}{\varphi} = \frac{x}{\varepsilon} = 1 + \frac{2}{\pi} \delta \cdot \text{ctg} \delta_j \cdot x \cdot \varepsilon [1 + \frac{2}{\pi} (\xi - \varepsilon) \text{arctg} \xi]} = \frac{c_0}{c_1} = \frac{\varphi \cdot a}{b} = \varphi x$$

$\text{tg} \frac{\delta}{2} = \varepsilon \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}$

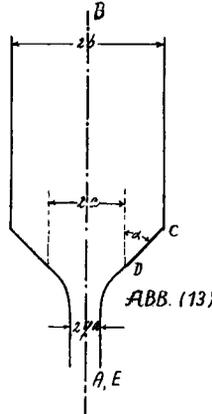


2. Überfall mit scharfer Kante und 45° Wandneigung.

Die in Abb. (13) gezeichnete Anordnung stellt den allgemeinsten Fall dar, der aus Abb. (2) konstruiert werden kann. Dabei wird die Verbindungslinie von A und B zur Mittellinie. Durch Drehung einer Hälfte der Anordnung um 90° erhält man einen Überfall mit einer unter 45° geneigten Wehrtafel. Die Beziehung

$$\varphi \cdot x = \frac{3}{2} \frac{z}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}} - z^3}$$

bleibt dieselbe wie früher, aber man erhält für die Funktion $\varphi \cdot x$ andere Zahlenwerte.



Weil $d = \infty$, ist die Strahlneigung $\delta = 0$. Für die Bestimmung von φ gilt die Gleichung I'

$$\frac{1}{\varphi} = f_1(\varepsilon) + f_2(0)$$

Dabei entnehmen wir $f_1(\varepsilon)$ der Beziehung IV₁ $f_2(0)$ aus IV₃

$$f_2(0) = 1 + \frac{\sin a}{\pi} \sum_{n=1}^p \left[\cos q \cdot a_n \cdot \lg \left(\sin^2 \frac{a_n}{2} \right) \right]$$

Es ergibt sich:

$$\frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{\sin a}{\pi} \sum_{n=1}^{\frac{p}{2}} (A_n \cdot \cos q \cdot a_n + B_n \cdot \sin q \cdot a_n)$$

mit $a_n = \frac{2n-1}{q} \cdot a$

$$A_n = 2 \lg (1 - \cos a_n) - \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \lg (\eta^2 + 1 - 2\eta \cos a_n)$$

$$B_n = 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \operatorname{arctg} \frac{\eta \sin a_n}{1 - \eta \cos a_n}$$

Für $\alpha = 45^\circ$ ist

$$\frac{\pi}{a} = 4 \quad x = 4 \quad p = 4 \quad q = 1$$

$$a_1 = \frac{\pi}{4} \quad a_2 = \frac{3\pi}{4} \quad \eta = \varepsilon$$

und man bekommt:

$$\frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{\pi} \left\{ \lg \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \lg \frac{1 + \eta^2 - \eta\sqrt{2}}{1 + \eta^2 + \eta\sqrt{2}} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\sqrt{2}-\eta} + \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\sqrt{2}+\eta} \right\}$$

$$\frac{1}{\varphi} = 0,439 + \frac{1}{2\pi} \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \lg \frac{1 + \varepsilon^2 + \varepsilon\sqrt{2}}{1 + \varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{2}} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{1 - \varepsilon^2}$$

Um φ als Funktion von x zu erhalten, gibt man ε den Wert

$$\varepsilon = \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}$$

so daß

$$\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} = \frac{2}{\sin \delta}; \quad \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} = 2 \operatorname{ctg} \delta$$

Wie vorher läßt man den Winkel δ alle zwischen 0 und π liegenden Werte annehmenden, bestimmt die zugehörigen ε und φ , woraus man dann x , d. h. $\varphi = f(x)$ erhält.

Die diesem Überfall zugehörigen Zahlenwerte sind der Tabelle (3) zu entnehmen.

Zahlentafel (3).

φ	$\varepsilon = \varphi \cdot x$	$x = \frac{\varepsilon}{\varphi}$
0,7236	0,04379	0,0604
0,7449	0,08755	0,1176
0,7466	0,13157	0,1764
0,7467	0,17636	0,2361
0,7470	0,2207	0,2968
0,7501	0,2673	0,3572
0,7508	0,3151	0,4200
0,7516	0,3643	0,4843
0,7548	0,4138	0,5488
0,7599	0,4672	0,6136
0,7656	0,5215	0,6799
0,7768	0,5765	0,7433
0,7908	0,6385	0,8056
0,8104	0,7000	0,8640
0,8369	0,7668	0,9168
0,8738	0,8378	0,9605
0,9286	0,9175	0,9868
1,0000	1,0000	1,0000

Für den Grenzfall konvergiert, wie im vorigen Abschnitt bereits angegeben, $x = a : b$ und $\varepsilon = \varphi \cdot x$ gegen Null, so daß man für den tg des Winkel den Bogen setzen kann und es wird

$$\frac{1}{\varphi} = 0,439 + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \right) \lg \frac{1 + \varepsilon^2 + \varepsilon \sqrt{2}}{1 + \varepsilon^2 - \varepsilon \sqrt{2}} + \frac{1}{\pi} \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} \right) \lg \left(\frac{1 + \varepsilon^2 + \varepsilon \sqrt{2}}{1 + \varepsilon^2 - \varepsilon \sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2\pi} \lg \left(\frac{1 + \varepsilon^2 + \varepsilon \sqrt{2}}{1 + \varepsilon^2 - \varepsilon \sqrt{2}} \right)^{\frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon}}$$

ε konvergiert gegen Null d. h. ε^2 kann vernachlässigt werden. Also ist

$$\frac{1}{2\pi} \lg \left(\frac{1 + \varepsilon \sqrt{2}}{1 - \varepsilon \sqrt{2}} \right)^{\frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon}} = \left\{ 1 + \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} \cdot \varepsilon \sqrt{2} + \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} \left(\frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} - 1 \right) \frac{\varepsilon^2 \sqrt{2}^2}{1 \cdot 2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} \left(\frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} - 1 \right) \left(\frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} - 2 \right) \cdot \frac{\varepsilon^3 \sqrt{2}^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right\} - \left\{ 1 - \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} \cdot \varepsilon \sqrt{2} + \right.$$

$$\left. \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} \left(\frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} - 1 \right) \frac{\sqrt{2}^2 \cdot \varepsilon^2}{1 \cdot 2} \right\}$$

$$\frac{1}{2\pi} \lg \left(\frac{1 + \varepsilon \sqrt{2}}{1 - \varepsilon \sqrt{2}} \right)^{\frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon}} = \left\{ 1 + \frac{\sqrt{2}}{1!} + \frac{\sqrt{2}^2}{2!} + \frac{\sqrt{2}^3}{3!} + \dots \right\} - \left\{ 1 - \frac{\sqrt{2}}{1!} + \frac{\sqrt{2}^2}{2!} - \dots \right\}$$

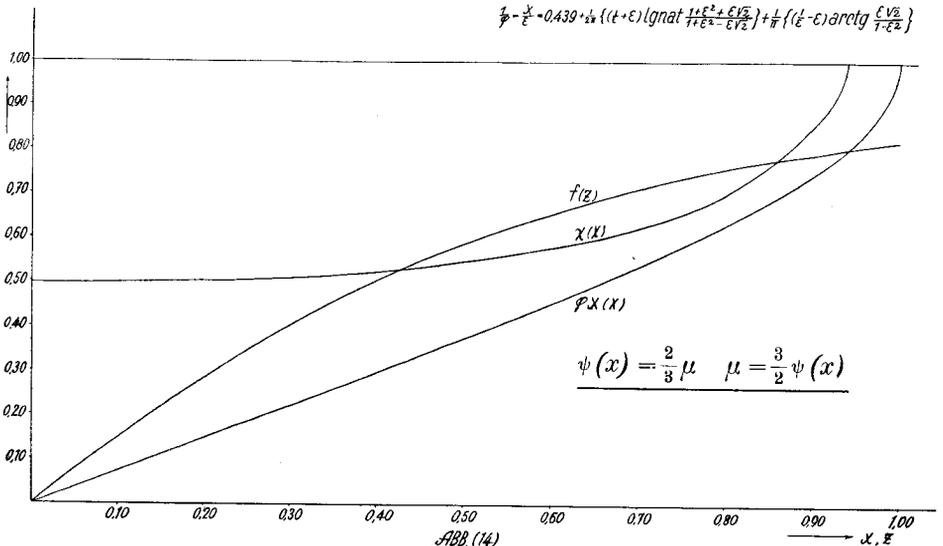
$$= \frac{1}{2\pi} \lg \frac{4,11309}{0,243118} + 0,4501$$

$$\frac{1}{\varphi} = 0,439 + 0,4501 + \frac{\sqrt{2}}{\pi} = 1,3392$$

UEBERFALLWANDNEIGUNG $\alpha = 45^\circ$ $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$

$$\varphi x = \frac{2}{3} \frac{2}{(1 + \frac{2}{3})^2 - 2^2}$$

$$\frac{2}{3} x = 0,439 + \frac{1}{2\pi} \left((1 + \varepsilon) \lg \frac{1 + \varepsilon^2 + \varepsilon \sqrt{2}}{1 + \varepsilon^2 - \varepsilon \sqrt{2}} \right) + \frac{1}{\pi} \left((1 - \varepsilon) \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon \sqrt{2}}{1 - \varepsilon^2} \right)$$



Für $x = 0$ ergibt sich als Grenzwert:

$$\varphi = 0,7467 .$$

Die entsprechenden Zahlenwerte sind in Zahlentafel (3) und in Abb. (14) eingetragen.

3. Ueberfall mit scharfer Kante und 30° Wandneigung.

Wir wenden wie vorher die Formel

$$\frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{\sin \alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\frac{p}{2}} A_n \cos q \alpha_n + B_n \cdot \sin q \cdot \alpha_n$$

an mit denselben Beziehungen für A_n , B_n und α_n , nur sind in diesem Fall:

$$\begin{array}{lll} p = 6 & q = 1 & \varepsilon = \eta \\ \alpha_1 = 30^\circ & \alpha_2 = 90^\circ & \alpha_3 = 150^\circ \end{array} \quad \text{woraus folgt, daß}$$

$$A_1 = 2 \lg \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \lg (\varepsilon^2 + 1 - \varepsilon \sqrt{3})$$

$$A_2 = 2 \lg (1 - 0) - \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \lg (\varepsilon^2 + 1)$$

$$A_3 = 2 \lg \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \lg (\varepsilon^2 + 1 + \varepsilon \sqrt{3})$$

$$B_1 = 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{2(1 - \frac{\varepsilon \sqrt{3}}{2})} = 2 \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon \sqrt{3}}$$

$$B_2 = 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \operatorname{arctg} \varepsilon$$

$$B_3 = 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{\varepsilon}{2(1 + \frac{\varepsilon \sqrt{3}}{2})} \right) = 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon \sqrt{3}}$$

Aus der Beziehung:

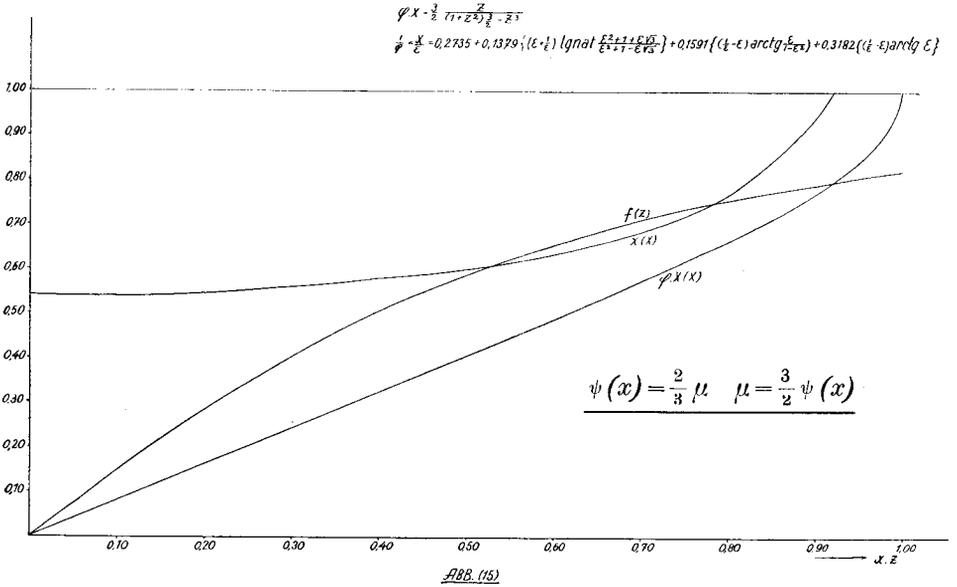
$$\operatorname{arctg} u \pm \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg} \frac{u \pm v}{1 \pm u \cdot v}$$

folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} & \left\{ \lg \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right) + \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \lg \frac{\varepsilon^2 + 1 + \varepsilon \sqrt{3}}{\varepsilon^2 + 1 - \varepsilon \sqrt{3}} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi} \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right) \right\} + \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \operatorname{arctg} \varepsilon \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} = 0,2735 + 0,1379 \cdot & \left\{ \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \lg \frac{\varepsilon^2 + 1 + \varepsilon \sqrt{3}}{\varepsilon^2 + 1 - \varepsilon \sqrt{3}} + \right. \\ & \left. + 0,1591 \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right) \right\} + 0,3182 \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \operatorname{arctg} \varepsilon \right\} \right\} \end{aligned}$$

UEBERFALLWANDNEIGUNG $\alpha = 30^\circ \frac{d}{z} = \frac{z}{2}$



Auf diese erhält man φ als Funktion von x . Die berechneten Werte finden sich in Zahlentafel (4) und sind in Abb. (15) graphisch aufgetragen.

Zahlentafel (4).

φ	$\varepsilon = \varphi \cdot x$	$x = \frac{\varepsilon}{\varphi}$
0,8137	0,04379	0,05395
0,8139	0,08755	0,1075
0,8142	0,13157	0,1618
0,8143	0,17636	0,2165
0,8144	0,2207	0,2722
0,81445	0,2673	0,3289
0,8146	0,3151	0,3871
0,8146	0,3646	0,4468
0,8152	0,4138	0,5081
0,8153	0,4672	0,5719
0,8175	0,5215	0,6368
0,8219	0,5765	0,7025
0,8283	0,6385	0,7692
0,8388	0,7000	0,8348
0,8561	0,7668	0,8963
0,8849	0,8378	0,9500
0,9311	0,9175	0,9841
1,0000	1,0000	1,0000

Zahlentafel (5).

φ	$\varepsilon = \varphi \cdot x$	$x = \frac{\varepsilon}{\varphi}$
0,70898	0,04379	0,06164
0,66882	0,08755	0,13081
0,6695	0,13157	0,19671
0,67175	0,17636	0,26245
0,6850	0,2207	0,32365
0,6776	0,2673	0,3954
0,68275	0,3151	0,4618
0,6891	0,3646	0,52825
0,6978	0,4138	0,5936
0,7086	0,4672	0,6581
0,7249	0,5215	0,7182
0,7398	0,5765	0,78042
0,76175	0,6385	0,8364
0,7888	0,7000	0,8877
0,8235	0,7668	0,9317
0,8675	0,8378	0,9672
0,9246	0,9175	0,9910
1,0000	1,0000	1,0000

Für den Grenzwert $x = a : b = 0$ ist $\varepsilon = \varphi \cdot x$ auch gleich Null und der tg = Bogen, so daß man schreiben kann:

$$\frac{1}{\varphi} = 0,2735 + 0,1591 + 0,3182 + \frac{1}{2\pi} \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \lg \frac{1 + \varepsilon^2 + \varepsilon\sqrt{3}}{1 + \varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{2\pi} \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \lg \frac{1 + \varepsilon^2 + \varepsilon\sqrt{3}}{1 + \varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{3}} = \frac{1}{2\pi} \lg \left(\frac{1 + \varepsilon^2 + \varepsilon\sqrt{3}}{1 + \varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{3}} \right)^{\frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon}}$$

Mit Hilfe der Binomischen Reihe erhält man:

$$\left(1 + \varepsilon^2 + \varepsilon\sqrt{3} \right)^{\frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{1!} + \frac{\sqrt{3}^2}{2!} + \frac{\sqrt{3}^3}{3!} + \dots$$

$$\left(1 + \varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{3} \right)^{\frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{1!} + \frac{\sqrt{3}^2}{2!} - \frac{\sqrt{3}^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{1}{2\pi} \lg \left(\frac{1 + \varepsilon^2 + \varepsilon\sqrt{3}}{1 + \varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{3}} \right)^{\frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon}} = \frac{1}{2\pi} \lg 31,9 = 0,4775$$

(Summe aus 9 Gliedern)

$$\frac{1}{\varphi} = 0,2735 + 0,1591 + 0,3182 + 0,4775 = 1,2283$$

$$\varphi = 0,81415 \text{ für } x = 0$$

4. Ueberfall mit scharfer Kante und 60° Wandneigung.

Für $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ist $x = 3$ d. h. $p = 3$ und $q = 1$. Unseren Berechnungen liegt aber die Bedingung zu Grunde, daß p stets gerad- und q ungeradzahlig sei. Um

UEBERFALLWANDNEIGUNG $a = 67,5^\circ \frac{\alpha}{\pi} = \frac{3}{8}$

$$\varphi \cdot x = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{(1+2^2)^{\frac{3}{2}} - 2^3}$$

$$\frac{1}{\varphi} - \frac{x}{\varepsilon} = 0,71114 + \{0,11256 (\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}) \lg \text{nat} \frac{\varepsilon^3 + 1 + 1,8478 \cdot \varepsilon^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon^3 + 1 - 1,8478 \cdot \varepsilon^{\frac{3}{2}}}\} + \{0,27173 (\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon) \lg \text{nat} \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}} + 1 - 0,7654 \cdot \varepsilon^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon^{\frac{3}{2}} + 1 + 0,7654 \cdot \varepsilon^{\frac{3}{2}}}\}$$

$$+ \{0,54347 (\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon) \text{arctg} \frac{0,2654 \cdot \varepsilon^{\frac{3}{2}}}{1 - \varepsilon^{\frac{3}{2}}}\} - \{0,2254 (\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon) \text{arctg} \frac{1,8478 \cdot \varepsilon^{\frac{3}{2}}}{1 - \varepsilon^{\frac{3}{2}}}\}$$

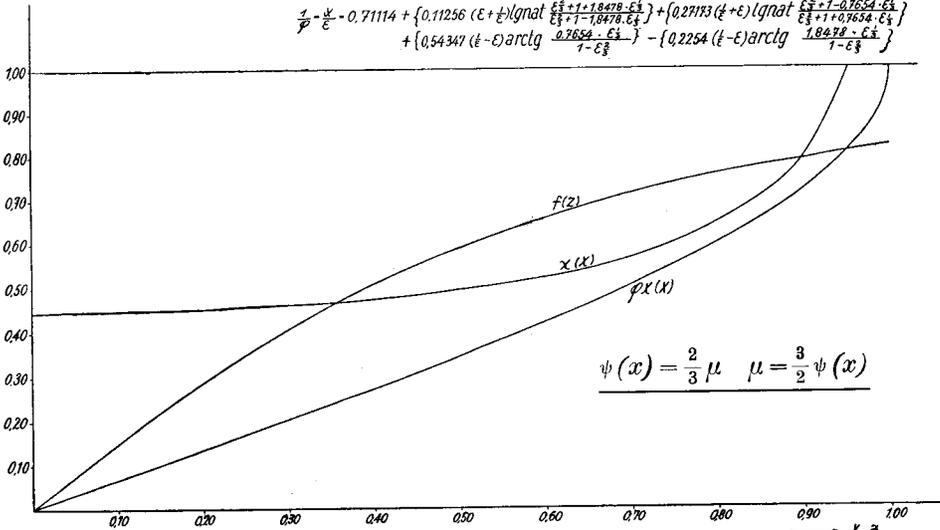


ABB. (16)

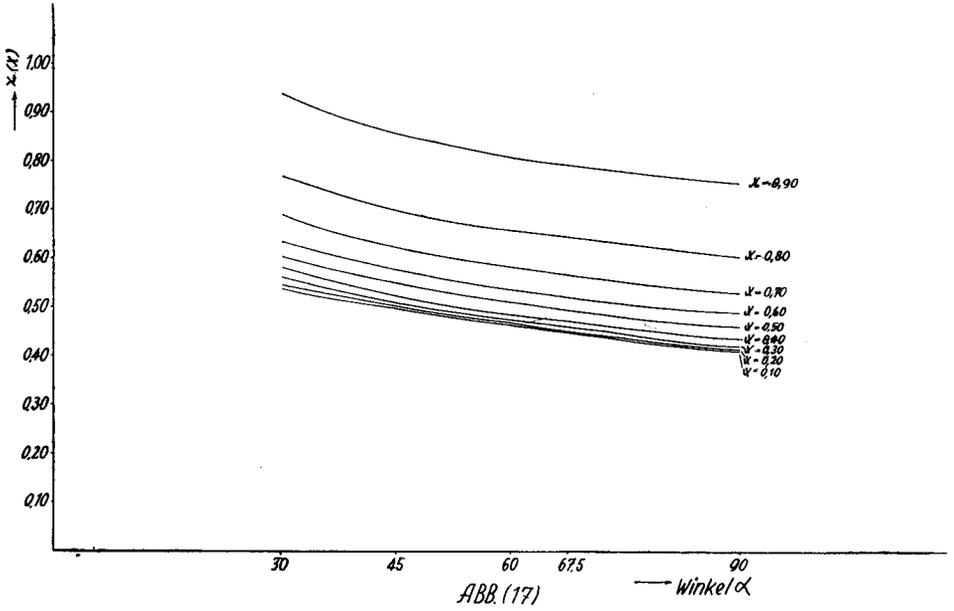


ABB. (17)

UEBERFALLWANDNEIGUNG $\alpha = 60^\circ$

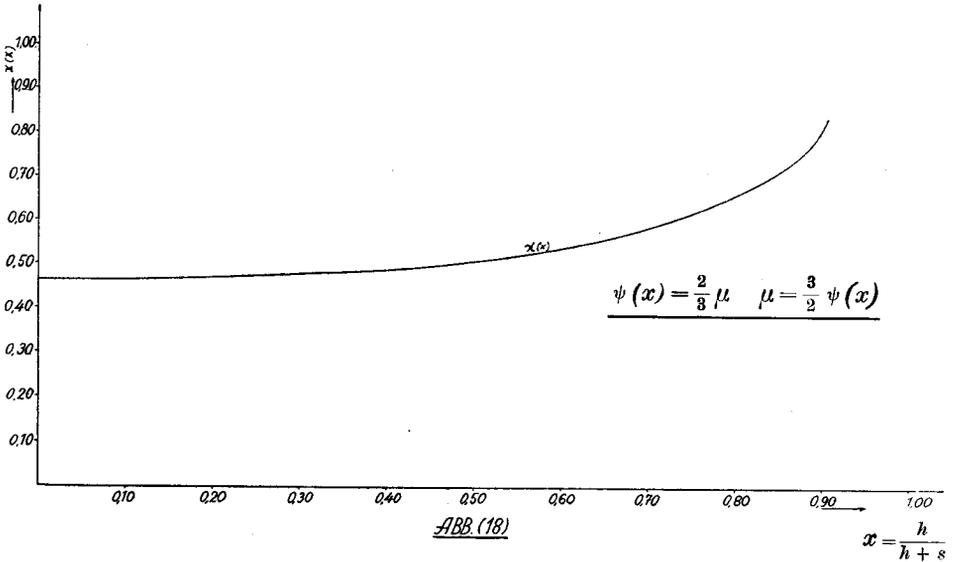


ABB. (18)

dieser Forderung Genüge zu leisten, nehmen wir für $\alpha = 67,5^\circ$ d.h. $p = 8$, $q = 3$; die Lösung der Aufgabe für $\alpha = 60^\circ$ erfolgt durch graphische Interpolation (siehe Abb. 17 und 18). Das Ergebnis für $\alpha = 67,5^\circ$ lautet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} &= 0,71114 + \left\{ 0,11256 \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \lg \frac{\varepsilon^{\frac{2}{3}} + 1 + 1,8478 \cdot \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{\varepsilon^{\frac{2}{3}} + 1 - 1,8478 \cdot \varepsilon^{\frac{1}{3}}} \right\} \\ &+ \left\{ 0,27173 \left(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \right) \lg \frac{\varepsilon^{\frac{2}{3}} + 1 - 0,7654 \cdot \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{\varepsilon^{\frac{2}{3}} + 1 + 0,7654 \cdot \varepsilon^{\frac{1}{3}}} \right\} \\ &+ \left\{ 0,54347 \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \operatorname{arctg} \frac{0,7654 \cdot \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{1 - \varepsilon^{\frac{2}{3}}} \right\} \\ &+ \left\{ 0,22511 \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \operatorname{arctg} \frac{1,8478 \cdot \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{1 - \varepsilon^{\frac{2}{3}}} \right\} \end{aligned}$$

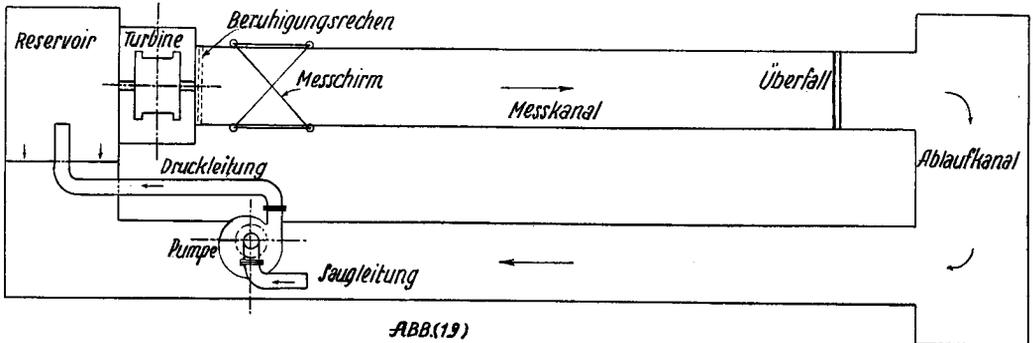
Siehe auch Zahlentafel (5) und Abb. (16).



II. Die Versuche.

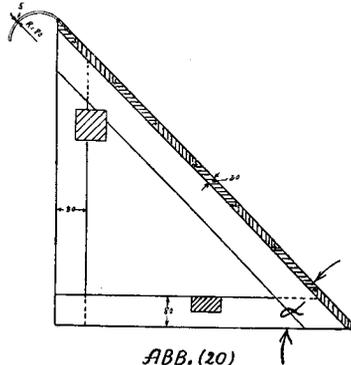
A. Die Versuchseinrichtung.

Skizze (19) zeigt die Versuchsanlage. Die Niederdruckpumpe nimmt das Wasser aus dem Ablaufkanal und fördert es in das Niederdruckreservoir. Im Reservoir ist ein Überfall eingebaut, über den bei ungleichmäßiger Förderung



bezw. verschiedener Entnahme der Wasserüberschuß in den Abflußkanal fließen kann. Wir haben daher gegenüber der Francisturbine ein konstantes Gefälle.

Vom Reservoir fließt das Wasser durch die genannte Turbine und gelangt in den Unterwasserkanal. Die Regulierung der Wassermenge erfolgt durch Verstellen des Leitapparates der Turbine.



Große Sorgfalt muß der Beruhigung des Unterwassers zugewendet werden, da bei stark schwankendem Wasserspiegel die Überfallhöhe nicht einwandfrei bestimmt werden kann. Auch bei der Schirmmessung bemerkt man, daß sich der Schirm den Wellen entsprechend ruckweise vorwärts bewegt.

Um diese Fehlerquellen möglichst auszuschalten, wurde am Einlauf in den Meßkanal ein feinverzweigter Beruhigungsrechen eingebaut. Die verschiedenen Wehrneigungen erhalten wir durch Einbau entsprechender Holzkeile.

Die Keile sind aus gut getrockneten und gehobelten Brettern hergestellt (siehe Abb. 20). Die abgerundete Wehrkante ist aus 5 mm dickem Blech hergestellt und hat einen Krümmungsradius von 80 mm. Bei den Versuchen mit scharfer Überfallkante wurde der Bogen durch Winkeleisen $125 \times 125 \times 5$ ersetzt.

B. Der Meßkanal.

Der Meßkanal im Maschinenlaboratorium der Eidg. Techn. Hochschule Zürich ist 14 m lang, 1 m breit und 1,6 m tief.

Will man in einem Kanal Wassermessungen mittels Überfall durchführen, so muß darauf geachtet werden, daß die Stechpegel mindestens in einem Abstand $L = 5 \times$ maximale Überfallhöhe oberhalb des Wehres angebracht werden.

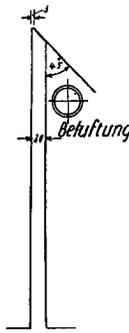


ABB. (21)

In der Nähe der Überfallkante nimmt nämlich die Wassergeschwindigkeit beim Stechpegel erheblich zu. Der Wasserspiegel erfährt infolgedessen eine Absenkung.

Versuche haben gezeigt, daß der Wasserspiegel in genannter Entfernung vom Wehr noch horizontal liegt, so daß die Überfallhöhen einwandfrei festgestellt werden können.

Die Kanalwände stehen senkrecht und verlaufen genau parallel zueinander. Die eiserne Wehrtafel steht senkrecht zur Kanalachse und ist fest in die Seitenwände einbetoniert.

Beim benützten Meßkanal ist die Wehrhöhe $h = 800$ mm so groß gewählt, daß sich selbst bei den größten Wassermengen ein vollkommener Überfall ausbildet, d. h. der Fuß des Strahles kann sich nach dem Überfall frei entwickeln. Der Luftraum zwischen Wehr und Strahl ist mit der Außenluft verbunden, damit auch dort Atmosphärendruck herrscht. Die Überfallkante entsprach der Abb. (21).

C. Die Messungen.

a) Messung der Überfallhöhe.

Die Überfallhöhen wurden 4 m oberhalb des Wehres mittels Stechpegel gemessen. Die Entfernung 4 m wurde gewählt, weil ich bei allen Versuchen

die Überfallhöhen am gleichen Ort bestimmen wollte. Der Versuch mit der 2 m breiten Wehrkrone bedingte diesen extremen Abstand von der normalen Wehrkante.

Die Überfallhöhen müssen mit äußerster Sorgfalt ermittelt werden, da $Q =$ Wassermenge mit $h^{3/2}$ wächst.

Bei großen Wassermengen war es trotz dem Rechen beim Kanaleinlauf nicht mehr möglich, den Wasserspiegel genügend zu beruhigen. Genaue Messungen mit dem Stechpegel waren daher unmöglich, und es mußte eine neue Einrichtung geschaffen werden. Aus Abb. (22) ist die neue Meßeinrichtung ersichtlich.

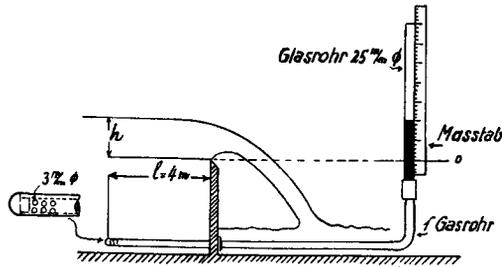


ABB. (22)

Bei der Festlegung des Nullpunktes beim neuen Maßstab wurde die molekulare Hubarbeit berücksichtigt. Nach Camerer (Vorlesung über Wasserkraftmaschinen 1914, Seite 37) beträgt dieselbe für ein Rohr von 25 mm Durchmesser 1,35 mm. Die wirkliche Überfallhöhe erhält man durch Subtraktion von 1,35 mm vom gemessenen Wert.

b) Messung der Wassergeschwindigkeit.

Die mittlere Wassergeschwindigkeit wurde mit Hilfe eines Meßschirmes bestimmt.

Dipl. Ing. v. Mann hat im Jahre 1920 verschiedene Versuche mit Meßschirmen durchgeführt. Die Versuche galten speziell der Ermittlung des Fahrwiderstandes und der Wirkung des Schirmspaltes. Aus den Versuchsergebnissen sei wiederholt:

1. Die Einführung des Meßschirmes in den Kanal verursacht eine Störung im Meßgerinne.
2. Im Spalt zwischen Schirm und Kanalwand treten Sekundärströmungen auf; diese sind teils mit, teils gegen den Schirm gerichtet. Die Übereinstimmung zwischen gemessener Wassermenge Q_r und der tatsächlichen Q_t hängt nur vom Ausgleich dieser Sekundärströmungen ab.
3. Aus den Versuchen leitete Mann folgende Formel ab:

$$Q_t = Q_r \left\{ 1 + 0,067 \left[10,7 \left(\frac{0,006}{c} + 0,024 \right) \sqrt{P} - 0,4 \right] \right\}$$

c = mittlere Wassergeschwindigkeit.

P = Fahrwiderstand.

Für \sqrt{P} ist nur das positive Zeichen zu nehmen.

4. An Hand dieser Formel läßt sich innerhalb der bei den Versuchen beobachteten Genauigkeit die wirkliche Wassermenge ermitteln.
5. Der Zusammenhang der tatsächlichen Wassermenge Q_t mit dem zugehörigen Fahrwiderstand läßt vermuten, daß jede Meßschirmeinrichtung nur für eine bestimmte Wassermenge richtige Werte liefert.

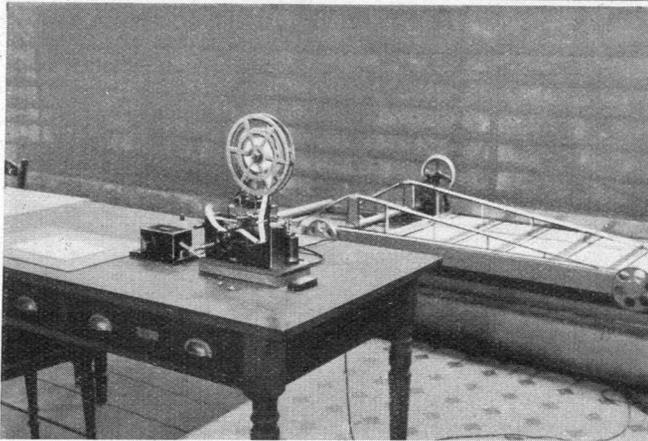
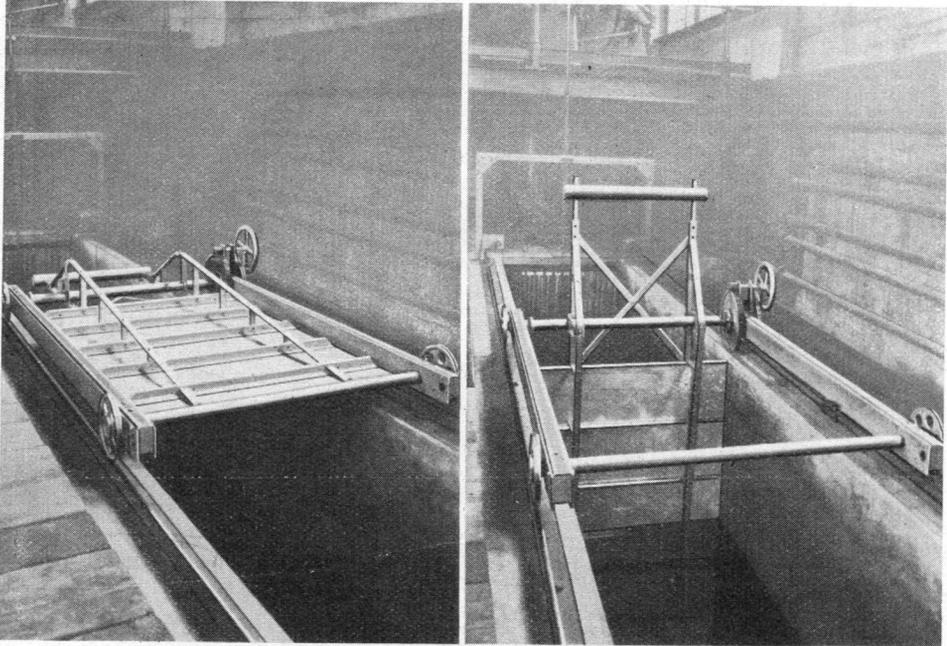


Abb. (23 u. 24)

Dipl.-Ing. v. Mann hat durch Vergleich der Schirmmessung mit den Überfallmessungen nach den Formeln von Frese und Rehbock bewiesen, daß obige Vermutung in Wirklichkeit nicht genau zutrifft. Die relativen Abweichungen der Schirmmessung in bezug auf die Überfallmessung betragen ca. $\pm 1\%$. Für unsere Versuche wurde daher angenommen, daß die aus der Schirmmessung

ermittelte Wassermenge der Wirklichkeit entspricht, da es sich ja in erster Linie um relative Werte handelt.

Abb. (23) zeigt uns die konstruktive Ausführung des Meßschirmes und den dazu gehörigen Wagen. Die beiden Rahmen sind durch Rohrstreben verbunden. Um den Fahrwiderstand möglichst klein zu halten, sind in alle Räder Kugellager eingebaut. Auf der einen Wagenseite sind die Räder mit einem Spurkranz versehen, der zur Führung des Wagens dient.

Mit Hilfe eines A. Ott-Chronographen (Abb. 24) wird die Fahrzeit des Schirmes über die Meßstrecke registriert. Der Papierstreifen wird mittels eines Uhrwerkes gleichförmig abgerollt. Die Aufzeichnung der Zeit erfolgt von der Mutteruhr aus durch elektromagnetisch bewegte Schreiber. Eine Blattfeder greift in ein von einem Uhrwerk angetriebenes Zahnrad. Die Schwingungszeit der Feder ist so abgestimmt, daß sich das Zahnrad während einer Schwingung gerade um einen Zahn weiter dreht.

D. Die Durchführung der Versuche.

Bei der vorhandenen Versuchsanlage konnte das Wasser nicht direkt vom Niederdruckreservoir in den Meßkanal geleitet werden, sondern man muß es durch die Turbine fließen lassen. Um einen gleichmäßigen Wasserdurchgang zu erhalten, wurde die Turbine festgebremst. Durch Verstellen der Leitschaufeln wurde die Wassermenge von $6 \div 600$ Lit./sec. variiert. Bei jeder Messung mußte ca. 20 \div 30 Minuten gewartet werden, bis die Strömung im Kanal stationär war. Für eine und dieselbe Wassermenge wurden fünf Schirm- und zehn Überfallmessungen gemacht. Bei den ganz kleinen Wassermengen stellte sich der Beharrungszustand sehr langsam ein. Ferner war die Strömungsgeschwindigkeit so klein, daß aus Zeitmangel nur noch je drei Messungen gemacht werden konnten.

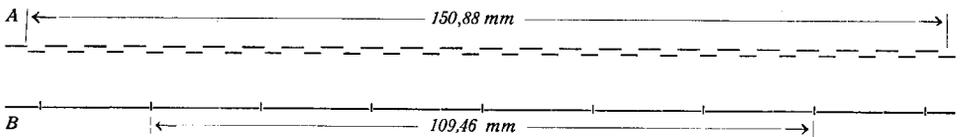


Abb. (25)

Als Abb. (25) ist ein Stück eines Chronographenstreifens beigelegt. Darauf bedeutet der obere Linienzug A die Zeit und der untere B den Schirmweg. Auf dem Zeitdiagramm entspricht die Strecke zwischen zwei Marken einer Sekunde. Die Marken auf B entsprechen den in Abständen von 1 m längs des Kanals angebrachten Kontakten.

Vorerst haben wir die Papiergeschwindigkeit zu bestimmen. 30 Sekunden entsprechen z. B. 150,88 mm, d. h.

$$1 \text{ sec} = 5,029 \text{ mm.}$$

Der vom Schirmwagen zurückgelegte Weg $L = 8$ m ist auf dem Chronographenstreifen durch 109,46 mm wiedergegeben. Die Fahrzeit für 8 m ist daher

$$t = \frac{109,46}{5,029} = 21,8 \text{ sec.}$$

oder die mittlere Wassergeschwindigkeit

$$c = \frac{L}{t} = \frac{8}{21,8} = 0,3669 \text{ m/sec.}$$

E. Genauigkeit der Messungen.

a) Jede Messung, die auf Grund von Beobachtungen gemacht wird, ist mit Fehlern behaftet. Um die Meßfehler möglichst klein zu halten, ist man schon früh dazu übergegangen, die endgültigen Rechnungen nur für einen aus vielen Ablesungen bestimmten Mittelwert durchzuführen.

Bei den Messungen müssen drei Fehlerarten unterschieden werden:

1. Grobe Fehler;
2. konstante oder systematische Fehler.

Diese Fehler haften allen Beobachtungen mit demselben Wert und Sinn an. Ihre Ursache ist z. B. im benützten Instrument oder in anderen während des Versuches konstant wirkenden Einflüssen zu suchen.

3. Zufällige Fehler; individuelle Fehler.

Diese werden von unregelmäßig wirkenden Einflüssen, z. B. momentanen Erschütterungen etc. verursacht.

Die wahrscheinlichste Wassermenge erhalten wir nach der Methode der kleinsten Quadrate von Gauß. Durch diese Fehlerrechnung werden aber nur die zufälligen individuellen Fehler ausgemerzt.

Wie in Abschnitt *Ca* angegeben wurde, mußte bei großen Wassermengen die Messung mittels Kapillare durchgeführt werden. Dabei muß beachtet werden, daß es sich beim Schwanken der Überfallhöhen um Schwingungen handelt, deren Frequenz und Amplitude je nach der Überfallhöhe verschieden sind. In diesem Fall ist für eine und dieselbe Wassermenge die Ableseperiode so zu wählen, daß die Meßpunkte möglichst über eine ganze Schwingung verteilt sind.

Um ein Bild von der Gleichmäßigkeit der Ablesungen der Überfallhöhen zu erhalten, wurden im Laufe der Versuche mehrmals für Gruppen von 10 Ablesungen die mittleren Abweichungen der Einzelmessung nach der Gauß'schen Methode errechnet.

Ein Berechnungsbeispiel für diese mittleren Abweichungen findet sich in der Tabelle (6).

Es bedeuten:

v = Abweichung der Gruppenmittelwerte vom Gesamtmittelwert

$$\frac{\sum h}{10}$$

$[v \cdot v]$ = das Quadrat der Abweichungen

$\sum [v \cdot v]$ = Summe der Quadrate.

Die mittlere Abweichung der Gruppenmittelwerte h ist dann mit $n = 10$ Gruppenmittelwerten

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{\sum [v \cdot v]}{n - 1}}$$

Tabelle (6).

Gruppenmittelwert h mm	Abweichung mm	$v \cdot v$
310,7	0,43	0,1849
310,2	0,07	0,0049
310,1	0,17	0,0289
310,0	0,27	0,0729
310,2	0,07	0,0049
310,8	0,53	0,2809
310,0	0,27	0,0729
310,2	0,07	0,0049
310,0	0,27	0,0729
310,5	0,23	0,0529

$$\Sigma = (3102,7)$$

$$\Sigma = (0,781)$$

$$\text{Mittel} = 310,27$$

$$\therefore \varepsilon = \pm \sqrt{\frac{0,781}{10-1}} = \pm 0,294 \text{ mm}$$

Das entspricht:

$$\frac{0,294}{310,27} = 0,095 \%$$

b) Genauigkeit des Meßschirmes.

Der kleinste Fahrwiderstand des Schirmwagens wurde einmal zu 0,235 kg bestimmt. Für den kleinen Meßbereich, innerhalb welchem die Kontrolle der Genauigkeit durchgeführt wird, wird derselbe als konstant angenommen. Der Luftwiderstand kann ohne weiteres vernachlässigt werden.

Wir untersuchen nun, inwiefern dieser Widerstand die gemessene Wassermenge beeinflusst.

Die Kraft zur Überwindung des Fahrwiderstandes erzeugt hinter dem Meßschirm eine Drucksteigerung, welche der Niveaudifferenz zwischen Vorder- und Hinterwasserspiegel entspricht.

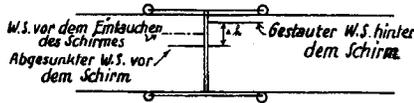


ABB. (26)

Bezeichnet: Abb. (26)

Δh in m die Höhe der Druckdifferenz

h = Wassertiefe vor dem Schirm.

$h + \Delta h$ = Wassertiefe hinter dem Schirm.

$b_1 + h_1$ in m = Breite bzw. Höhe des vom Wasser benetzten Schirmrechtecks F_1

γ = spez. Gewicht,

so ist der auf den Schirm wirkende Druck für die Vorderseite:

$$P_1 = F_1 \cdot \gamma \frac{h_1}{2} = b_1 h_1 \cdot \gamma \cdot \frac{h_1}{2}$$

$$\text{Hinterseite: } P_2 = F_2 \cdot \gamma \frac{h_1 + \Delta h}{2} = b_1 (h_1 + \Delta h) \cdot \gamma \frac{h_1 + \Delta h}{2}$$

somit die Differenz d. h. der dem Fahrwiderstand entsprechende resultierende Druck

$$P = \frac{b_1 \cdot \gamma}{2} \cdot \left\{ (h_1 + \Delta h)^2 - h_1^2 \right\}$$

oder bei Vernachlässigung der kleinen Größe Δh^2

$$P = b_1 h_1 \cdot \Delta h \cdot 1000$$

$$P = \text{kg.}$$

b_1, h_1 und Δh in m

Rechnungsbeispiel:

Überfallhöhe $h = 10$ mm

$$\Delta h = \frac{P}{b_1 \cdot h_1 \cdot 1000}$$

$$\Delta h = \frac{235}{80,7 \cdot 99,4} = 0,293 \text{ mm}$$

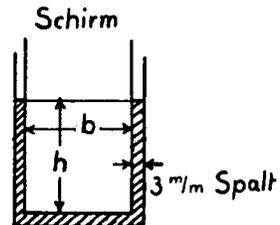
Die Geschwindigkeit ist:

$$C = \sqrt{2g \Delta h} = 44,3 \sqrt{0,0286} = 75,7 \text{ mm/sec.}$$

Bei 10 mm Überfallhöhe ist $Q \approx 0,6$ Lit./sec.

Schraffierte Fläche = $2,62 \cdot 0,003 = 0,00786 \text{ m}^2$

$$Q = 0,00786 \cdot 0,0757 = 0,000595 \text{ m}^3/\text{sec.} = 0,595 \text{ Lit./sec.}$$



Der Meßfehler ist daher

$$100 \cdot \frac{0,600 - 0,595}{0,600} = 0,833 \%$$

c. *Ausgleichsrechnung nach Gauß.* (Methode der kleinsten Quadrate.)

In folgendem bedeutet:

h = Überfallhöhe in cm

Q = Wassermenge in Lit./sec

s = Wehrhöhe in cm

B = Breite des Meßkanals in cm an der Stelle, wo h gemessen wird

$H = s + h$ = totale Wassertiefe vor dem Überfall in cm

c = mittlere Wassergeschwindigkeit im Meßkanal

g = Erdbeschleunigung

μ = Überfallkoeffizient

Wir haben:

$$Q = \frac{2}{3} \mu \cdot B \cdot \sqrt{2g} \cdot h^{\frac{3}{2}}$$

Es sei:

$$y = \frac{Q}{\sqrt{\left(h + \frac{c^2}{2g}\right) 2g}}; \quad x = h + \frac{c^2}{2g}$$

$$\therefore y = \frac{Q}{\sqrt{2gx}}$$

Man berechnet nun für jeden Meßpunkt die Werte x und y und trägt y als Funktion von x auf. Das Ergebnis ist das, daß sich aus den Versuchen eine lineare Funktion für y ergibt.

$$y = \alpha + \beta x$$

$$y_1 = \alpha + \beta x_1$$

$$y_2 = \alpha + \beta x_2$$

$$y_n = \alpha + \beta x_n$$

oder

$$(y_1 - \alpha - \beta x_1)^2 = (\varepsilon_1)^2$$

$$(y_2 - \alpha - \beta x_2)^2 = (\varepsilon_2)^2$$

$$(y_n - \alpha - \beta x_n)^2 = (\varepsilon_n)^2$$

Damit der Fehler ein Minimum ist, muß

$$\frac{\partial \sum_1^n (\varepsilon_i)^2}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sum_1^n (\varepsilon_i)^2}{\partial \beta} = 0$$

Auf diese Weise berechnet man α und β . Sind α und β bestimmt, so können wir Q aus folgender Beziehung errechnen:

$$Q = \left\{ \alpha + \beta \left(h + \frac{c^2}{2g} \right) \right\} \cdot \sqrt{2g \left(h + \frac{c^2}{2g} \right)}$$

und

$$Q = c \cdot B \cdot H$$

In erster Annäherung kann die Gleichung vereinfacht werden, da $\frac{c^2}{2g}$ gegenüber h meistens sehr klein bleibt.

Die Wassermenge ist dann

$$Q = (a + \beta h) \sqrt{2g h}$$

Mit Hilfe der aus obiger Formel ermittelten Wassermenge kann man dann die Geschwindigkeit $c = \frac{Q}{H \cdot B}$ und daraus die korrigierte Wassermenge berechnen.

Die ausgeglichenen μ - und Q -Werte sind in Funktion der Überfallhöhe graphisch aufgetragen. Abb. (27, 28, 29, 30, 31), Zahlentafel (7)

III. Versuchsergebnisse und Diskussion.

Die Abbildungen (32, 33, 34, 35, 36) zeigen uns die graphische Darstellung der aus den Versuchen ermittelten μ -Werte für verschiedene Wehrformen in Abhängigkeit von der Überfallhöhe (Zahlentafel 8—17)

Ein Vergleich der μ -Werte für verschiedene Wehrneigungen bei gleichbleibender Überfallhöhe zeigt uns den auffallend großen Einfluß ersterer auf den Überfallkoeffizienten Abb. (42 und 43). Aus den Kurven ist ersichtlich, daß μ für den Überfall mit geneigter Wehrtafel wesentlich größer ist als bei senkrechtem Wehr. Dieses läßt sich nur dadurch erklären, daß die Strömung von der Wehrkante infolge der geneigten Wehrtafel bedeutend einfacher ist als beim senkrechten Wehr, wodurch die Verluste wegen der Stahlkontraktion kleiner werden.

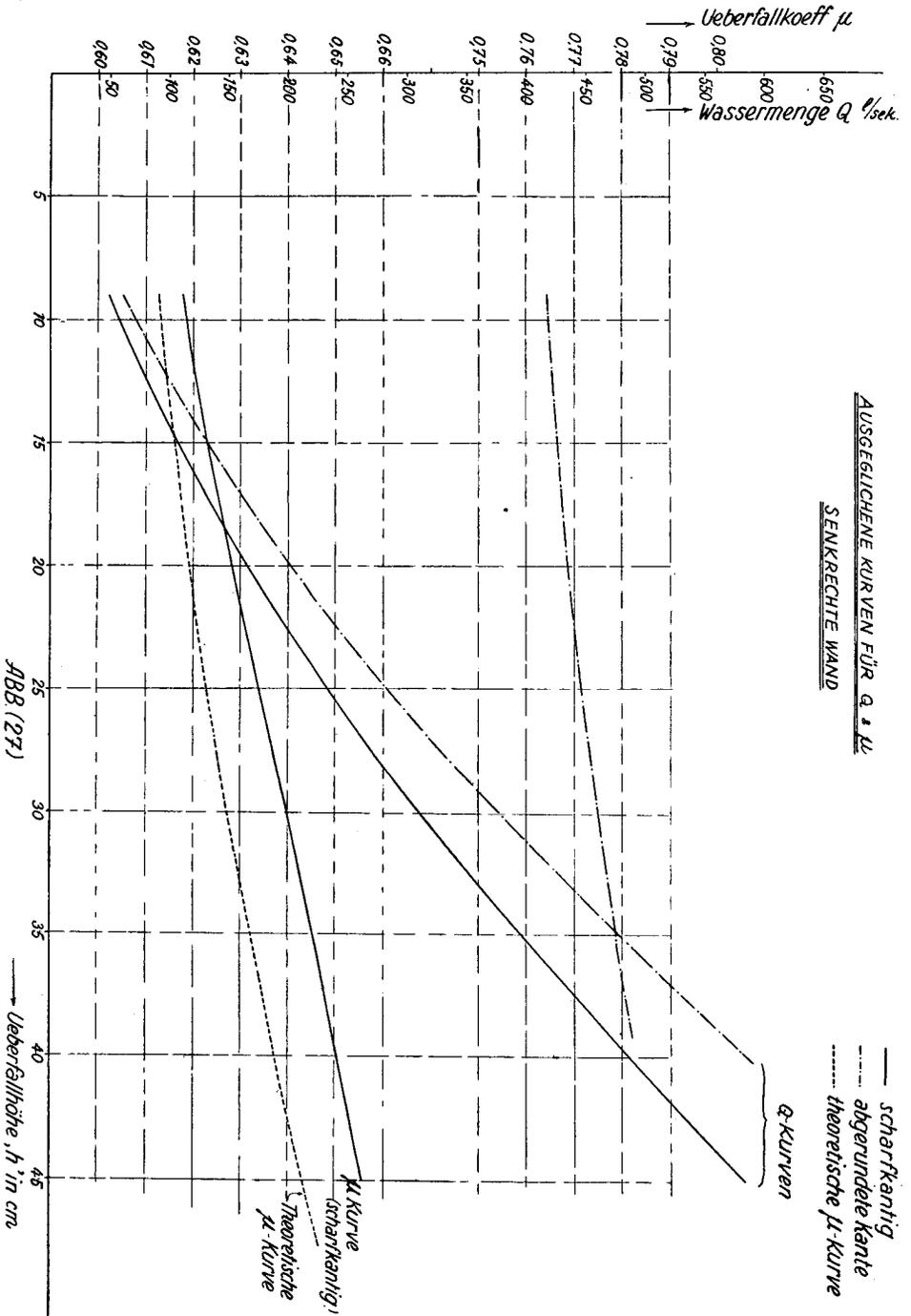
Analoge Werte liefert ein Vergleich der Messungen mit scharfkantigen und abgerundeten Wehrkronen. Über ein Wehr mit abgerundeter Krone fließt bei gleicher Überfallhöhe mehr Wasser als über ein solches mit scharfer Kante.

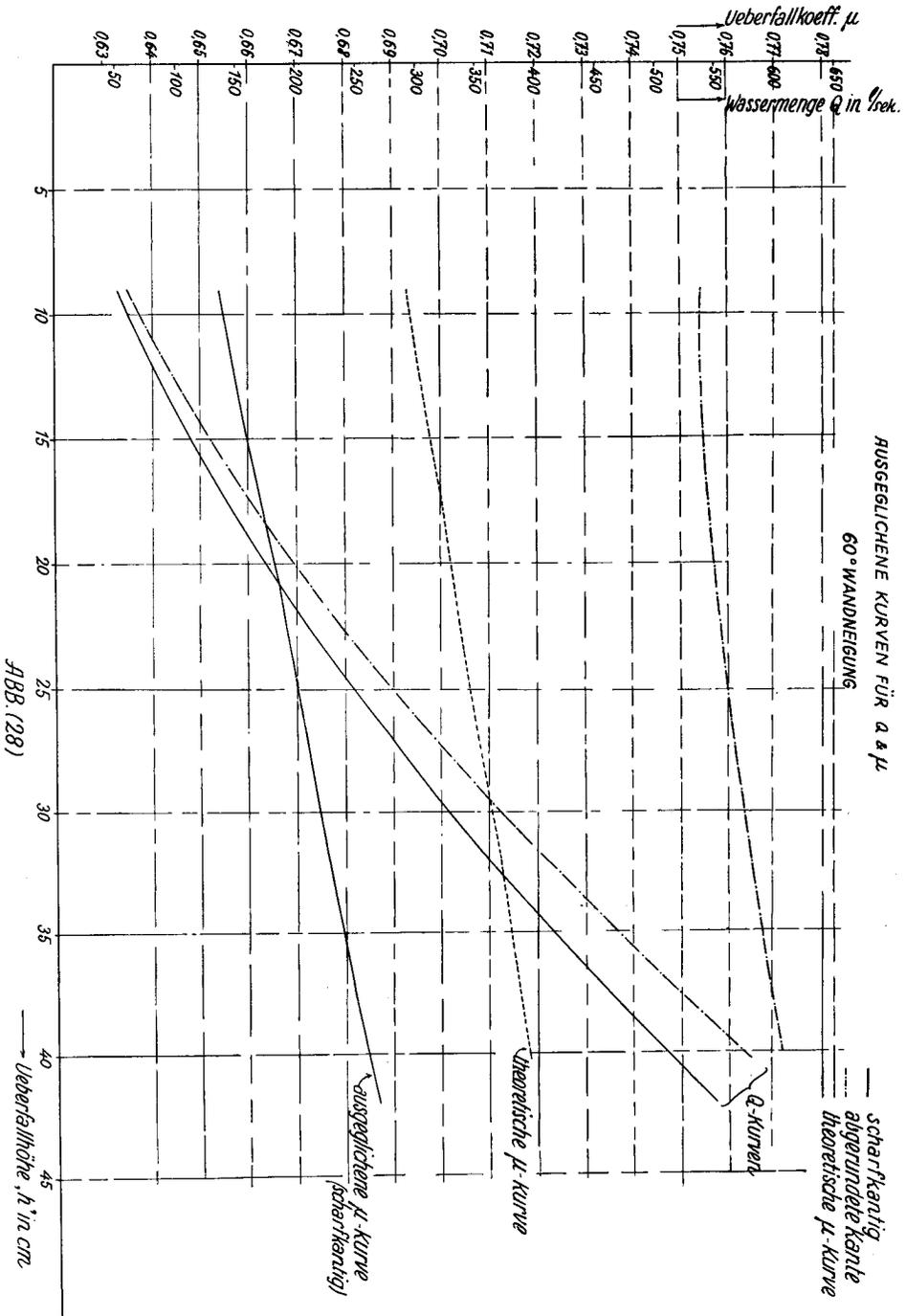
Längs der abgerundeten Wehrkante haftet das Wasser, d. h. die Strahlkontraktion wird vermindert. Die scharfe Kante dagegen begünstigt die Strahlablösung, wodurch die Strahlkontraktion erhöht und μ verkleinert wird.

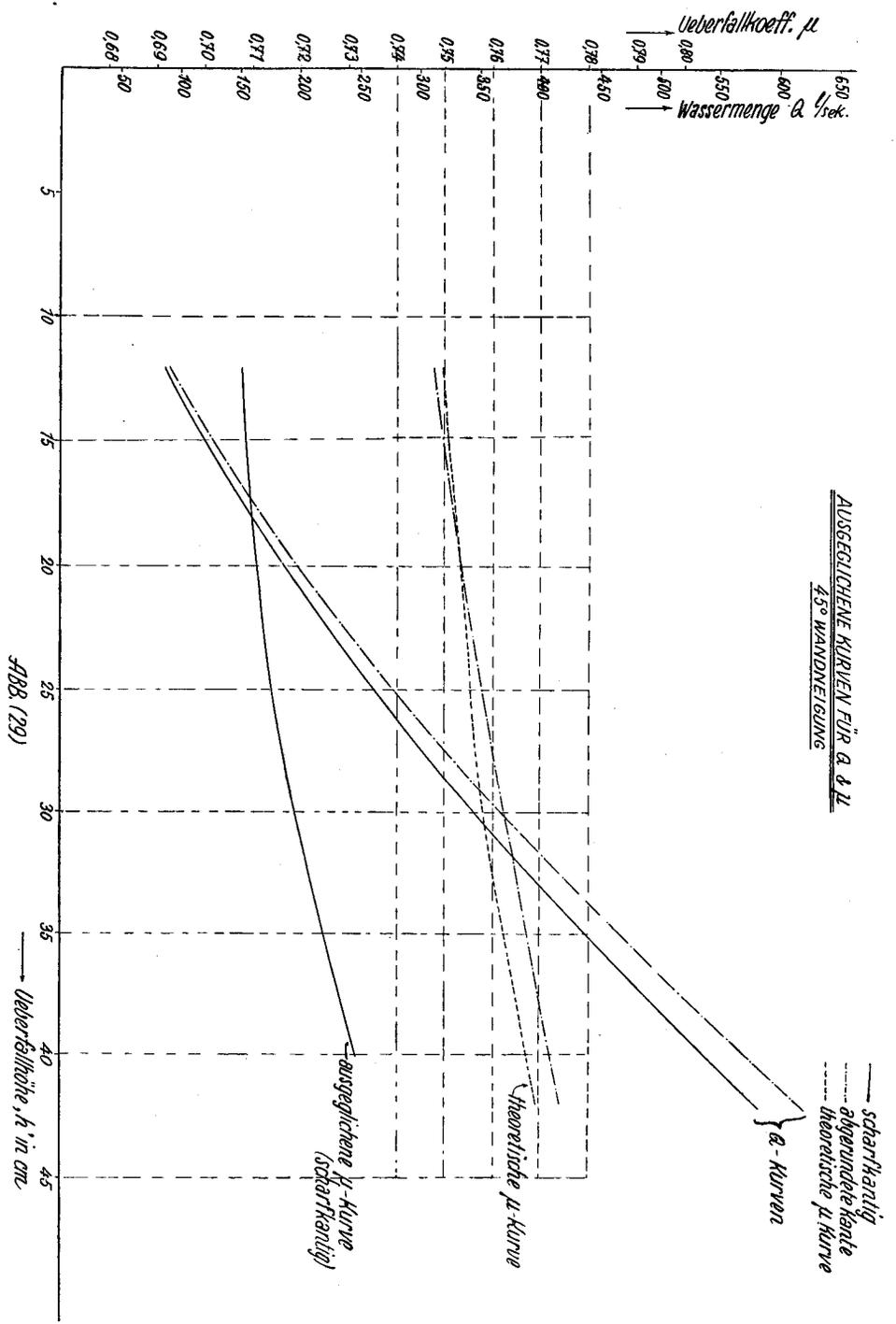
Es muß aber beigefügt werden, daß μ nur bis zu einer bestimmten Minimalneigung zunimmt und nachher wieder kleiner wird.

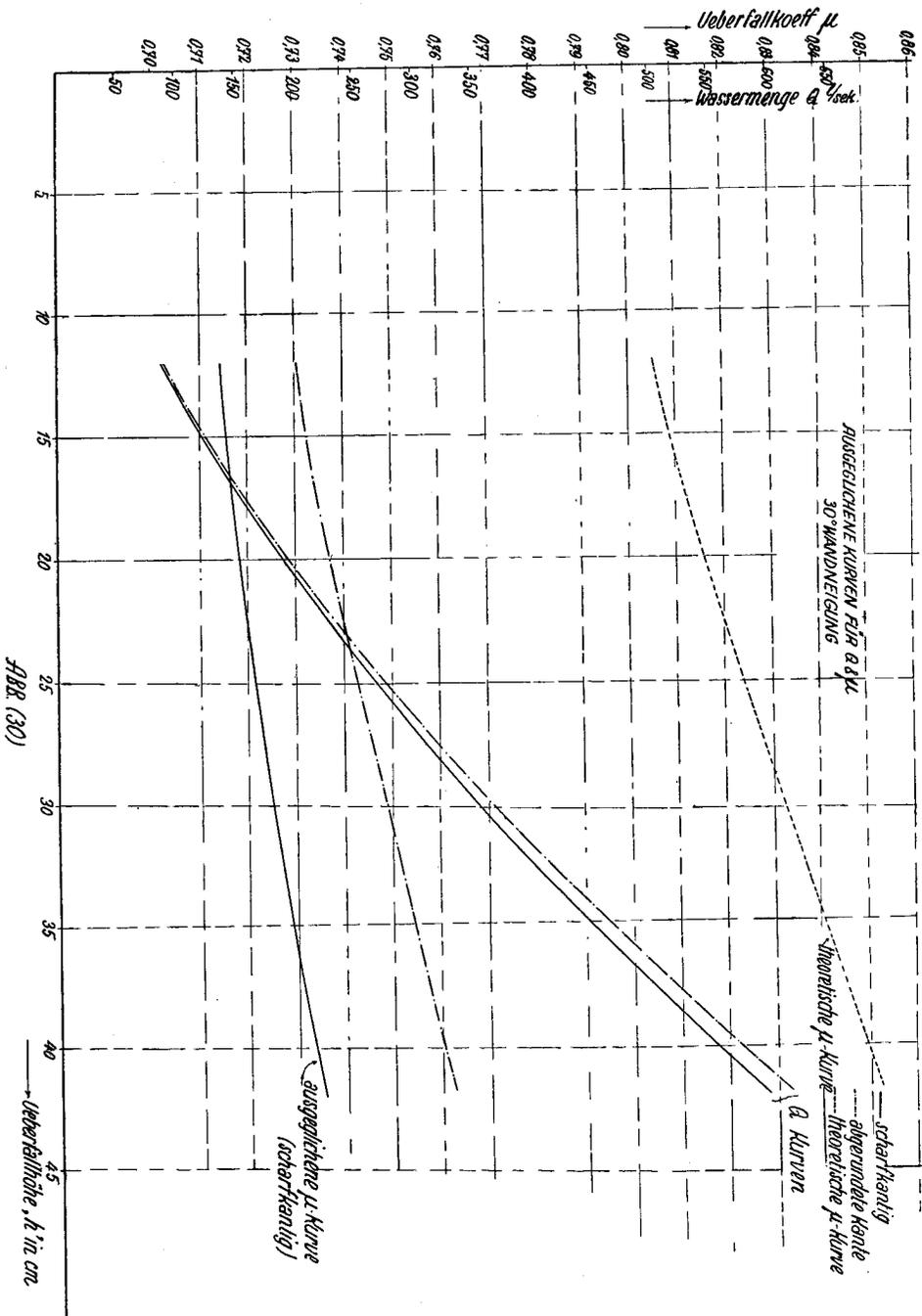
Im Grenzfall für Neigung gleich Null und sehr breiter Wehrkrone ergibt sich für μ ein Minimalwert. In diesem Fall stellt sich über der Wehrkrone eine kritische Wasserhöhe ein. Dieser entspricht natürlich die größte Geschwindigkeit. Die Reibungsverluste werden ein Maximum, was zur Folge hat, daß ein solcher Meßüberfall die minimale Wassermenge liefert.

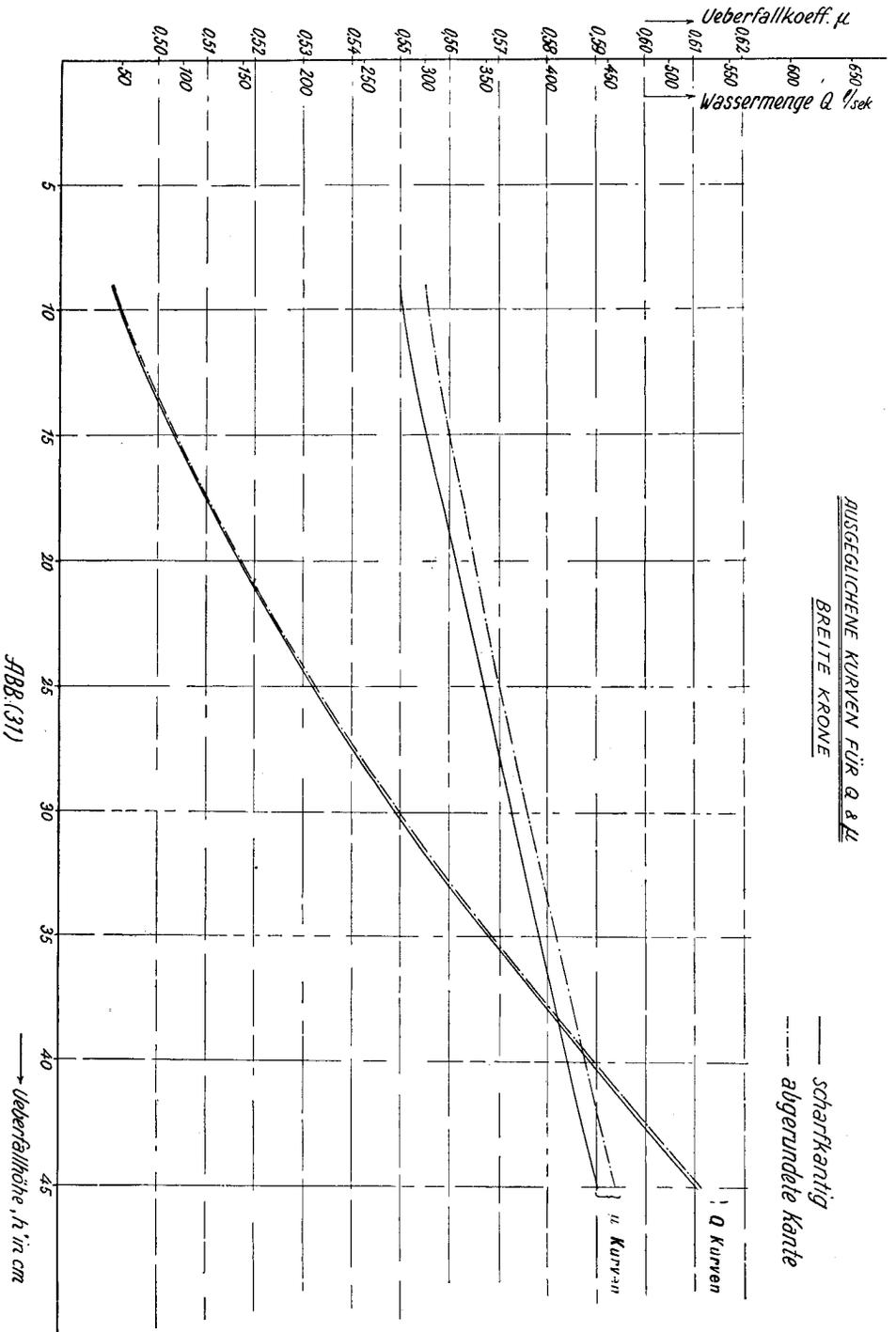
Für scharfkantige, geneigte Überfälle nimmt μ für 30° Wehrneigung den größten Wert an. Bei abgerundeten Wehren wird das günstigste μ bei senkrechter Wand erreicht.





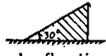
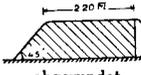
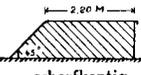


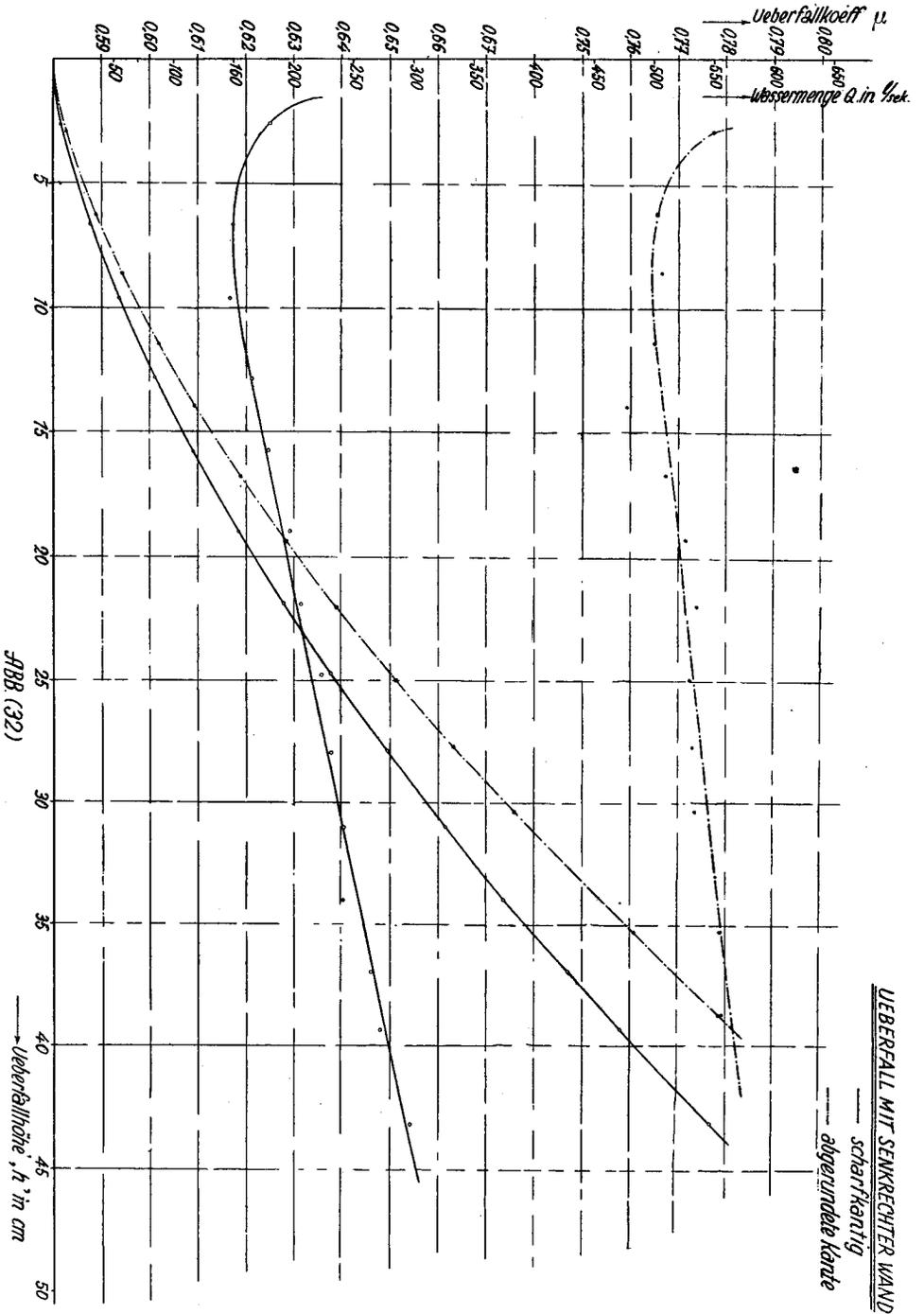


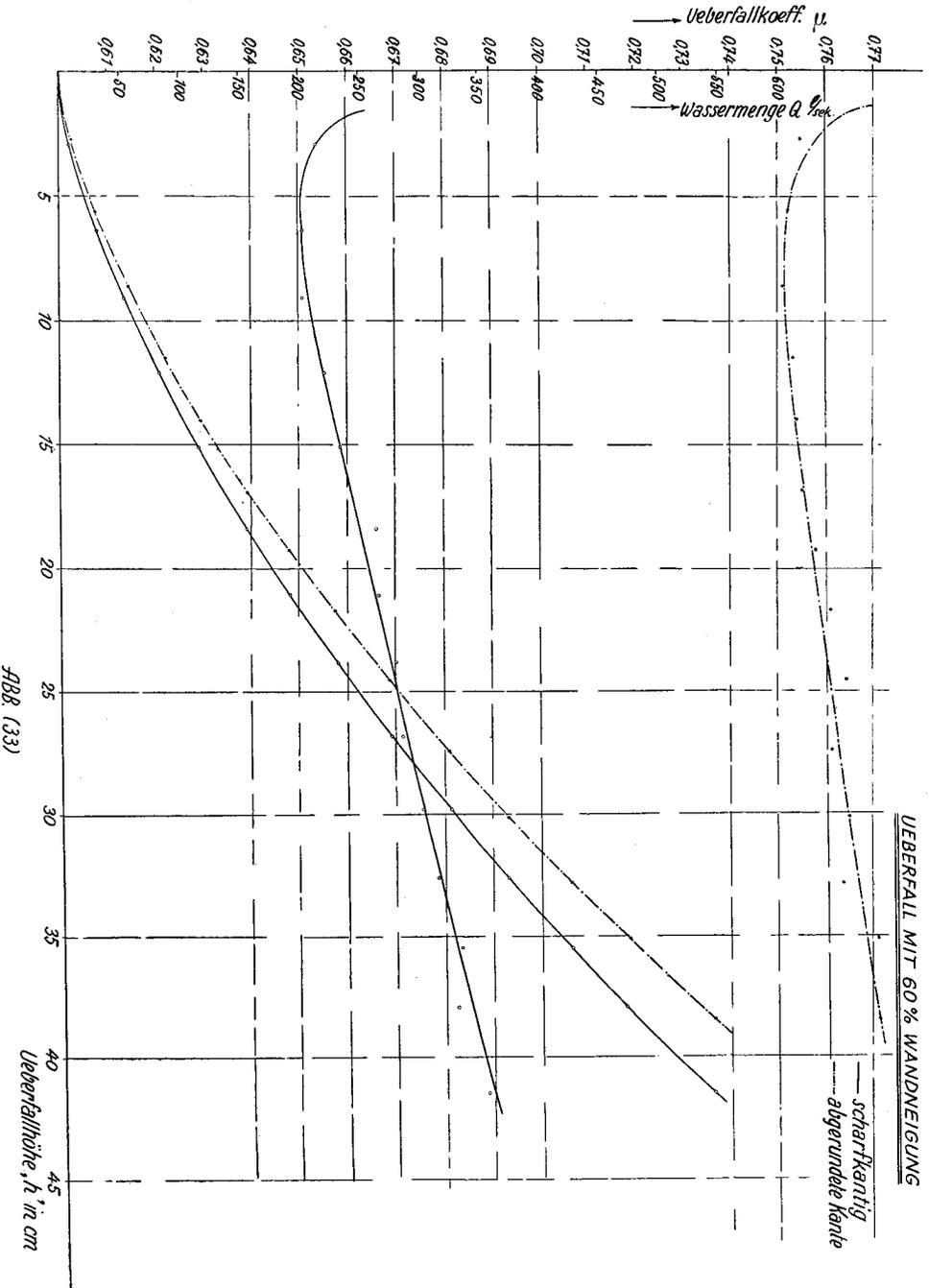


Zahlentafel 7.

Ausgegliche Q und μ -Werte.

h cm	1. Versuch		2. Versuch		3. Versuch		4. Versuch		5. Versuch	
	 scharfkantig	μ	 abgerundet	μ	 abgerundet	μ	 scharfkantig	μ	 abgerundet	μ
	Q l/s	μ	Q l/s	μ	Q l/s	μ	Q l/s	μ	Q l/s	μ
9	49,28	0,6180	60,96	0,7645	60,14	0,7543	52,15	0,654		
12	76,17	0,6203	94,01	0,7655	92,70	0,7549	80,68	0,657	89,71	0,7305
15	106,90	0,6230	131,55	0,7667	129,63	0,7555	113,25	0,660	125,70	0,7325
18	141,32	0,6265	173,10	0,7675	170,63	0,7565	149,67	0,6635	165,80	0,7351
21	178,9	0,6295	218,68	0,7695	215,4	0,7580	189,43	0,6665	209,93	0,7387
24	219,85	0,6330	267,75	0,7710	263,80	0,7595	232,52	0,66955	257,75	0,7422
27	263,73	0,6365	320,30	0,7730	315,50	0,7615	278,65	0,6725	309,0	0,7458
30	310,61	0,6400	376,40	0,7755	370,80	0,7640	327,73	0,6752	363,53	0,7490
33	359,81	0,6430	435,10	0,7775	428,65	0,7660	379,60	0,6784	421,24	0,7527
36	412,4	0,6465	497,25	0,7795	489,90	0,7680	434,35	0,68095	482,15	0,7558
39	476,15	0,6495	562,45	0,7820	554,15	0,7705	491,60	0,6836	546,0	0,7592
42	524,38	0,6525					552,10	0,6870	612,80	0,7626
45	583,75	0,6550								
h cm	6. Versuch		7. Versuch		8. Versuch		9. Versuch		10. Versuch	
	 scharfkantig	μ	 abgerundet	μ	 scharfkantig	μ	 abgerundet	μ	 scharfkantig	μ
	Q l/s	μ	Q l/s	μ	Q l/s	μ	Q l/s	μ	Q l/s	μ
9							43,90	0,5550	43,86	0,550
12	87,75	0,7146	91,84	0,7480	86,91	0,7078	68,46	0,5575	65,79	0,5520
15	122,82	0,7158	128,71	0,7501	121,61	0,7088	96,17	0,5605	95,32	0,5555
18	161,77	0,7172	169,70	0,7524	160,22	0,7103	127,12	0,5635	126,20	0,5595
21	204,31	0,7189	214,52	0,7549	202,30	0,7119	161,0	0,5665	160,0	0,5630
24	250,31	0,7208	263,0	0,7574	247,88	0,7138	197,78	0,5695	196,74	0,5665
27	299,59	0,7231	314,96	0,7602	296,67	0,7160	237,40	0,5730	236,18	0,570
30	351,95	0,7252	370,24	0,7629	348,50	0,7181	279,81	0,5765	278,12	0,5730
33	406,40	0,7275	428,90	0,7665	403,35	0,7208	324,60	0,580	322,75	0,5767
36	465,71	0,7301	490,50	0,7690	461,12	0,7229	372,25	0,5835	370,10	0,5802
39	526,90	0,7326	555,10	0,7719	521,70	0,7254	422,20	0,5870	419,90	0,5838
42	590,86	0,7353	622,8	0,7750	584,97	0,7279	474,50	0,5905	471,70	0,5870
45							529,85	0,5945	526,30	0,5905





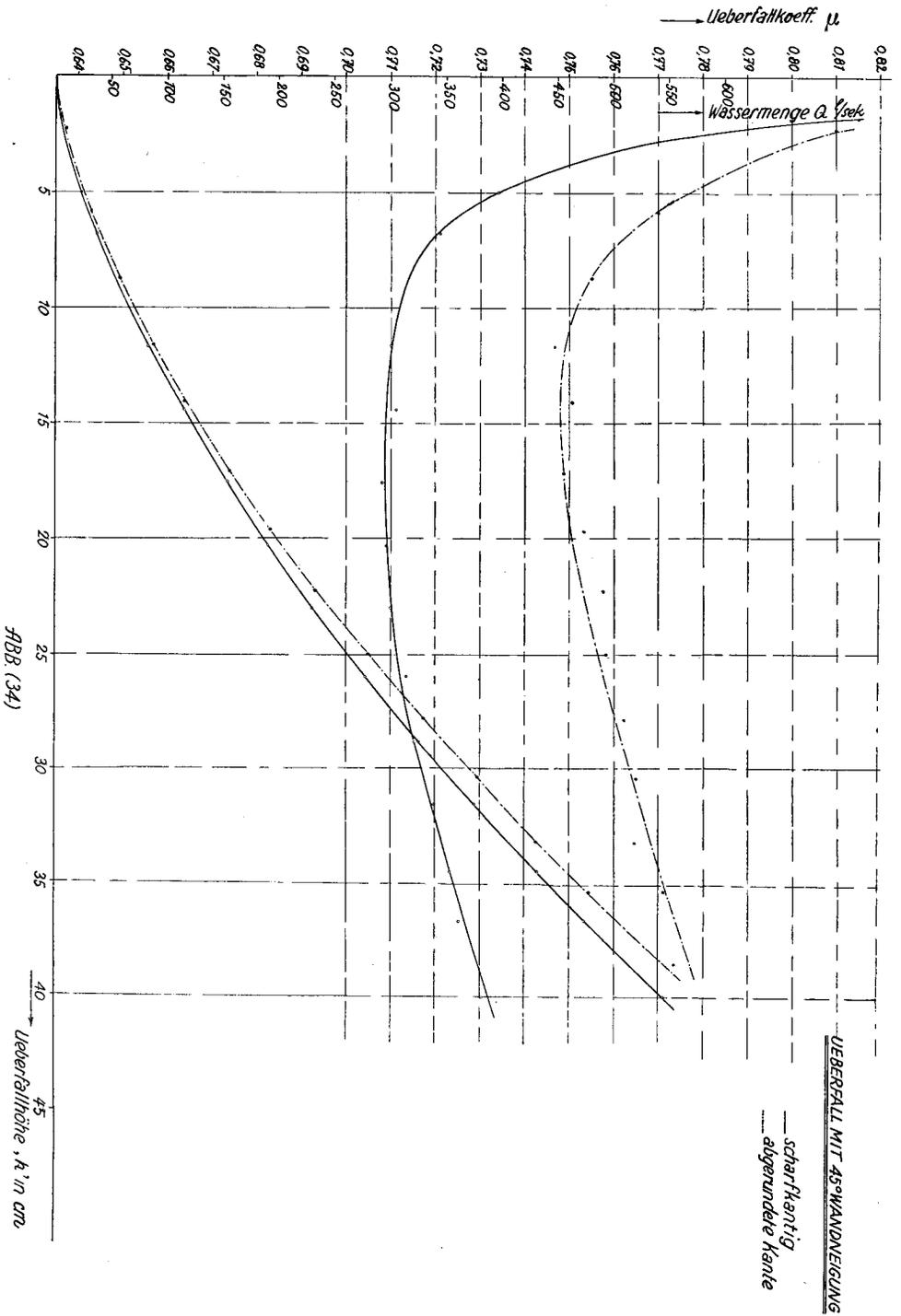
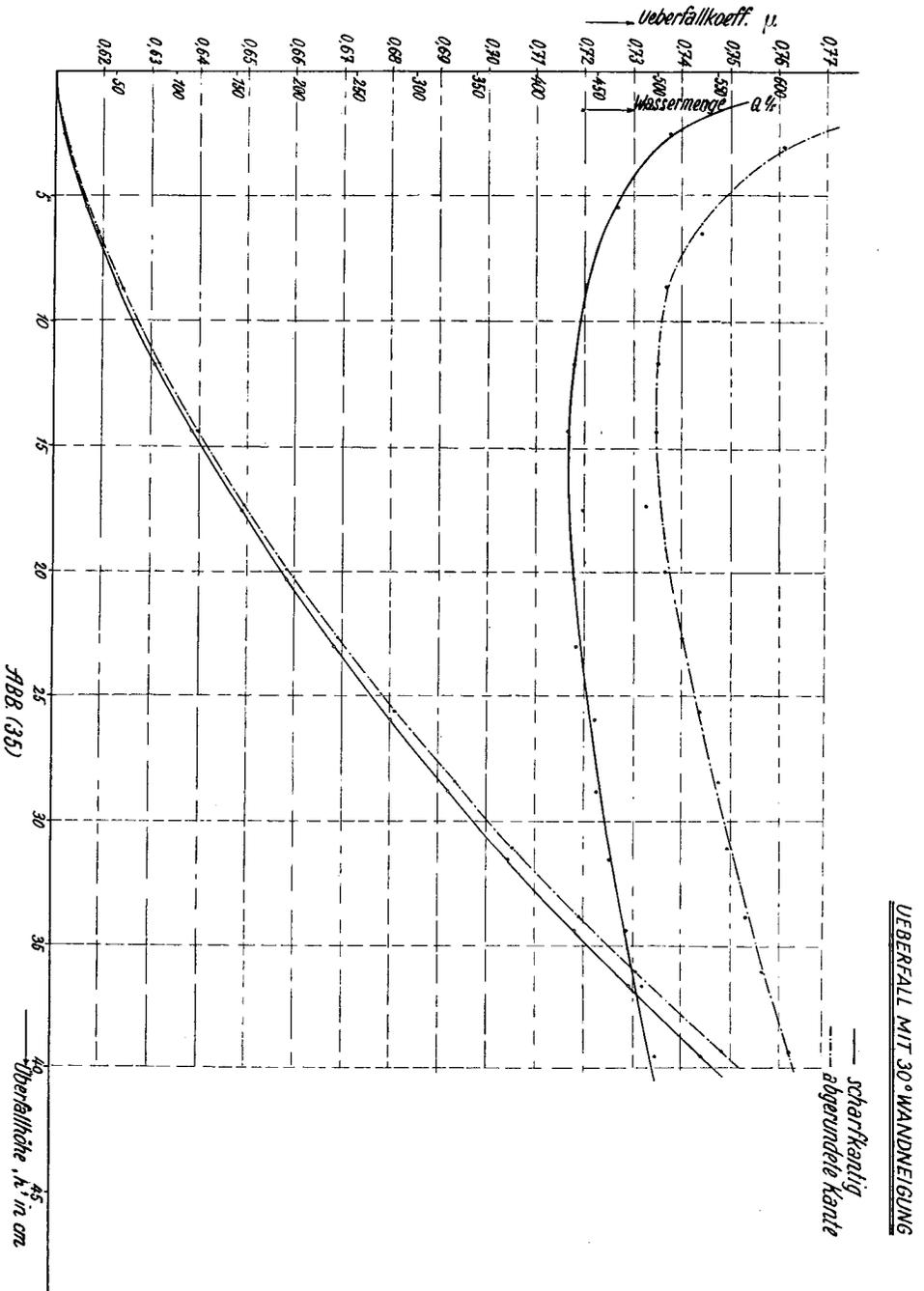
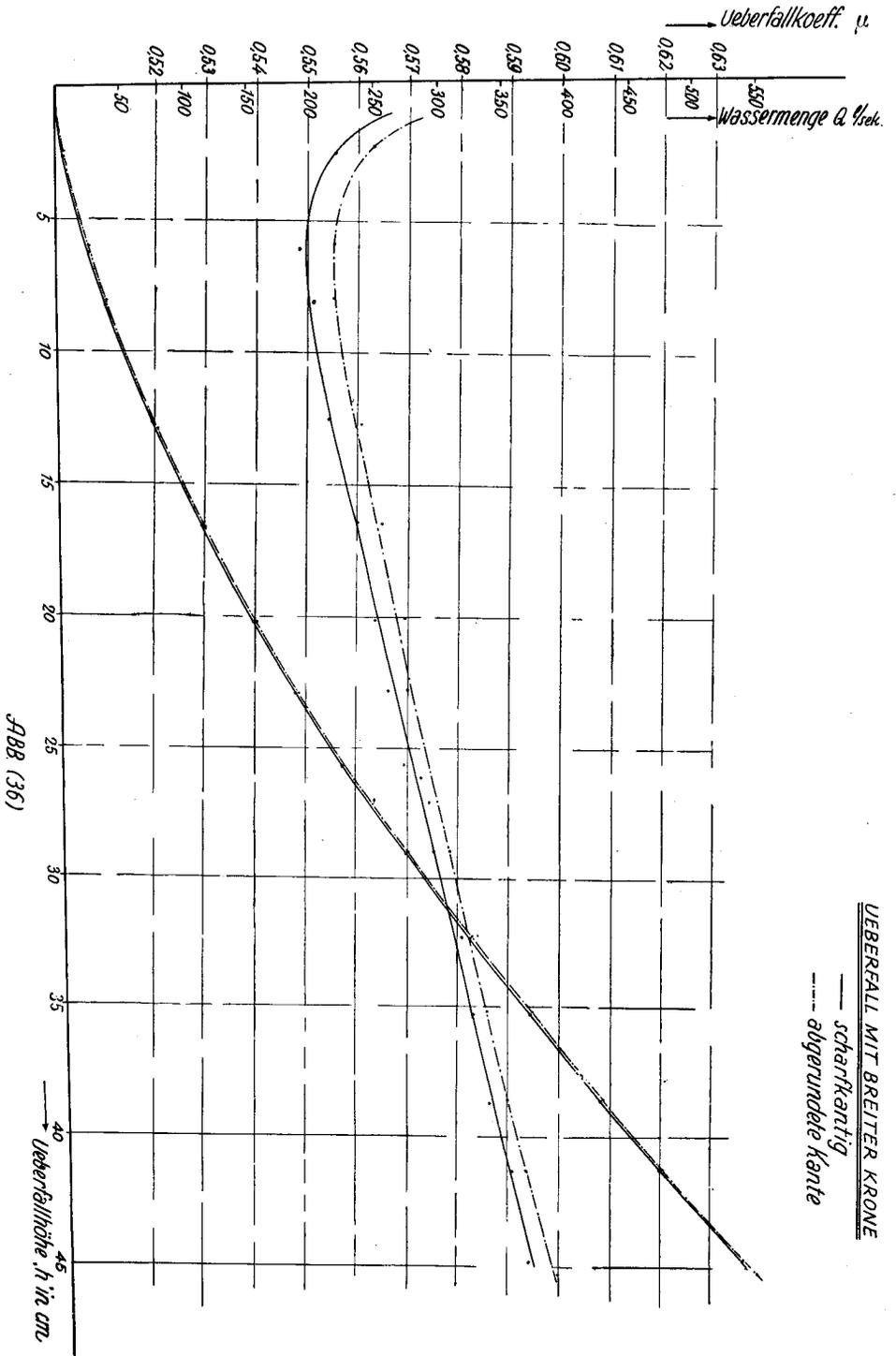


Abb. (34)





Zahrentafel 8. 1. Versuch  18. März 1931

Zeit	h cm	c m/s	Q l/s	μ
14.35	43,2	0,4454	548,73	0,6544
14.50	39,38	0,39604	472,804	0,6480
15.05	36,99	0,36697	429,310	0,6462
15.20	34,02	0,3292	375,380	0,6404
15.35	31,03	0,2946	327,110	0,6407
15.50	27,98	0,25806	278,640	0,6376
16.05	24,83	0,2216	232,310	0,6360
16.20	21,96	0,1882	191,890	0,6315
16.35	19,02	0,1556	154,120	0,6292
16.50	15,79	0,12084	115,750	0,6246
17.05	12,84	0,0909	84,410	0,6211
17.25	9,67	0,06107	54,752	0,6165
17.45	6,64	0,0360	31,192	0,6174
18.10	2,636	0,00956	7,90	0,6250

Zahrentafel 9. 2. Versuch  20. März 1931

Zeit	h cm	c m/s	Q l/s	μ
8.30	38,77	0,46215	555,39	0,7790
8.45	35,34	0,4141	483,40	0,7792
9.00	33,05	0,3815	436,61	0,77818
9.15	30,41	0,3427	383,25	0,7739
9.30	27,75	0,3058	333,80	0,7732
9.45	24,99	0,2678	284,93	0,7725
10.00	22,04	0,2287	236,60	0,7740
10.15	19,39	0,19305	194,57	0,7716
10.30	16,77	0,15855	155,63	0,7675
10.45	13,95	0,1225	116,81	0,7591
11.00	11,45	0,0943	87,56	0,7652
11.15	8,61	0,06352	57,180	0,7665
11.35	6,26	0,0404	35,418	0,7658
12.00	2,93	0,01365	11,511	0,7771

Zahlentafel 10. 3. Versuch  23. März 1931

Zeit	h cm	c m/s	Q l/s	μ
8.45	38,54	0,4415	544,75	0,7708
9.00	35,21	0,39585	475,10	0,7705
9.15	32,91	0,3615	425,52	0,7632
9.30	30,14	0,3251	373,65	0,76455
9.45	27,45	0,2888	324,20	0,7611
10.00	24,58	0,2515	275,10	0,7642
10.15	21,77	0,21412	228,30	0,7609
10.30	19,35	0,18265	190,25	0,7578
10.45	16,95	0,15293	155,60	0,7550
11.00	14,05	0,1186	117,25	0,7541
11.20	11,57	0,09107	87,76	0,7533
11.40	8,68	0,06069	56,736	0,7510
14.10	5,62	0,03277	26,632	0,7524
14.35	2,74	0,03255	10,101	0,7547

Zahlentafel 11. 4. Versuch  24. März 1931

Zeit	h cm	c m/s	Q l/s	μ
9.45	41,52	0,44055	544,25	0,6889
10.00	37,99	0,3933	471,89	0,6824
10.15	35,52	0,3633	427,0	0,6832
10.30	32,64	0,3260	373,75	0,6786
10.45	29,82	0,2906	325,00	0,6755
11.05	26,86	0,2535	275,95	0,6712
11.25	23,86	0,21787	230,65	0,6699
11.45	21,12	0,1852	191,00	0,6664
14.15	18,44	0,1550	155,682	0,6658
14.35	15,145	0,1180	114,63	0,6584
15.00	12,155	0,08710	82,009	0,6554
15.25	9,13	0,0583	53,129	0,6508
15.45	6,46	0,0352	31,12	0,6509
16.15	2,96	0,01157	9,83	0,6536

Zahrentafel 12. 5. Versuch  25. März 1931

Zeit	h cm	c m/s	Q l/s	μ
9.45	39,323	0,4635	555,32	0,7628
10.00	36,075	0,4160	484,95	0,7578
10.15	33,857	0,38106	439,20	0,7546
10.30	31,04	0,34395	383,65	0,75098
10.45	28,37	0,30686	334,10	0,74878
11.00	25,58	0,2681	284,40	0,74425
11.15	22,67	0,2289	236,16	0,7404
11.30	19,95	0,1931	193,96	0,73698
14.15	17,41	0,1605	157,13	0,7327
14.35	14,403	0,1250	118,63	0,7349
14.55	11,70	0,0946	87,236	0,7381
15.15	8,677	0,06245	55,685	0,7374
15.40	6,405	0,0410	35,632	0,74438
16.00	2,995	0,01395	11,647	0,7612

Zahrentafel 13. 6. Versuch  26. März 1931

Zeit	h cm	c m/s	Q l/s	μ
9.25	39,50	0,44475	538,99	0,73535
9.40	36,63	0,40545	479,75	0,7324
10.05	34,39	0,37421	434,40	0,7294
10.15	31,53	0,3350	379,31	0,72562
10.30	28,75	0,2981	329,26	0,7230
10.50	25,915	0,26115	281,05	0,72275
11.10	23,00	0,22385	234,35	0,7188
11.30	20,32	0,1904	194,25	0,7182
13.55	17,570	0,1577	156,55	0,7200
14.15	14,40	0,1204	115,70	0,71675
14.40	11,72	0,09115	85,142	0,71825
15.05	8,510	0,05856	52,827	0,7207
15.45	5,488	0,031646	27,59	0,7271
16.40	2,50	0,01022	8,6052	0,7377

Zahlentafel 14. 7. Versuch



27. März 1932

Zeit	h cm	c m/s	Q l/s	μ
8.45	38,69	0,45435	550,111	0,7742
9.00	35,48	0,4087	481,698	0,7720
9.20	33,27	0,37495	433,811	0,7655
9.40	30,46	0,3371	380,372	0,7657
10.00	27,82	0,3002	330,699	0,7628
10.30	25,02	0,26268	280,392	0,7589
10.50	22,29	0,22475	235,575	0,7582
11.15	19,65	0,18982	193,914	0,7538
11.40	17,13	0,15676	156,870	0,7499
14.00	14,095	0,1216	117,35	0,75116
14.30	11,63	0,09305	87,50	0,7468
15.00	8,70	0,06278	57,205	0,7551
15.55	5,817	0,03617	31,915	0,7702
16.55	2,268	0,00965	8,170	0,781

Zahlentafel 15.

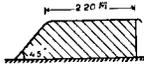
8. Versuch



28. März 1931

Zeit	h cm	c m/s	Q l/s	μ
8.30	40,10	0,4507	548,18	0,7310
9.30	36,70	0,4034	476,899	0,7259
10.00	34,54	0,3740	434,053	0,7239
10.30	31,58	0,3338	377,528	0,72057
10.50	28,805	0,2964	327,003	0,71617
11.10	25,94	0,2592	278,536	0,7139
11.30	22,98	0,2213	231,250	0,7105
11.50	20,27	0,1879	191,264	0,7095
12.10	17,58	0,1556	154,200	0,7084
12.30	14,37	0,11935	114,46	0,7116
13.00	11,63	0,08936	83,24	0,7105
13.15	6,785	0,042615	37,635	0,7212
13.30	4,96	0,0277	23,955	0,73402
13.45	1,72	0,00644	5,364	0,8150

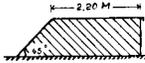
Zahrentafel 16. 9. Versuch



30. März 1931

Zeit	h cm	c m/s	Q l/s	μ
10.30	45,77	0,4250	540,23	0,59095
11.20	41,65	0,3803	467,826	0,5896
13.55	38,96	0,3502	421,151	0,58638
14.15	35,58	0,31215	365,05	0,5825
14.35	32,61	0,2804	319,577	0,58115
14.55	29,32	0,2441	270,182	0,5761
15.15	26,41	0,2120	228,483	0,5701
15.30	23,06	0,1780	185,876	0,5680
15.50	20,365	0,1507	153,36	0,5650
16.10	16,70	0,1158	113,555	0,5635
16.30	12,97	0,0819	77,260	0,5599
16.50	8,10	0,0422	37,753	0,55465
17.10	6,058	0,02795	24,44	0,5550
17.40	2,51	0,00783	6,566	0,56255

Zahrentafel 17. 10. Versuch



31. März 1931

Zeit	h cm	c m/s	Q l/s	μ
9.10	45,18	0,4184	529,5	0,5901
10.00	41,655	0,3788	466,03	0,5870
10.40	39,035	0,34882	419,955	0,58285
11.20	35,625	0,31262	365,711	0,58255
14.10	32,635	0,2793	318,42	0,5781
14.25	29,296	0,2424	268,240	0,5727
14.45	25,89	0,2056	220,524	0,5670
15.05	23,065	0,17672	184,540	0,5640
15.25	20,37	0,14992	152,516	0,56175
15.40	16,625	0,11413	111,825	0,5586
16.00	12,715	0,07876	74,103	0,5534
16.20	8,263	0,043909	38,623	0,55065
16.40	6,27	0,02901	25,421	0,54835
17.10	2,62	0,008282	6,956	0,5554

Stellen wir die Versuchsergebnisse der verschiedenen Forscher einander gegenüber, so sehen wir, daß die von Bazin und Frese errechneten μ -Werte wesentlich größer sind als die meinigen. Dagegen stimmen letztere ziemlich gut mit den Ergebnissen von Rehbock und denjenigen des Schweiz. Ingenieur- und Architektenvereins überein.

In Folgendem soll noch untersucht werden, wie sich die Reynold'sche Zahl bei Änderung der Überfallart verhält. R ist proportional der mittleren Geschwindigkeit c . c selbst ist proportional der Überfallhöhe h . Der Überfallkoeffizient μ ist daher auch proportional R .

$$R = \frac{c \cdot l}{\nu}$$

c = mittlere Geschwindigkeit.

l = Profilradius

$$l = \frac{\text{Querschnitt}}{\text{benetzter Umfang}}$$

ν = dynamische Zähigkeit.

Für die Ermittlung von ν wird die von Herrn dipl. Ing. Gregorig aufgestellte Formel verwendet.

Gregorig fand:

$$\nu = \left\{ \left(\frac{0,2277}{2,5 + t} \right)^2 + \left(\frac{3,262}{25 + t} \right) + \left(\frac{9,795}{25 + t} \right)^2 - \left(\frac{12,05}{25 + t} \right)^3 \right\} \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{sec.}$$

t in ° Celsius.

Für $t = 15^\circ$ ist

$$\nu = 0,1690219 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{sec}$$

und man bekommt für $h = 80$ mm bei

1) *Senkrechtem Überfall:*

$$R = \frac{c \cdot l}{\nu} = \frac{0,0547 \cdot 0,3200 \cdot 10^5}{0,16902} = 10350$$

2) *60° Neigung:*

$$R = \frac{c \cdot l}{\nu} = \frac{0,0570 \cdot 0,3222 \cdot 10^5}{0,16902} = 10880$$

3) *45° Neigung:*

$$R = \frac{c \cdot l}{\nu} = \frac{0,06215 \cdot 0,3222 \cdot 10^5}{0,16902} = 11845$$

4) *30° Neigung:*

$$R = \frac{c \cdot l}{\nu} = \frac{0,0626 \cdot 0,3222 \cdot 10^5}{0,16902} = 11950$$

5) *Breite Krone:*

$$R = \frac{c \cdot l}{\nu} = \frac{0,0473 \cdot 0,3210 \cdot 10^5}{0,16902} = 8985$$

An diesen Beispielen sieht man, daß eine Proportionalität zwischen μ und R besteht, und daß R auch bei 30° Neigung den Höchstwert erreicht.

Bestimmt man die Reynolds'sche Zahl für eine Konstante Wassermenge, z. B. $Q = 100$ liter/sec, so ergibt sich:

1) *Senkrechter Überfall:*

$$R = \frac{0,1060 \cdot 0,3275 \cdot 10^5}{0,16902} = 20550$$

2) 60° Neigung:

$$R = \frac{0,1043 \cdot 0,3290 \cdot 10^5}{0,16902} = 20300$$

3) 45° Neigung:

$$R = \frac{0,1056 \cdot 0,3275 \cdot 10^5}{0,16902} = 20450$$

4) 30° Neigung:

$$R = \frac{0,10525 \cdot 0,3275 \cdot 10^5}{0,16902} = 20400$$

5) *Breite Krone:*

$$R = \frac{0,1032 \cdot 0,3300 \cdot 10^5}{0,16902} = 20200$$

Die Reynolds'sche Zahl bleibt praktisch konstant.

Geschwindigkeitsverteilung.

Um ein Bild von der Geschwindigkeitsverteilung an der Meßstelle zu erhalten, wurden auch Messungen mit Amsler-Flügel durchgeführt und zwar für sechs verschiedene Wassermengen.

$$Q = 0,6230 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q = 0,4980 \text{ »}$$

$$Q = 0,3990 \text{ »}$$

$$Q = 0,2945 \text{ »}$$

$$Q = 0,1975 \text{ »}$$

$$Q = 0,1013 \text{ »}$$

Für jede Q wurde an 20 Punkten gemessen. In Wandnähe, wo mit dem Flügel nicht mehr gearbeitet werden kann, wurde die Geschwindigkeitsverteilung nach dem Potenzgesetz von Prandtl bestimmt.

$$c = C \cdot \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}$$

Für die Geschwindigkeit c im Abstand y von der Kanalachse gilt, wenn C die Höchstgeschwindigkeit (Kanalachse) und δ gleich der halben Kanalbreite ist, obige Formel. Unserer Rechnung wurde nicht die der Kanalmitte entsprechende Geschwindigkeit C zu Grunde gelegt, sondern diejenige eines der Wand am

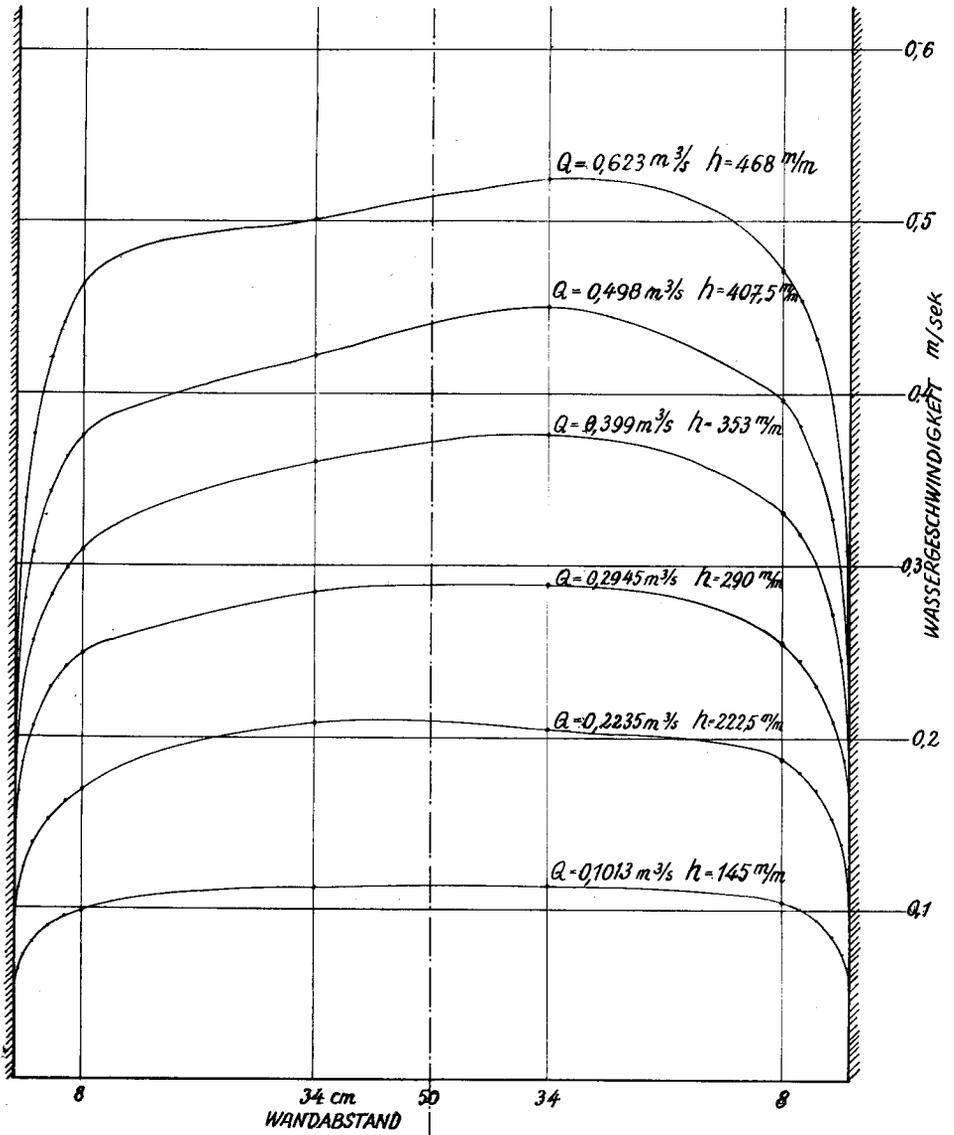


ABB. (39)

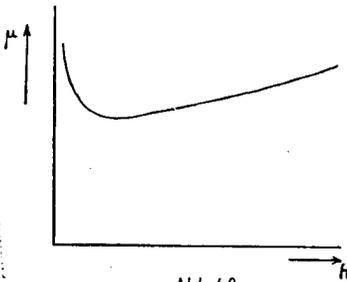


Abb.40

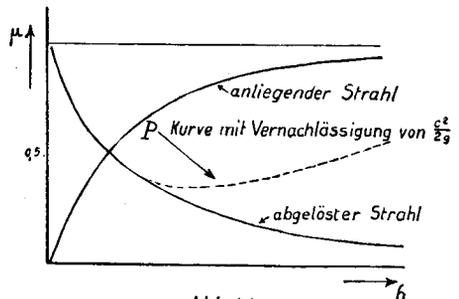
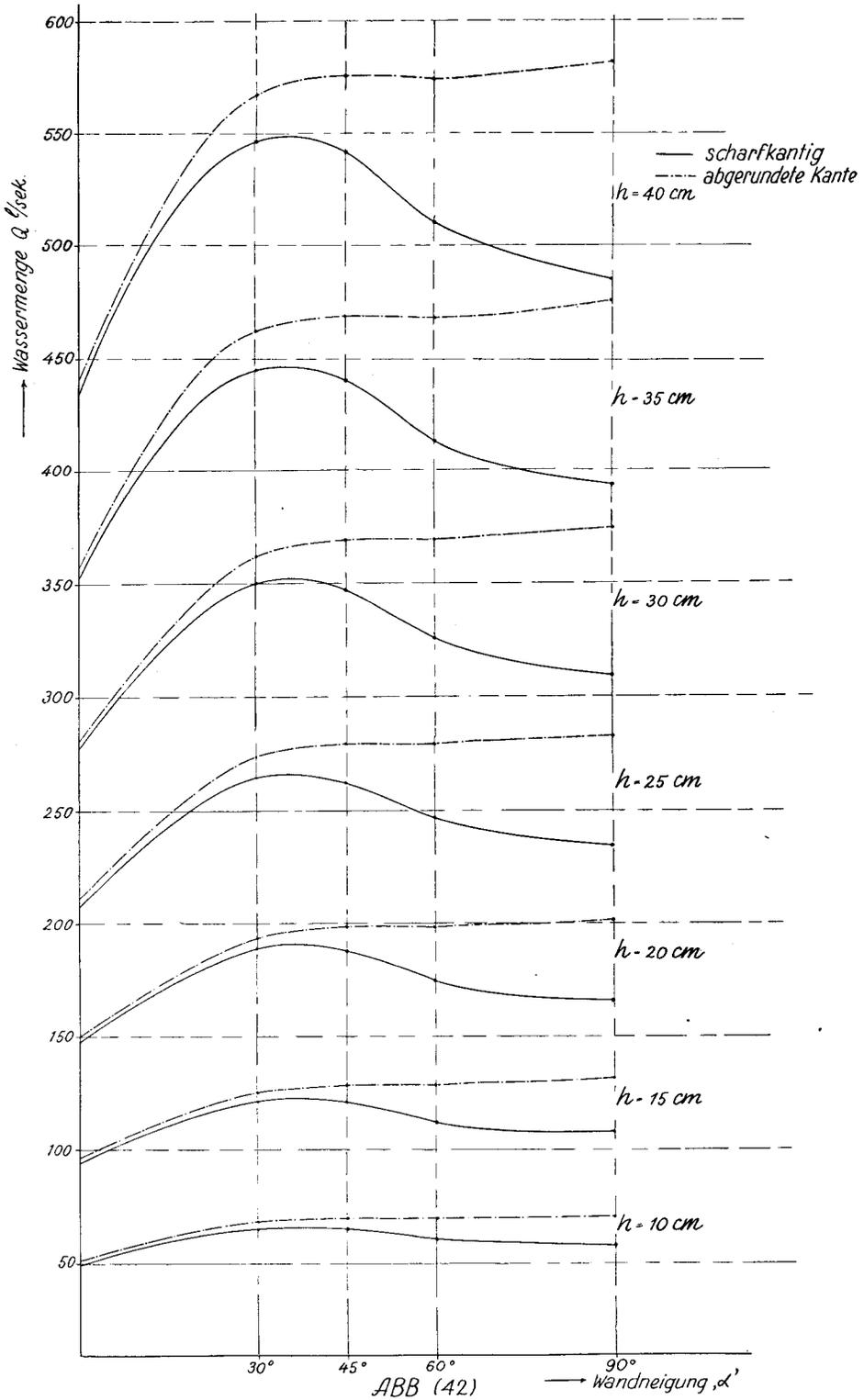


Abb.41



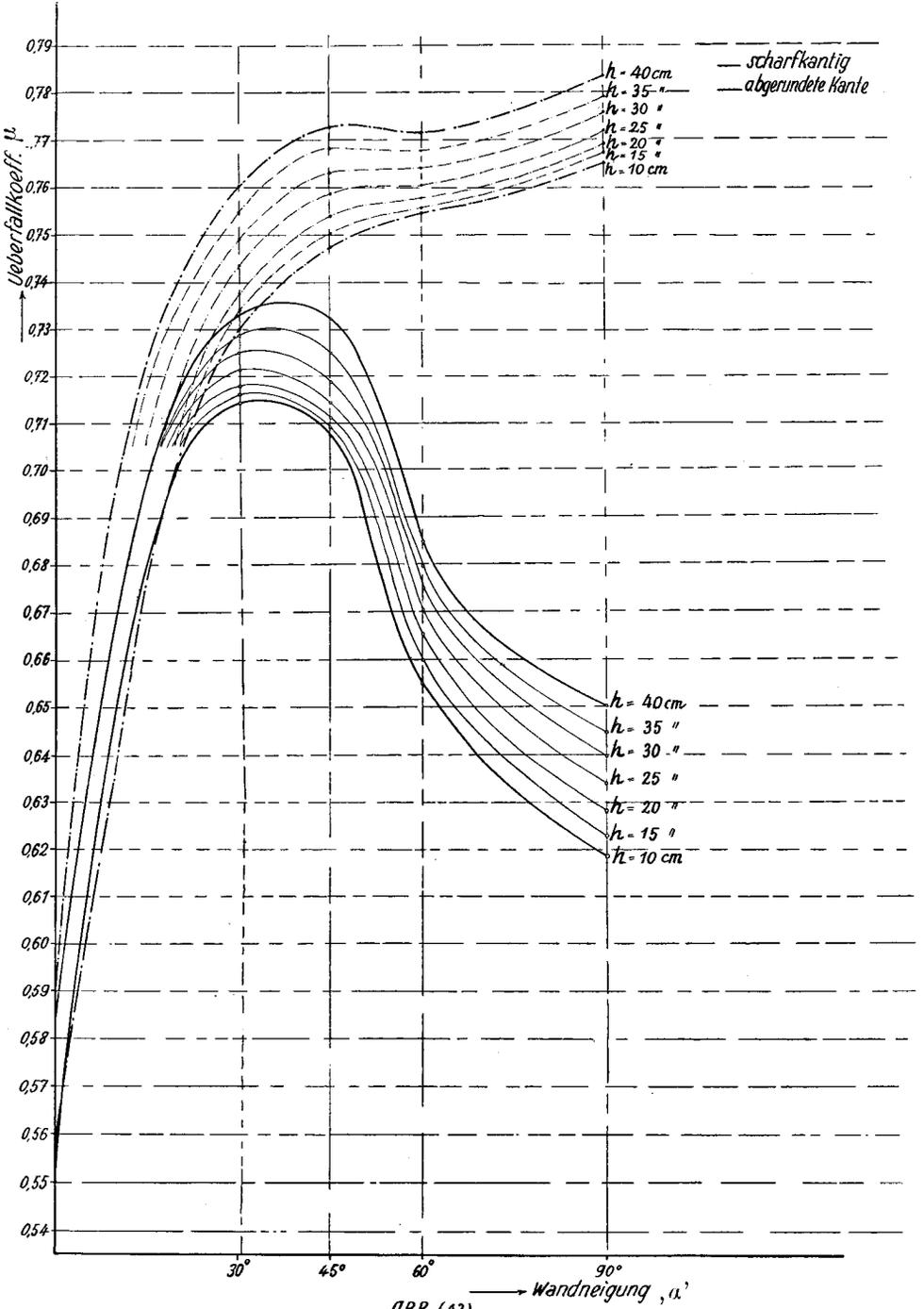


ABB. (43)

Der Verlauf der $\mu = f(h)$ -Kurve weist, wie aus Abb. (40) ersichtlich, ein Minimum auf.

Betrachten wir den allgemeinen Fall, so zeigt sich, daß bei einem Überfall mit abgelöstem Strahl μ mit wachsendem h abnimmt. Dieser Verlauf ist allgemein, weil auch die Geschwindigkeit berücksichtigt wurde.

Vernachlässigen wir $\frac{c^2}{2g}$, so erhalten wir den zuerst genannten Kurvenverlauf.

Für den Fall, wo man vom anliegenden Strahl $h = 0$ und $\mu = 0$ ausgeht, nähert sich μ mit wachsendem h asymptotisch dem Wert 1. Abb. (41).

Im Punkt P , wo sich die beiden Grundkurven schneiden, herrscht ein labiler Zustand für μ . Da die Kurven etwas verschieden verlaufen, je nachdem von welcher Seite der Versuch ausgeführt wurde (d. h. von $h = 0$ ÷ $h = \max$ oder $h = \max$ ÷ $h = 0$), schwankt die Lage des Punktes P im Intervall von $h = 12$ ÷ 18 mm.

Bei Überfallmessungen muß also darauf geachtet werden, daß man mit den Messungen nicht in das Gebiet des labilen μ kommt.

Strahlabsenkung.

Prof. Frese hat bei seinen Versuchen über Strahlkontraktion folgendes herausgefunden:

- 1) Die Absenkung wächst mit zunehmender Kanalbreite, bis sie ein Maximum erreicht, um dann wieder abzunehmen.
- 2) Die Absenkung nimmt zu mit wachsender Überfallhöhe.
- 3) Die Kanalbreite, für welche die maximale Absenkung eintritt, ist direkt proportional der Überfallhöhe.
- 4) Die größte Absenkung steht in einem ganz bestimmten Verhältnis zu der Überfallhöhe und beträgt ca. $0,15 h$. Prof. Bazin hat diesen Wert bestätigt.

Vergleich zwischen den experimentellen und theoretischen μ -Werten.

In den Abb. 27, 28, 29, 30, 31 sind die nach der Methode der kleinsten Quadrate von Gauß ausgeglichenen, experimentellen μ -Werte in Funktion von h dargestellt. Für senkrechten, scharfkantigen Überfall zeigen die Resultate eine ziemlich gute Übereinstimmung mit den theoretisch berechneten Werten. Bei abnehmender Wandneigung hingegen weichen die experimentellen Werte stark von den theoretischen ab. Die maximale Abweichung beträgt bei einer Neigung von 30° 15,8%. Wie schon erwähnt, erscheint diese quantitative Abweichung begründet durch das Vernachlässigen der Reibung in der Theorie von Prof. R. von Mises.

Der Einfluß der Reibung oder Zähigkeit kann nur dann vernachlässigt werden, wenn der Strahl in die freie Luft austreten würde, da die Dichte der Luft

gegenüber derjenigen der Flüssigkeit viel zu gering ist. Im Kanal selbst jedoch wird sich stets eine gewisse Reibungswirkung geltend machen und zwar eine umso größere, je größer die Geschwindigkeit ist. Um diese Wirkung der Reibung zu beseitigen, sollte man die sog. Widerstandshöhe berechnen und von der theoretischen Druckhöhe abziehen, oder diese Höhe zum Versuchswerte von h addieren, um die theoretische Überfallhöhe zu bekommen. Hier hat auch die Geschwindigkeitsverteilung einen kleinen Einfluß auf den Koeffizienten.

Bei senkrechter Überfallwand sind die experimentellen μ -Werte höher als die theoretischen und es ist anzunehmen, daß diese Erscheinung dadurch eintritt, daß die Überfallkante nicht vollkommen scharf ist, während die Theorie von Prof. von Mises vollkommen scharfe Überfallkante voraussetzt. Die Überfallkante besitzt eine Breite von 3 mm, wirkt also wie eine kurze Führung des Strahles und erhöht dadurch den Koeffizienten.

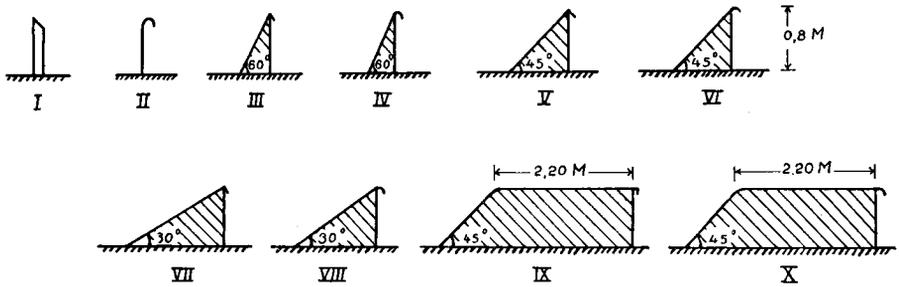
Schlußfolgerungen.

Als Ergebnis der vorliegenden Arbeit kann zusammengefaßt folgendes ausgesagt werden:

- 1) Die Veränderung der Wandneigung des Wehres hat eine Veränderung des Überfallkoeffizienten zur Folge. Die Versuche wurden bei Wandneigungen von 0°, 30°, 45°, 60° und 90° durchgeführt (wobei der Neigungswinkel als Winkel zwischen Kanalsohle und Überfallwehr eingeführt wurde).
- 2) Für scharfkantige Wehre nimmt der Koeffizient μ zunächst mit wachsendem Neigungswinkel zu und erreicht ein Maximum bei einem Neigungswinkel zwischen 30° und 45°, um danach abzunehmen.
- 3) Die Einführung kreisförmig abgerundeter Kanten ergibt eine Erhöhung des Koeffizienten.
- 4) Der Einfluß der abgerundeten Kante vermindert sich mit abnehmender Wehrneigung. (Vergleiche Abb. 43.)
- 5) Ein Vergleich zwischen Theorie und Versuch zeigt nicht für alle Fälle gleich befriedigende Übereinstimmung, wie sich leicht aus den Abb. 27 bis 30 erschen läßt. Als Grund hierfür ist anzunehmen, daß die theoretischen Voraussetzungen nicht mit genügender Genauigkeit erfüllt sind.
- 6) Die neuen Formeln für μ nach S. I. A. und Rehbock 1929 ergeben befriedigendere Übereinstimmung mit den eigenen Versuchen als die Formeln von Bazin und Frese.
- 7) Um die Schluckfähigkeit eines scharfkantigen Überfalles mit senkrechter Wehrtafel zu erhöhen, genügt die Einführung einer kreisförmig abgerundeten Wehrkrone vollständig, denn wie man aus Abb. 42 und 43 ersieht, liefert ein solcher Überfall die größte Wassermenge.
- 8) Der Koeffizient μ verhält sich, wenn mit μ_0 der Koeffizient für senkrechten, scharfkantigen Überfall bezeichnet wird, für die verschiedenen Typen wie folgt:

h mm	Werte von $\frac{\mu}{\mu_0}$									—	—	—
	Typ I	T. II	T. III	T. IV	T. V	T. VI	T. VII	T. VIII	T. IX			
50	1,240	1,050	1,215	1,185	1,250	1,175	1,210	0,890	0,900	—	—	—
100	1,235	1,060	1,220	1,148	1,210	1,155	1,180	0,892	0,900	—	—	—
150	1,231	1,060	1,212	1,140	1,204	1,150	1,178	0,894	0,900	—	—	—
200	1,223	1,060	1,205	1,131	1,200	1,142	1,173	0,895	0,900	—	—	—
250	1,220	1,060	1,200	1,127	1,196	1,140	1,172	0,896	0,903	—	—	—
300	1,211	1,057	1,192	1,122	1,190	1,132	1,170	0,895	0,902	—	—	—
350	1,208	1,054	1,189	1,122	1,190	1,130	1,168	0,897	0,903	—	—	—
400	1,202	1,052	1,186	1,125	1,188	1,127	1,169	0,898	0,905	—	—	—

Die verwendeten Typen haben folgende Formen:



Es bleibt mir angenehme Pflicht, meinem sehr verehrten Lehrer, Herrn Prof. *R. Dubs* meinen herzlichsten Dank auszusprechen für seine Anregung zur vorliegenden Arbeit und für die Förderung, welche er ihr mit seinem Rat zuteil werden ließ.

Auch vielen Dank meinen Kommilitonen, die mir jeweils als Beobachter behilflich waren, sowie Herrn Seiler, Mechaniker an der hydraulischen Abteilung des Maschinenlaboratoriums. Letzterer leistete bei der Aufstellung der Versuchseinrichtung sehr gewissenhafte Arbeit.

Literatur.

- Francis*: The Lowell Hydraulic experiments: Little, Brown & Co. Boston, Jahr 1855, S. 71.
- H. Bazin*: Expériences nouvelles. . . Annales des Ponts et Chaussées, Jahr 1890.
- Frese*: Hannover Z. V. D. I. 1890 Versuche über vollkommene Überfälle, S. 1285, 1309, 1337.
- Zeitschrift für Gewässerkunde*, Jahr 1900: H. Gravelius, S. 162.
- Hansen*: Z. V. D. I. Jahr 1892, S. 1057, 1087: Die Bestimmung von Wassermengen mittels Überfälle.
- Weyrauch*: Hydraulisches Rechnen: Verlag Wittwer, Stuttgart, 1909, S. 50.
- R. von Mises*: Berechnung von Ausflußzahlen Z. V. D. I. 1917, S. 447, 469, 493.
- Nagler und Floyd*: Verification of the Bazin Wier Formula Transactions of the amer. society of Civil Engineers 1920.
- Koch*: Bauingenieur 1923, Heft 22.
- Forchheimer*: Hydraulik: Verlag Teubner, Leipzig, 1924, S. 286.
- Hahn*: Die Wassermessung bei Wasserkraftanlagen, Wasserkraft Jahrbuch 1925, 26, S. 260.
- Schoder und Turner*: Überfälle Proceeding of the Soc. of Civil Engineers 1927/7/1395, 1504.
- Kirchner*: Untersuchung der Überfallkoeff. Mitt. des Forschungsinstituts für Wasserbau und Wasserkraft, München 1928, Heft 1, Verlag Oldenburg.
- Mitteilungen des hydr. Instituts der techn. Hochschule München*, Heft 2, 1928.
- Müller: Hannover*: Beeinflussung der Überfallmessung durch ungleiche Geschwindigkeitsverteilung, Deutsche Wasserwirtschaft 1928/II/175.
- Rehbock*: Karlsruhe: Z. V. D. I. 1929/24/817; Wassermessung mit scharfkantigen Überfallwehren.
- Ackeret*: Bemerkung zur Strömung über scharfkantige Überfallwehre S. B. Z. 1930, 1/3.
- Schöklitsch*: Zur Berechnung des Ergusses über ein Wehr, Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 1930, 8/85.
- Staus, Eblingen*: Überfälle, zur Berechnung kreisrunder Überfälle, Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 1930/II/122.
- Berdal*: Überfallformeln: Wasserkraft und Wasserwirtschaft 1931/20/237.
- W. Dietrich*: Wassermessung mit Überfall in der Zentrale Handeck der Kraftwerke Oberhasli, S. B. Z. 1932 No. 1. S. 1.