

Prom. Nr. 3452

**Stationäres Betriebsverhalten
von Gasturbinen
mit verstellbaren Leitapparaten**

Von der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN ZÜRICH

zur Erlangung
der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften
genehmigte

PROMOTIONSARBEIT

vorgelegt von

HANS JAGGI

dipl. Masch.-Ing. ETH

von Gossliwil (Kt. Solothurn)

Referent: Herr Prof. Dr. W. Traupel

Korreferent: Herr Prof. M. Berchtold

Juris-Verlag Zürich
1964

**Die vorliegende Promotionsarbeit erscheint als Band Nr. 7
der Mitteilungen aus dem Institut für thermische Turbomaschinen
an der E. T. H. in Zürich.**

Vorwort

Die Anregung zur vorliegenden Arbeit verdanke ich Herrn Prof. Dr. W. Traupel. Für sein stetes Interesse und die vielen wertvollen Ratschläge schulde ich Herrn Prof. Traupel herzlichen Dank, ebenso für die Zustimmung, dass die Arbeit an seinem Institut ausgeführt werden konnte.

Gleichzeitig danke ich Herrn Prof. M. B erchtold für die Aufmerksamkeit, die er als Korreferent der Arbeit entgegenbrachte.

Meinen Kollegen, Herrn dipl. Ing. W. Riess und insbesondere Herrn dipl. Ing. O. I ten danke ich für wertvolle Hinweise und Mithilfe bei den Korrekturarbeiten.

Dem Schweizerischen Schulrat sei bestens gedankt für die Bewilligung eines Beitrages an die Drucklegung aus dem dipl. Ing. Heinrich Blumer-Fonds.

Nicht zuletzt gehört mein Dank meiner Gattin, die mir mit dem Schreiben des Manuskriptes eine grosse Arbeit abgenommen hat.

Leer - Vide - Empty

Inhalt

Vorwort	
Bezeichnungen	9
1. Kurze Uebersicht	13
2. Qualitatives Verhalten von Gasturbinen unter geänderten Betriebsbedingungen	15
2.1. Allgemeine Beziehungen	15
2.2. Turbine mit festem Leitapparat	23
2.3. Vereinfachtes Durchflussgesetz für Turbinen mit verstellbarem Leitapparat	25
2.4. Turbine mit verstellbarem Leitapparat	38
2.5. Beurteilung der Resultate	60
3. Berechnung der Charakteristiken von Turbinen mit verstellbaren Leitschaufeln	63
3.1. Allgemeines	63
3.2. Vereinfachungen	63
3.3. Berechnung einer einzelnen Stufe	64
3.4. Berechnung der mehrstufigen Maschine	72
3.5. Radwirkungsgrade	82
3.6. Lösungsmethode	85
3.7. Maximal mögliche Durchflussmenge	90
3.8. Ueberkritische Verhältnisse	93
3.9. Daten der berechneten Maschine	94
3.10. Beurteilung der Resultate	95
4. Betriebsverhalten gesamter Gasturbinenanlagen	113
4.1. Allgemeines	113
4.2. Verdichtergruppe	114
4.3. Nutzturbine	126
4.4. Teillastverhalten einer Kleingasturbine	129
Literaturverzeichnis	139

Leer - Vide - Empty

Bezeichnungen

Die Numerierung der Gleichungen und Abbildungen beginnt in jedem Abschnitt neu. Es wird durch die Ausdrücke "Gl. 3.4 (18)", "Abb. 3.10.12" auf die Gleichung (18) des Abschnittes 3.4. bzw. die Abbildung 12 des Abschnittes 3.10. hingewiesen.

Die Formeln enthalten keine Umrechnungsfaktoren, alle Grössen sind dimensionskohärent einzusetzen. Zur Auswertung empfiehlt sich daher das MKSA-System. Die Resultate sind in dimensionsloser Form dargestellt.

Nachfolgend sind die wichtigsten Symbole und Indices, sowie ihre Dimension im MKSA-System zusammengestellt. Nicht aufgeführte Grössen haben nur vorübergehende Bedeutung und sind an der betreffenden Textstelle definiert.

Symbole

c	m/s	Absolutgeschwindigkeit
c_n	m/s	Normalkomponente der Absolutgeschwindigkeit
c_u	m/s	Umfangskomponente der Absolutgeschwindigkeit
c_p	$J/kg^{\circ}K$	spezifische Wärme bei konstantem Druck
C, C_n, C_u	-	Crocozahlen der Geschw. c, c_n, c_u . Def. Gl. 3.3(16)
D	m	Raddurchmesser
f	m^2	Durchflussquerschnitt
F	-	Durchflussfunktion der Turbine ("Ellipsenfaktor")
h	J/kg	Totalenthalpie
Δh	J/kg	Aenderung der Totalenthalpie
Δh_s	J/kg	isentropie Aenderung der Totalenthalpie
i	J/kg	Enthalpie
Δi	J/kg	Aenderung der Enthalpie
Δi_s	J/kg	isentropie Aenderung der Enthalpie

L_i	J/kg	innere Arbeit pro Masseneinheit
L_R	J/kg	Reibungsarbeit pro Masseneinheit
\dot{m}	kg/s	Massenstrom
\dot{M}	-	relativer Massenstrom. Def. Gl. 2.3 (5)
M_d	Nm	Drehmoment
n	-	Polytropenexponent
n	U/min	Drehzahl pro Minute
n^*	-	Charakteristische Drehzahl. Def. Gl. 2.3 (14)
N	J/s	Leistung
Δp	bar	Druckabfall
p	bar	statischer Druck
P	bar	Totaldruck
Q	-	Totaldruckverhältnis Def. Gl. 3.3 (33)
R	J/kg ^o K	Gaskonstante
Re	-	Reynoldszahl
s	J/kg ^o K	Entropie
T	^o K	absolute Temperatur
T_t	^o K	absolute Totaltemperatur
u	m/s	Umfangsgeschwindigkeit
U	-	Crocozahl der Umfangsgeschwindigkeit Def. Gl. 3.3 (16)
v	m ³ /kg	spezifisches Volumen
\dot{V}	m ³ /s	Volumenstrom
w	m/s	Relativgeschwindigkeit
W	-	Crocozahl der Relativgeschwindigkeit Def. Gl. 3.3 (16)
z	-	Stufenzahl
z	-	Druckkoeffizient Def. Gl. 2.1 (11)

α	o	absoluter Strömungswinkel
β	o	relativer Strömungswinkel
δ	-	relative Leckverluste
ε	-	relativer Druckverlust
η	-	Wirkungsgrad
η_i	-	innerer Wirkungsgrad
η_r	-	Rekuperatorwirkungsgrad
η_{thi}	-	innerer thermischer Wirkungsgrad
\mathcal{J}	-	Temperaturverhältnis des Gasturbinenprozesses
Θ	-	Temperaturverhältnis einer Stufe Def. Gl. 3.3 (34)
κ	-	Isentropenexponent
λ_{Diff}	-	Umsetzungsgrad im Diffusor
Λ	-	Charakteristische Leistungsausbeute Def. Gl. 2.1 (19)
μ	-	Schluckzahl Gl. 3.4 (53)
μ	-	Leckverlust bei Regeneratoren Gl. 4.2 (12)
ν	-	Laufzahl Gl. 3.4 (54)
π	-	Druckverhältnis (so definiert, dass $\pi < 1$)
Π	-	Druckverhältnis (so definiert, dass $\Pi > 1$)
ψ	-	Durchsatzzahl Def. Gl. 3.4 (51)
ϕ	-	relativer Durchflussquerschnitt Def. Gl. 2.3 (6)
Φ	-	Durchflussgrösse Def. Gl. 4.2 (28)
ψ	-	Druckzahl Def. Gl. 3.4 (48)
ψ'	-	Durchflussfunktion einer Düse Def. Gl. 2.3 (2)
ψ_k	-	Druckfunktion für Kompression Def. Gl. 2.4 (20)
ω	s^{-1}	Kreisfrequenz
Ω	m^2	Ringquerschnitt

Indices

Kap. 2	0	Bezugspunkt (vergl. Fussnote S. 18)
	1...6	vergl. Abb. 2. 1. 1.
Kap. 3	0	vor dem Leitrad
	1	zwischen Leit - und Laufrad
	2	nach dem Laufrad
Kap. 4	0	Auslegungspunkt
	1...6	vergl. Abb. 4. 1. 1.
	D	Dimensionslose Kennzahl (Vergl. Gl. 3. 3 (19) ff)
	E	Eintritt
	G	gesamte Turbine (vergl. Abschn. 2. 3.)
	i	innen
	N	Nutzturbine
	p	polytrop
	s	isentrop
	th	thermisch
	T	Turbine, bei 2-welligen Anlagen Verdichter- turbine
	V	Verdichter
	*	Auslegungspunkt
	+	kritischer Zustand
	++	überkritischer Zustand

1. Kurze Uebersicht

Nur für einen beschränkten Verwendungsbereich arbeiten Gasturbinen dauernd im Auslegungspunkt (z. B. Grundlastkraftwerke zur Elektrizitätserzeugung, Antrieb von Hochseeschiffen, Feuerwehrpumpen). Meist wird zumindest eine mehr oder weniger stark variable Leistung verlangt, während die Drehzahl entweder genau konstant bleibt (Elektrizitätserzeugung), oder doch nur in engen Grenzen variiert (Kompressor- und Pumpenstationen, Binnenschifffahrt). Die härtesten Anforderungen stellen die Gasturbinen für Landfahrzeuge (Lokomotiven und Automobile mit direktem Antrieb), bei denen Leistung und Drehzahl in weiten Bereichen schwanken. Dabei ist in Betriebszuständen weit vom Auslegungspunkt der Wirkungsgrad meist unbefriedigend. Auch sind die Maschinen empfindlich auf klimatische Einflüsse. In der vorliegenden Arbeit soll untersucht werden, ob und wie weit in diesen Fällen mit einem verstellbaren Leitapparat auf der Turbinenseite eine Verbesserung erreicht werden kann.

Die wenigen Literaturstellen, die sich überhaupt mit verstellbaren Leitapparaten befassen, geben kaum mehr als einige allgemeine Hinweise. Hier soll daher versucht werden, die grundsätzlichen Zusammenhänge darzustellen. Allen Untersuchungen zugrunde liegt ein einfacher offener Gasturbinenprozess, bei welchem als einzige Prozessverbesserung ein Rekuperator vorgesehen ist. Die Anlage ist zweiwellig, verstellbar ist stets der Leitapparat der freilaufenden Nutzturbine, da dieser bereits im Gebiet mässiger Temperaturen liegt. (Es wird gezeigt, dass mit anderen Anordnungen nicht mehr erreicht werden kann.) Alle Rechnungen beschränken sich auf stationäre Betriebszustände.

Soll nun eine Gasturbine mit verstellbaren Leitschaufeln gebaut werden, ist als erstes ein geeigneter thermodynamischer Prozess zu finden. Dies ist Aufgabe des Kapitels 2. Hier werden alle in Frage kommenden Prozesse untersucht. Für das Verhalten einer Anlage ist der Zusammenhang zwischen Druck- und Temperaturänderungen unter abweichenden Betriebsbedingungen charakteristisch. Dieser ist bei konventionellen Anlagen durch die Art der Schaltung gegeben und kann nun durch Verstellung des Leitapparates unabhängig von der Schaltung optimal angepasst werden. Es ist beschrieben, nach welchen Kriterien dies geschieht, welche Verbesserungen zu erwarten und welche Verstellflächen dazu notwendig sind.

Ist anhand dieser Angaben eine Turbine ausgelegt worden, muss deren Betriebsverhalten möglichst genau berechnet werden können. Dies ruft zuerst nach

einer gründlichen Untersuchung des Turbinenteils allein. In Kap. 3 wird versucht, mittels der eindimensionalen Theorie der Turbinenstufe einen tieferen Einblick zu gewinnen. Besondere Schwierigkeiten bietet die Ermittlung der Radwirkungsgrade bei falsch angeströmten Profilen. In Abschnitt 3.5. ist ein spezieller Ansatz dafür beschrieben. Es wird eine Anzahl Charakteristiken berechnet und in Diagrammform dargestellt. Sie stimmen mit Messresultaten gut überein.

Solche Charakteristiken (die selbstverständlich auch durch gemessene Daten ersetzt werden können), ermöglichen in Kap. 4 eine genauere Berechnung der Beharrungszustände, indem nun jeweils die entsprechenden Wirkungsgrade eingesetzt werden können. Gefährliche Betriebspunkte wie solche im Pumpgebiet, bei zu hoher Drehzahl des Verdichteraggregates oder stark überkritischen Zuständen in einzelnen Schaufelkränzen können erkannt werden. Als Beispiel ist eine Kleingasturbine mit einstufigem Kompressor und Regenerator bezüglich Teillastverhalten genauer untersucht. Ihre Charakteristiken sind dargestellt und deren Uebereinstimmung mit den Resultaten aus Kap. 2 diskutiert.

2. Qualitatives Verhalten von Gasturbinen unter geänderten Betriebsbedingungen

2.1. Allgemeine Beziehungen

Zur Beurteilung des Verhaltens von Gasturbinen unter geänderten Betriebsbedingungen wollen wir zuerst versuchen, einen allgemeinen, qualitativ richtigen Ueberblick zu erhalten. Damit die Untersuchung nicht zu umfangreich wird, ist es notwendig, alle Effekte von nur sekundärer Bedeutung unberücksichtigt zu lassen. Ebenso dürfen keine Maschinencharakteristiken verwendet werden, da diese eine allgemeine und geschlossene Lösung des Problems verunmöglichen. Als Vorbereitung führen wir eine thermodynamische Prozessanalyse durch. Im wesentlichen entspricht sie derjenigen nach Traupel [2], Kap. 14.3.

Mit den in Abb. 1 eingeführten Bezeichnungen ergibt sich für den Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{thI}} = \frac{(i_4 - i_5) - (i_2 - i_1)}{i_4 - i_3} \quad (1)$$

Da die Untersuchung vergleichenden Charakter hat, ist die Annahme eines konstanten Isentropenexponenten κ zulässig. Dann ist aus thermodynamischen Gründen auch die spezifische Wärme c_p konstant zu setzen. Anstelle der Enthalpien i können direkt die absoluten Temperaturen T geschrieben werden.

$$\eta_{\text{thI}} = \frac{(T_4 - T_5) - (T_2 - T_1)}{T_4 - T_3} \quad (2)$$

Verdichtung und Expansion sollen auf adiabaten Polytropen verlaufen. Die polytropen Wirkungsgrade sind definiert durch

$$\eta_{pV} = \frac{di_s}{di} \quad (3) \quad \eta_{pT} = \frac{di}{di_s} \quad (4)$$

Nach [1], Kap. 1 ergeben sich die Polytropenexponenten n_V und n_T aus

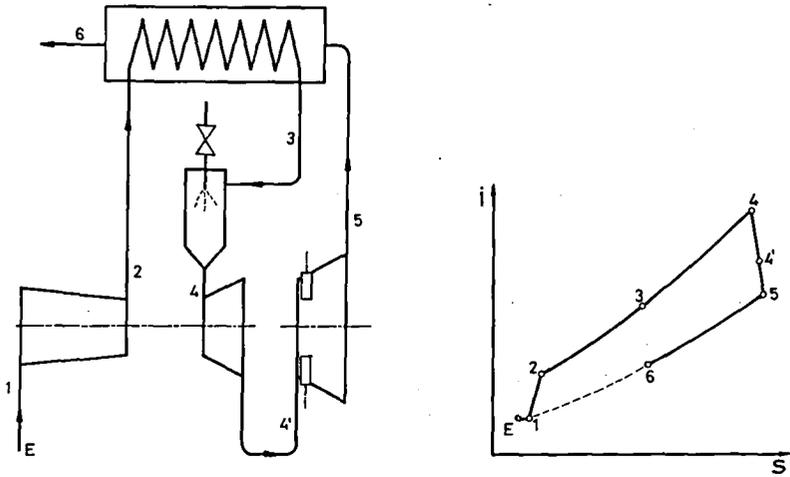


Abb. 2.1.1. Anlageschema und Numerierung der Zustandspunkte, sowie Prozessverlauf im i, s - Diagramm einer zweiwelligen Gasturbine mit seriengeschalteten Turbinen

$$\frac{n_V - 1}{n_V} = \frac{1}{\eta_{pV}} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \quad (5)$$

und

$$\frac{n_T - 1}{n_T} = \eta_{pT} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \quad (6)$$

Ferner ist ε die Summe aller relativen Druckverluste

$$\varepsilon \equiv \sum \frac{\Delta p}{p} \quad (7)$$

Als Abkürzungen setzen wir

$$x \equiv \frac{n_V - 1}{n_V} \quad (8) \quad y \equiv \frac{n_T - 1}{n_T} \quad (9)$$

$$\Pi \equiv \frac{p_2}{p_1} \quad (10) \quad z \equiv 1 - \varepsilon \quad (11)$$

Dann sind

$$\frac{T_2}{T_1} = \Pi^x \quad T_2 = T_1 \cdot \Pi^x \quad (12)$$

und

$$\frac{T_5}{T_4} = (z\Pi)^{-y} \quad T_5 = T_4(z\Pi)^{-y} \quad (13)$$

Mit dem Rekuperatorwirkungsgrad

$$\eta_r \equiv \frac{T_3 - T_2}{T_5 - T_2} \quad (14)$$

wird

$$T_3 = T_2 + \eta_r (T_5 - T_2)$$

und damit

$$\eta_{thi} = \frac{T_4 [1 - (z\Pi)^{-y}] - T_1 [\Pi^x - 1]}{T_4 - T_2 - \eta_r [T_5 - T_2]} \quad (15)$$

Führen wir noch das Temperaturverhältnis

$$\beta \equiv \frac{T_4}{T_1} = \frac{T_4}{T_E} \quad (16)$$

ein, verbleibt

$$\eta_{thi} = \frac{\beta [1 - (z\Pi)^{-y}] - [\Pi^x - 1]}{\beta - \Pi^x - \eta_r [\beta (z\Pi)^{-y} - \Pi^x]} \quad (17)$$

Die erreichbaren Wirkungsgrade sind als Funktion des Druckverhältnisses Π mit β und η_r als Parameter in Abb. 2 aufgetragen.

Zur Beurteilung der Arbeitsausbeute

$$L_i = c_p T_4 [1 - (z\Pi)^{-y}] - c_p T_1 [\Pi^x - 1] \quad (18)$$

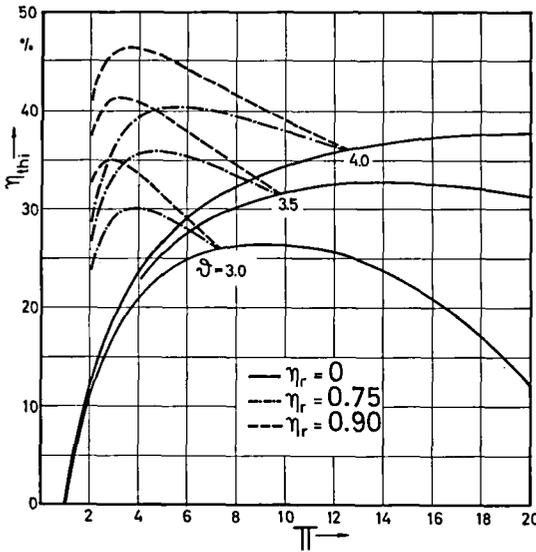


Abb. 2.1.2. Wirkungsgrade von Gasturbinenprozessen. Vorausgesetzt sind $\kappa = 1.375$, $\eta_{pV} = \eta_{pT} = 0.90$, $z = 0.945$ ohne und $z = 0.915$ mit Rekuperator.

benützen wir die dimensionslose Grösse

$$\Lambda \equiv \frac{L_1}{c_p T_E} = \gamma [1 - (z\pi)^{-\gamma}] - [n^x - 1] \quad (19)$$

Den Verlauf von Λ für die oben festgelegten Daten zeigt Abb. 3. Die Leistung ist dann*

* Jndex 0 bezeichnet im folgenden stets einen beliebigen Bezugspunkt. Dieser kann der Auslegungspunkt oder auch ein bekannter anderer Betriebspunkt sein, solange unsere Voraussetzung konstanter polytroper Wirkungsgrade genügend genau erfüllt ist.

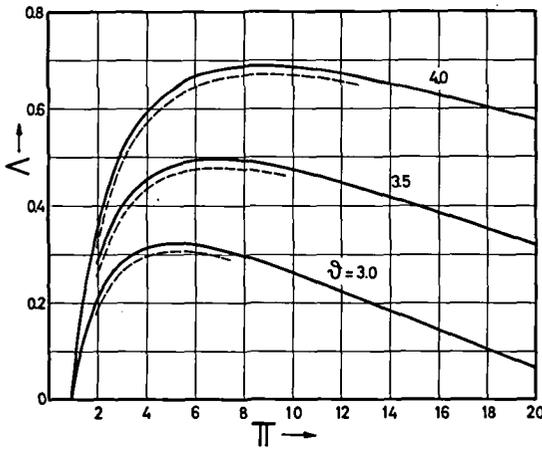


Abb. 2.1.3. Leistungsausbeute von Gasturbinenprozessen (Voraussetzungen vergl. Abb. 2.1.2.)

----- mit Wärmetauscher
 ————— ohne Wärmetauscher

$$\frac{N}{N_0} = \frac{\dot{m} \cdot L_1}{\dot{m}_0 \cdot L_{10}} = \frac{\dot{m} \cdot T_E \cdot \Lambda}{\dot{m}_0 \cdot T_{E0} \cdot \Lambda_0} \quad (20)$$

Für die Menge gilt nach dem Kegelgesetz mit guter Näherung

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} = \frac{\pi}{\pi_0} \sqrt{\frac{T_{40}}{T_4}} \quad (21)$$

In Gl. (20) eingesetzt führt dies auf

$$\frac{N}{N_0} = \frac{\pi}{\pi_0} \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi} \cdot \frac{T_{E0}}{T_E}} \cdot \frac{\Lambda}{\Lambda_0} \quad (22)$$

Nachdem wir nun Wirkungsgrad und Leistung kennen, interessieren wir uns für deren Aenderungen bei einer kleinen Verschiebung des Betriebszustandes.

Bleiben in Gl. (17) ausser π und φ alle Grössen hinreichend genau konstant, gilt für die Aenderung des Wirkungsgrades

$$d\eta_{thi} = \left(\frac{\partial \eta_{thi}}{\partial \mathfrak{J}} \right)_{\Pi} d\mathfrak{J} + \left(\frac{\partial \eta_{thi}}{\partial \Pi} \right)_{\mathfrak{J}} d\Pi \quad (23)$$

$\left(\frac{\partial \eta_{thi}}{\partial \mathfrak{J}} \right)_{\Pi}$ und $\left(\frac{\partial \eta_{thi}}{\partial \Pi} \right)_{\mathfrak{J}}$ sind die partiellen Ableitungen nach \mathfrak{J} bzw.

II. Mit den Abkürzungen

$$v \equiv \mathfrak{J} - \Pi^x \quad (24)$$

$$w \equiv \mathfrak{J} (z\Pi)^{-y} - \Pi^x \quad (25)$$

lässt sich Gl. (17) auch in der Form

$$\eta_{thi} = \frac{\Lambda}{v - \eta_{r^w} \cdot w} \quad (26)$$

schreiben, wobei Λ die in Gl. (19) definierte Kennzahl für die Leistungsausbeute ist.

Wir deuten der einfacheren Schreibweise wegen die partiellen Ableitungen von v , w und Λ durch Indices an. Dann ist

$$\left(\frac{\partial \eta_{thi}}{\partial \mathfrak{J}} \right)_{\Pi} = \frac{(v - \eta_{r^w}) \Lambda_{\mathfrak{J}} - \Lambda (v_{\mathfrak{J}} - \eta_{r^w \mathfrak{J}})}{(v - \eta_{r^w})^2} \quad (27)$$

mit

$$\Lambda_{\mathfrak{J}} \equiv \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathfrak{J}} \right)_{\Pi} = 1 - (z\Pi)^{-y} \quad (28)$$

$$v_{\mathfrak{J}} \equiv \left(\frac{\partial v}{\partial \mathfrak{J}} \right)_{\Pi} = 1 \quad (29)$$

$$w_{\mathfrak{J}} \equiv \left(\frac{\partial w}{\partial \mathfrak{J}} \right)_{\Pi} = (z\Pi)^{-y} \quad (30)$$

und

$$\left(\frac{\partial \eta_{thi}}{\partial \Pi} \right)_{\mathfrak{J}} = \frac{(v - \eta_{r^w}) \Lambda_{\Pi} - \Lambda (v_{\Pi} - \eta_{r^w \Pi})}{(v - \eta_{r^w})^2} \quad (31)$$

mit

$$\Lambda_{\Pi} \equiv \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \Pi} \right)_{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J} y z^{-y} \Pi^{-(y+1)} - x \Pi^{x-1} \quad (32)$$

$$v_{\Pi} \equiv \left(\frac{\partial v}{\partial \Pi} \right)_{\mathfrak{J}} = -x \Pi^{x-1} \quad (33)$$

$$w_{\Pi} \equiv \left(\frac{\partial w}{\partial \Pi} \right)_{\mathfrak{J}} = -\mathfrak{J} y z^{-y} \Pi^{-(y+1)} - x \Pi^{x-1} \quad (34)$$

Somit ist z. B.

$$\frac{d\eta_{thi}}{d\mathfrak{J}} = \underbrace{\left(\frac{\partial \eta_{thi}}{\partial \mathfrak{J}} \right)_{\Pi} + \left(\frac{\partial \eta_{thi}}{\partial \Pi} \right)_{\mathfrak{J}} \frac{d\Pi}{d\mathfrak{J}}}_{(35)}$$

Weiterinteressiert die Aenderung der relativen Leistung N/N_0 bei konstanter Umgebungstemperatur T_E . Für kleine Aenderungen gilt nach Gl. (22)

$$\frac{N + dN}{N} = \frac{\Pi + d\Pi}{\Pi} \sqrt{\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J} + d\mathfrak{J}}} \frac{\Lambda + d\Lambda}{\Lambda} \quad (36)$$

$$\frac{dN}{N} = \frac{d\Pi}{\Pi} + \frac{d\Lambda}{\Lambda} - \frac{d\mathfrak{J}}{2\mathfrak{J}}$$

$$\frac{dN/N}{d\mathfrak{J}} = \frac{1}{\Pi} \frac{d\Pi}{d\mathfrak{J}} + \frac{1}{\Lambda} \frac{d\Lambda}{d\mathfrak{J}} - \frac{1}{2\mathfrak{J}} \quad (37)$$

Analog Gl. (35) kann

$$\frac{d\Lambda}{d\mathfrak{J}} = \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathfrak{J}} \right)_{\Pi} + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \Pi} \right)_{\mathfrak{J}} \frac{d\Pi}{d\mathfrak{J}} \quad (38)$$

gesetzt werden, sodass Gl. (37) übergeht in

$$\frac{dN/N}{d\mathfrak{J}} \bigg|_{T_E=\text{konst}} = \left[\frac{1}{\Pi} + \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \Pi} \right)_{\mathfrak{J}} \right] \frac{d\Pi}{d\mathfrak{J}} + \left[\frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathfrak{J}} \right)_{\Pi} - \frac{1}{2\mathfrak{J}} \right] \quad (39)$$

Bleibt bei variabler Umgebungstemperatur die Höchsttemperatur konstant, folgt aus Gl. (20)

$$\frac{N + dN}{N} = \frac{\pi + d\pi}{\pi} \cdot \frac{T_E + dT_E}{T_E} \frac{\Lambda + d\Lambda}{\Lambda} \quad (40)$$

$$\frac{dN}{N} = \frac{d\pi}{\pi} + \frac{d\Lambda}{\Lambda} + \frac{dT_E}{T_E}$$

$$\frac{dN/N}{d\mathfrak{J}} = \frac{1}{\pi} \frac{d\pi}{d\mathfrak{J}} + \frac{1}{\Lambda} \frac{d\Lambda}{d\mathfrak{J}} + \frac{1}{T_E} \frac{dT_E}{d\mathfrak{J}} \quad (41)$$

Ferner ergibt Gl. (16) abgeleitet

$$\frac{dT_E}{d\mathfrak{J}} = - \frac{T_E}{\mathfrak{J}} \quad (42)$$

Wenn wir jetzt die Gln. (38) und (42) in Gl. (41) einsetzen, bleibt schliesslich

$$\left. \frac{dN/N}{d\mathfrak{J}} \right|_{T_4=\text{konst}} = \left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \pi} \right)_{\mathfrak{J}} \right] \frac{d\pi}{d\mathfrak{J}} + \left[\frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathfrak{J}} \right)_{\pi} - \frac{1}{\mathfrak{J}} \right] \quad (43)$$

In den Gleichungen (35), (39) und (43) sind ausser dem Quotienten $d\pi/d\mathfrak{J}$ alle Grössen durch die thermodynamische Prozessführung gegeben. Einzig die Berechnung von $d\pi/d\mathfrak{J}$ gelingt auf diese Weise nicht mehr. Dieser Quotient ist also offenbar jene charakteristische Grösse, die das Betriebsverhalten einer Gasturbine festlegt.

2.2. Turbine mit festem Leitapparat

Bei einer Turbine mit festem Leitapparat ist der Quotient $d\Pi/d\mathfrak{z}$ durch die Schaltung der einzelnen Maschinen bestimmt. Wir zeigen hier das Vorgehen an einer Gasturbine mit seriegelagerten Turbinen. Für einwellige und parallelgeschaltete Maschinen vergl. Traupel [2].

Wir setzen für das Druckverhältnis der Verdichterturbine

$$\Pi_T \equiv \frac{p_4}{p_4'} \quad (1)$$

und für jenes der Nutzturbine

$$\Pi_N \equiv \frac{p_4'}{p_5} \quad (2)$$

Die Bedingung des Leistungsgleichgewichtes an der Verdichtergruppe heisst dann

$$\Pi^x - 1 = \eta_m \mathfrak{z} [1 - \Pi_T^{-y}] \quad (3)$$

Der Druck zwischen den beiden Turbinen wird festgelegt durch die Bedingung, dass durch beide Turbinen die gleiche Menge durchströmen soll. Nach dem Kegelgesetz gilt für die Verdichterturbine

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} = \frac{p_4}{p_{40}} \sqrt{\frac{T_{40}}{T_4}} \sqrt{\frac{1 - \Pi_T^{-2}}{1 - \Pi_{T_0}^{-2}}} \quad (4)$$

und die Nutzturbine

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} = \frac{p_4'}{p_{4'0}} \sqrt{\frac{T_{4'0}}{T_4'}} \sqrt{\frac{1 - \Pi_N^{-2}}{1 - \Pi_{N0}^{-2}}} \quad (5)$$

Wie in Traupel [2] gezeigt wird, kann für die Temperaturen mit genügender Genauigkeit

$$\sqrt{\frac{T_{4'0}}{T_{4'}}} = \sqrt{\frac{T_{40}}{T_4}} \quad (6)$$

gesetzt werden. Damit folgt aus Gl. (4) und (5)

$$\frac{1 - \pi_T^{-2}}{1 - \pi_{To}^{-2}} = \frac{\pi_T^{-2}}{\pi_{To}^{-2}} \frac{[1 - \pi_N^{-2}]}{[1 - \pi_{No}^{-2}]}$$

$$\frac{1 - \pi_T^{-2}}{1 - \pi_{To}^{-2}} = \frac{\pi_T^{-2} - (\pi_T \cdot \pi_N)^{-2}}{\pi_{To}^{-2} - (\pi_T \cdot \pi_N)^{-2}} \quad (7)$$

Aus den Gln. (1) und (2) ergibt sich die Beziehung

$$\pi_N \cdot \pi_T = z \pi \quad (8)$$

Damit lässt sich das Druckverhältnis der Nutzturbine π_N aus Gl. (7) eliminieren und es bleibt

$$\frac{1 - \pi_T^{-2}}{1 - \pi_{To}^{-2}} = \frac{\pi_T^{-2} - (z\pi)^{-2}}{\pi_{To}^{-2} - (z\pi_o)^{-2}}$$

oder

$$\pi_T^{-2} = \frac{\pi_{To}^{-2} - (z\pi_o)^{-2}}{1 - (z\pi_o)^{-2}} + \frac{1 - \pi_{To}^{-2}}{1 - (z\pi_o)^{-2}} (z\pi)^{-2} \quad (9)$$

Setzen wir vereinfachend

$$A \equiv \frac{\pi_{To}^{-2} - (z\pi_o)^{-2}}{1 - (z\pi_o)^{-2}} \quad (10)$$

und

$$B \equiv \frac{1 - \pi_{To}^{-2}}{1 - (z\pi_o)^{-2}} \quad (11)$$

ist

$$\pi_T^{-2} = A + B (z\pi)^{-2} \quad (12)$$

$$1 - \pi_T^{-y} = 1 - [A + B (z\pi)^{-2}]^{\frac{y}{2}} \quad (13)$$

und in Gl. (3) eingesetzt

$$\vartheta = \frac{\pi^x - 1}{\eta_m \left[1 - \left(A + \frac{B}{(z\pi)^2} \right)^{\frac{y}{2}} \right]} \quad (14)$$

Damit ist die für diese Schaltung typische Zuordnung zwischen Druck- und Temperaturverhältnis aufgefunden. Die Differentiation liefert

$$\frac{d\pi}{d\vartheta} = \frac{\pi^x - 1}{\vartheta x \pi^{x-1} - \frac{\vartheta^2 y B}{z^2 \pi^3} \pi_T^{2-y}} \quad (15)$$

wobei π_T durch Gl. (12) gegeben ist. Die Grösse $d\pi/d\vartheta$ kann jetzt in die Gln.

2.1. (35), (39) und (43) eingesetzt werden, womit die gesuchten Werte für Wirkungsgrad- und Leistungsänderungen bestimmt sind.

2.3. Vereinfachtes Durchflussgesetz für Turbinen mit verstellbarem Leitapparat

Wir betrachten eine Turbine, deren erster Leitschaufelkranz verstellbar ist (Abb. 1). Wiederum versuchen wir, mit möglichst wenig speziellen Voraussetzungen zum Ziel zu kommen.

Der Entspannungsverlauf, welcher in Abb. 1 durch die ausgezogene Linie dargestellt wird, sei durch die gestrichelt eingetragene Polytrope mit konstantem Exponenten n_T ersetzt.

Zur weiteren Behandlung teilen wir die Turbine in zwei Abschnitte auf. Der erste Teil zwischen den Zustandspunkten A und B stellt darin im wesentlichen eine Düse mit variablem Querschnitt dar. Kennzeichnen wir die zuge-

hörigen Größen mit einem Strich ('), heisst das Durchflussgesetz

$$\dot{m} = f' \cdot \psi' \cdot P_A \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{1}{RT_A}} \quad (1)$$

wobei P_A und T_A Totaldruck und Totaltemperatur am Eintritt, f' den Durchflussquerschnitt und ψ' die Durchflussfunktion

$$\psi' \equiv \sqrt{\left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{2}{n_T}} - \left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{n_T+1}{n_T}}} \quad (2)$$

darstellen. Ferner ist p_B der statische Druck nach dem Leitapparat im Punkte B. Ändert sich nun der Leitradquerschnitt f' um df' , ändern sich auch ψ' und \dot{m} .

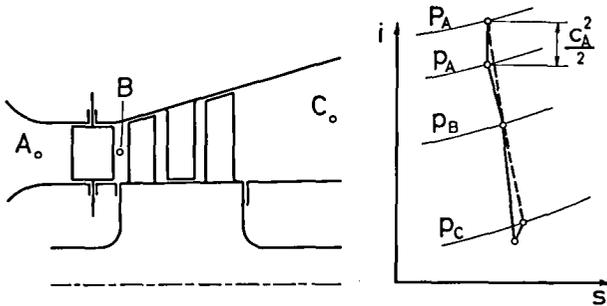


Abb. 2.3.1. Schema einer Turbine mit verstellbarem Leitapparat und Entspannungsverlauf im i, s - Diagramm

Bei konstantem Totalzustand vor dem Leitrad ist dann

$$\dot{m} + d\dot{m} = (f' + df')(\psi' + d\psi') P_A \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{1}{RT_A}} \quad (3)$$

und nach Division durch Gl. (1)

$$1 + \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \left(1 + \frac{df'}{f'}\right) \left(1 + \frac{d\psi'}{\psi'}\right)$$

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{df'}{f'} + \frac{d\psi'}{\psi'} \quad (4)$$

Setzen wir für die relativen Aenderungen der Durchsatzmenge

$$d\dot{M} \equiv \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \quad (5)$$

und des Durchflussquerschnittes

$$d\phi \equiv \frac{df'}{f'} \quad (6)$$

bleibt für konstanten Anfangszustand

$$d\dot{M} = \frac{d\psi'}{\psi'} + d\phi \quad (7)$$

Definieren wir ferner mit

$$\Pi' \equiv \frac{P_A}{P_B} \quad (8)$$

das am Leitrad umgesetzte Druckverhältnis, ist

$$\psi' = \sqrt{(\Pi')^{-\frac{2}{n_T}} - (\Pi')^{-\frac{n_T+1}{n_T}}} \quad (9)$$

und die Ableitung nach Π'

$$\frac{d\psi'}{d\Pi'} = \frac{-\frac{2}{n_T} (\Pi')^{-\frac{2}{n_T}} + \frac{n_T+1}{n_T} (\Pi')^{-\frac{n_T+1}{n_T}}}{2\Pi' \sqrt{(\Pi')^{-\frac{2}{n_T}} - (\Pi')^{-\frac{n_T+1}{n_T}}}} \quad (10)$$

womit Aenderungen der Durchflussfunktion auf Aenderungen des Druckverhältnis-

ses zurückgeführt sind. Der in Gl. (7) vorkommende Ausdruck $d\psi'/\psi'$ ergibt sich dann aus

$$\frac{d\psi'}{\psi'} = \frac{-\frac{2}{n_T} (\Pi')^{-\frac{2}{n_T}} + \frac{n_T+1}{n_T} (\Pi')^{-\frac{n_T+1}{n_T}}}{2\Pi' \left[(\Pi')^{-\frac{2}{n_T}} - (\Pi')^{-\frac{n_T+1}{n_T}} \right]} \quad (11)$$

Der zweite Abschnitt $B \rightarrow C$, dessen Grössen wir mit Doppelstrich (") kennzeichnen wollen, besitzt keine beweglichen Leitschaufeln mehr. Hier gilt daher das allgemeine Durchflussgesetz

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} = \frac{p_B}{p_{Bo}} \sqrt{\frac{T_{Bo}}{T_B}} F'' (\Pi'', n^*) \quad (12)$$

Die Indices 0 verweisen auf einen bekannten Punkt, z. B. den Auslegungspunkt (vergl. Fussnote S. 18). F'' ist eine vorläufig noch nicht näher bekannte Durchflussfunktion, welche vom Druckverhältnis

$$\Pi'' \equiv \frac{p_B}{p_C} \quad (13)$$

und der auf die Anfangstemperatur reduzierten Drehzahl

$$n^* \equiv \frac{n}{n_0} \sqrt{\frac{T_{Bo}}{T_B}} \quad (14)$$

abhängt. Für konstanten Gegendruck p_C geht Gl. (12) über in

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} = \frac{\Pi''}{\Pi''_0} \sqrt{\frac{T_{Bo}}{T_B}} F'' (\Pi'', n^*) \quad (15)$$

Für eine kleine Veränderung des Betriebszustandes der Turbine ist

$$\frac{\dot{m} + d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{\Pi'' + d\Pi''}{\Pi''} \sqrt{\frac{T_B}{T_B + dT_B}} (1 + dF'') \quad (16)$$

Daraus folgt

$$1 + \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \left(1 + \frac{d\Pi''}{\Pi''}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{dT_B}{T_B}\right) (1 + dF'')$$

oder unter Verwendung von Gl. (5)

$$d\dot{M} = \frac{d\Pi''}{\Pi''} - \frac{dT_B}{2T_B} + dF'' \quad (17)$$

Wir haben vorausgesetzt, dass die Entspannung der in Abb. 1 gestrichelt gezeichneten Polytropen mit konstantem Exponenten n_T folgen soll. Somit gilt für die Temperatur T_B das Polytropengesetz

$$\frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{\frac{n_T-1}{n_T}} \quad (18)$$

$$\frac{T_B}{T_A} = \Pi' \quad (19)$$

Die Ableitung nach Π' ergibt

$$\frac{dT_B}{d\Pi'} = T_A \cdot \left(-\frac{n_T-1}{n_T}\right) \frac{\Pi'}{\Pi'} \cdot \frac{-\frac{n_T-1}{n_T}}{\Pi'}$$

$$\frac{dT_B}{T_B} = -\frac{n_T-1}{n_T} \cdot \frac{d\Pi'}{\Pi'} \quad (20)$$

womit Gl. (17) übergeht in

$$d\dot{M} = \frac{d\Pi''}{\Pi''} + \frac{n_T-1}{2n_T} \frac{d\Pi'}{\Pi'} + dF'' \quad (21)$$

Werden nun ein verstellbarer Leitapparat, charakterisiert durch Gl. (7) und eine Turbine mit fester Geometrie, die Gl. (21) gehorcht, hintereinandergeschaltet, ergibt sich wegen des gleichen Massendurchsatzes durch beide Teile die Bedingung

$$\frac{d\psi'}{\psi'} + d\phi = \frac{d\pi''}{\pi''} + \frac{n_T - 1}{2n_T} \frac{d\pi'}{\pi'} + dF'' \quad (22)$$

Diese Gleichung beschreibt das Verhalten einer Turbine mit beweglichem erstem Leitrad unter den Bedingungen konstanten Anfangszustandes und konstanten Gegendruckes. Demzufolge ist auch das gesamte Druckverhältnis

$$\pi_G \equiv \frac{P_A}{P_C} \quad (23)$$

konstant und aus

$$\pi_G = \pi' \cdot \pi'' \quad (24)$$

ergibt sich durch Differentiation der Zusammenhang

$$\pi' \cdot d\pi'' + \pi'' \cdot d\pi' = 0$$

$$\frac{d\pi''}{\pi''} = - \frac{d\pi'}{\pi'} \quad (25)$$

Damit vereinfacht sich Gl. (22) zu

$$d\phi = - \frac{d\pi'}{\pi'} + \frac{n_T - 1}{2n_T} \frac{d\pi'}{\pi'} - \frac{d\psi'}{\psi'} + dF''$$

$$d\phi = - \frac{n_T + 1}{2n_T} \frac{d\pi'}{\pi'} - \frac{d\psi'}{\psi'} + dF'' \quad (26)$$

Ebenso kann Gl. (21) umgeformt werden zu

$$dM = - \frac{n_T + 1}{2n_T} \frac{d\pi'}{\pi'} + dF'' \quad (27)$$

Die Funktion F'' hängt von Π'' und n^* ab. T_B lässt sich nach Gl. (19) auf Π' zurückführen, sodass für eine feste Drehzahl n^* nur noch eine Funktion von Π' allein ist. Ebenso kann Π'' nach Gl. (24) durch Π' und Π_G ausgedrückt werden. Sowohl $d\phi$ (Gl. (26)) als auch $d\dot{M}$ (Gl. (27)) sind demnach Funktionen von Π' und Π_G allein. Damit gilt auch für den Quotienten

$$\left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \phi} \right)_{\Pi_G} = \frac{d\dot{M}}{d\phi} = \text{Funktion}(\Pi', \Pi_G) \quad (28)$$

Mit der Bezeichnung $(\partial \dot{M} / \partial \phi)_{\Pi_G}$ wurde an die Voraussetzung erinnert, dass die Untersuchung bei konstantem Gesamtdruckverhältnis durchgeführt wurde.

Bei einer festen Leitradstellung kann für die gesamte Maschine ein Gl. (17) analoges Durchflussgesetz angegeben werden

$$d\dot{M} = \frac{d\Pi_G}{\Pi_G} - \frac{dT_C}{2T_C} + dF_G \quad (29)$$

Mit der aus dem Polytropengesetz folgenden Beziehung für konstanten Austrittsdruck p_C

$$\frac{dT_C}{T_C} = - \frac{n_T - 1}{n_T} \frac{d\Pi_G}{\Pi_G} \quad (30)$$

verbleibt schliesslich

$$d\dot{M} = \frac{n_T + 1}{2n_T} \cdot \frac{d\Pi_G}{\Pi_G} + dF_G \quad (31)$$

$$\left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \Pi_G} \right)_{\phi} = \frac{n_T + 1}{2n_T} \frac{1}{\Pi_G} \frac{dF_G}{\Pi_G} \quad (32)$$

Mit der Schreibweise der partiellen Ableitung wird daran erinnert, dass ϕ an sich variabel ist und nur in diesem speziellen Fall konstant gesetzt wird. Gl. (32)

ist eine Funktion von Π_G allein.

Für irgend eine Verschiebung des Betriebszustandes, die dem angegebenen Polytropengesetz entspricht, ist aber

$$d\dot{M} = \left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \phi} \right) \Pi_G d\phi + \left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \Pi_G} \right) \phi \cdot d\Pi_G \quad (33)$$

Durch Auflösen nach $d\phi$ kann jetzt die jeweils notwendige Verstellfläche ermittelt werden.

$$d\phi = \frac{d\dot{M} - \left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \Pi_G} \right) \phi \cdot d\Pi_G}{\left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \phi} \right) \Pi_G} \quad (34)$$

Soll bei festgehaltener Durchflussmenge das Druckverhältnis Π_G durch Leitradstellung verschoben werden, ist $d\dot{M} = 0$, also

$$d\phi = - \frac{\left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \Pi_G} \right) \phi}{\left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \phi} \right) \Pi_G} d\Pi_G \quad (35)$$

oder anders geschrieben

$$\frac{1}{\Pi_G} \left(\frac{\partial \Pi_G}{\partial \phi} \right) \dot{M} = - \frac{\left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \phi} \right) \Pi_G}{\left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \Pi_G} \right) \phi} \quad (36)$$

Dieser Ausdruck ist wiederum eine Funktion von Π' und Π_G allein. Er hat vor allem eine Bedeutung, wenn man vom Verfahren der Leistungsumleitung Gebrauch machen will. (Vergl. [2], Abschn. 14.6.). Durch Verstellung des Leitapparates kann bei ungefähr konstant gehaltener Durchsatzmenge das Druckniveau zwischen den beiden Turbinen verschoben und so die regeltechnische Trägheit der Anlage verkleinert werden.

Offen war bis jetzt noch die Wahl der Durchflussfunktion

$$F = F(\Pi, n^*) \quad (37)$$

Tatsächlich existiert keine universelle Funktion, die das Verhalten beliebiger Turbinen beschreibt. Man kann zwar auf gemessene oder gerechnete Charakteristiken (vergl. Kap. 3) zurückgreifen und diese dann graphisch oder numerisch differenzieren, doch sind hierzu wiederum spezielle Voraussetzungen notwendig. Auch dürfte sich dieser Aufwand kaum lohnen. Viel eher greift man zum Kegelgesetz, das den Ausdruck

$$F = \sqrt{\frac{1 - \Pi - \frac{n_T+1}{n_T}}{1 - \Pi_0 - \frac{n_T+1}{n_T}}} \quad (38)$$

liefert, oder zum Durchflussgesetz einer Düse

$$F = \sqrt{\frac{\Pi - \frac{2}{n_T} - \frac{n_T+1}{n_T}}{\Pi_0 - \frac{2}{n_T} - \frac{n_T+1}{n_T}}} \quad (39)$$

das für einstufige Maschinen gute Näherungswerte ergibt. Die Ableitungen heißen dann für das Kegelgesetz

$$\frac{dF}{d\Pi} = \frac{\frac{n_T+1}{n_T} \Pi - \frac{n_T+1}{n_T}}{2 \Pi (1 - \Pi - \frac{n_T+1}{n_T})} \quad (40)$$

und das Düsendgesetz

$$\frac{dF}{d\pi} = \frac{-\frac{2}{n_T} \pi^{-\frac{2}{n_T}} + \frac{n_T+1}{n_T} \pi^{-\frac{n_T+1}{n_T}}}{2\pi \left[\pi^{-\frac{2}{n_T}} - \pi^{-\frac{n_T+1}{n_T}} \right]} \quad (41)$$

Wird das vereinfachte Kegelgesetz

$$F = \sqrt{\frac{1 - \pi^{-2}}{1 - \pi_0^{-2}}} \quad (42)$$

verwendet, ergibt sich der verblüffend einfache Ausdruck

$$\frac{dF}{d\pi} = \frac{1}{\pi (\pi^2 - 1)} \quad (43)$$

Alle bis jetzt hergeleiteten Formeln gelten nur, bis in einem Querschnitt die Geschwindigkeit maximaler Massenstromdichte erreicht wird. Dieser Zustand kann vor allem beim Verstelleitrad in stark geschlossenem Zustand auftreten. Das Durchflussgesetz Gl. (7) vereinfacht sich dann wegen

$$d\psi' = 0 \quad (44)$$

zu

$$d\dot{M} = d\phi \quad (45)$$

oder

$$\frac{\left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \phi} \right)_{\pi_G}}{\circ} = 1 \quad (46)$$

Abb. 2 zeigt den Verlauf der Funktion $(\partial \dot{M} / \partial \phi)_{\Pi_G}$, wobei wiederum $\kappa = 1,375$ und $\gamma_p = 0,9$ vorausgesetzt sind. Als Abszisse ist das am verstellbaren Leitapparat umgesetzte Druckverhältnis Π' (Def. Gl. (8)) gewählt. Dieses ist denn auch der wesentliche Parameter und nur für kleine Gesamtdruckverhältnisse (etwa $\Pi_G < 2$) wird auch dessen Einfluss merkbar. Als Durchflussfunktion wurde für den Abschnitt B \rightarrow C (vergl. Abb. 1) das Kegelgesetz verwendet. Zu Vergleichszwecken sind für das Druckverhältnis $\Pi_G = 2$ in Abb. 3 noch jene Werte aufgetragen, die sich bei Verwendung des Düsengesetzes, sowie für einen konstanten Wert $F'' = 1$ ergeben. Alle drei Kurven zeigen qualitativ denselben Verlauf.

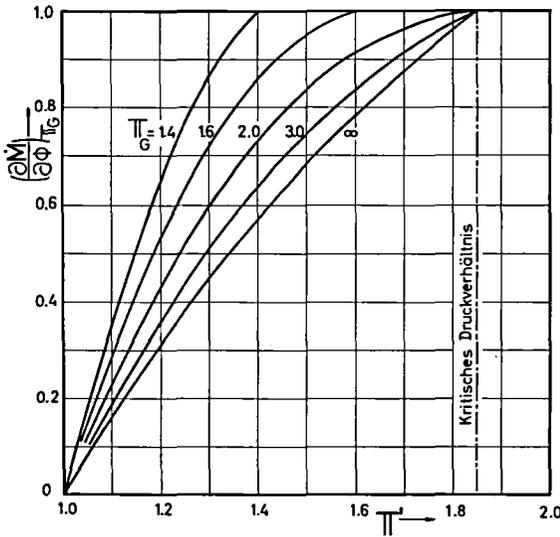


Abb. 2.3.2. Mengenänderung bei verändertem Querschnitt und konstantem Druckverhältnis

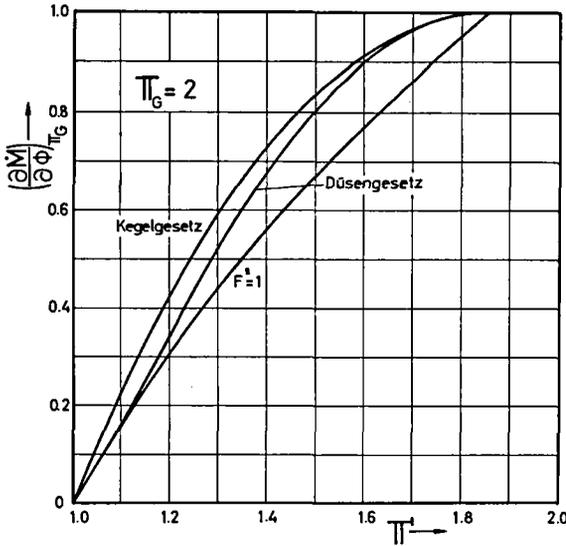


Abb. 2.3.3. Vergleich verschiedener Durchflussgesetze

Abb. 4 zeigt entsprechend Gl. (32) $(\partial \dot{M} / \partial \pi_G)_{\phi}$ als Funktion des Gesamtdruckverhältnisses π_G . Scheinbar spielt hier das im ersten Leitrad umgesetzte Druckverhältnis keine Rolle. Das als Durchflussfunktion verwendete Kegelgesetz gilt jedoch herleitungsgemäss (vergl. [1]) nur für kleine Druckänderungen pro Stufe. Andererseits ist für kritisches Druckverhältnis im ersten Leitrad $F_G = 1$. Alle Zwischenwerte liegen somit in dem auf Abb. 4 schraffierten Bereich.

Dieselbe Ueberlegung gilt auch für Abb. 5, die den nach Gl. (36) gerechneten Ausdruck $1/\pi_G \cdot (\partial \pi_G / \partial \phi)_{\dot{M}}$ zeigt. Die gezeichnete Kurvenschar für verschiedene Druckverhältnisse π_G gilt bei kleinem Leitradruckverhältnis π' . Für kritische Verhältnisse ergibt sich unabhängig von π_G die mit ∞ angeschriebene Kurve. Der Ausdruck $1/\pi_G \cdot (\partial \pi_G / \partial \phi)_{\dot{M}}$ ist also praktisch proportional dem Druckverhältnis am Verstellleitrad.

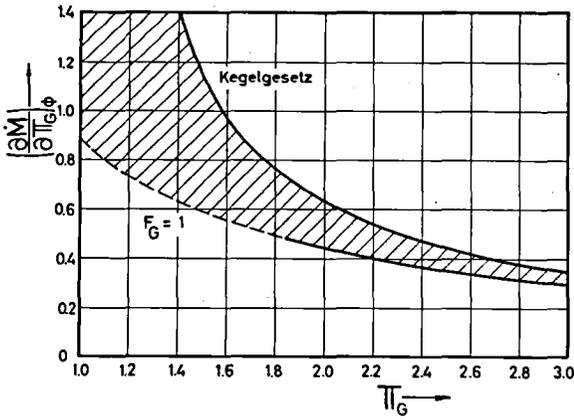


Abb. 2.3.4. Mengenänderung bei verändertem Druckverhältnis und konstantem Durchflussquerschnitt

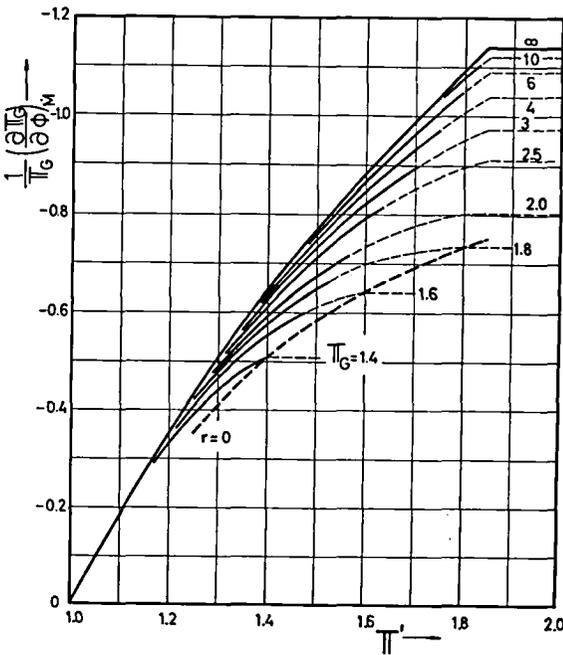


Abb. 2.3.5. Druckänderung vor der Turbine bei einer Änderung des Querschnittes und konstanter Durchsatzmenge

2.4. Turbine mit verstellbarem Leitapparat

Die freilaufende Nutzturbine soll mit einem verstellbaren Leitapparat versehen werden. Damit verliert hier das Kegelgesetz seine Gültigkeit. Wir verwenden das in Abschnitt 2.3. hergeleitete Durchflussgesetz, in welches ausser den Druckverhältnissen auch die Stellung des Leitapparates eingeht. Auch der Quotient $d\Pi/d\mathfrak{J}$ wird eine Funktion der Leitapparatstellung und kann so gesteuert werden, dass für den Gasturbinenbetrieb optimale Verhältnisse entstehen.

Die grosse Klimaempfindlichkeit und insbesondere der oft beträchtliche Leistungsabfall bei Erhöhung der Umgebungstemperatur gehören zu den unangenehmen Eigenschaften der Gasturbine. Ein verstellbarer Leitapparat gibt uns die Möglichkeit, ohne Erhöhung der Höchsttemperatur die Leistung konstant zu halten. Aus der Bedingung

$$\left. \frac{1}{N_0} \frac{\partial N}{\partial \mathfrak{J}} \right|_{T_4 = \text{konst.}} = 0 \quad (1)$$

folgt durch Einsetzen in Gl. 2.1. (43)

$$\left[\frac{1}{\Pi} + \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \Pi} \right)_{\mathfrak{J}} \right] \cdot \frac{d\Pi}{d\mathfrak{J}} + \left[\frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathfrak{J}} \right)_{\Pi} - \frac{1}{\mathfrak{J}} \right] = 0$$

$$\frac{d\Pi}{d\mathfrak{J}} = \frac{\frac{\mathfrak{J}}{\Lambda} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathfrak{J}} \right)_{\Pi} - 1}{\frac{\mathfrak{J}}{\Pi} + \frac{\mathfrak{J}}{\Lambda} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \Pi} \right)_{\mathfrak{J}}} \quad (2)$$

Gl. (2) gibt jenen Zusammenhang zwischen Π und \mathfrak{J} , der einzuhalten ist, damit bei Schwankungen der Umgebungstemperatur die Leistung konstant bleibt. In der Form

$$\Delta \Pi = \frac{\frac{\mathfrak{J}}{\Lambda} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathfrak{J}} \right)_{\Pi} - 1}{\frac{\mathfrak{J}}{\Pi} + \frac{\mathfrak{J}}{\Lambda} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \Pi} \right)_{\mathfrak{J}}} \Delta \mathfrak{J} \quad (3)$$

geschrieben können die für kleine Temperaturänderungen notwendigen Druckänderungen berechnet werden. $\Delta \mathfrak{z}$ folgt dabei aus Gl. 2. 1. (16)

$$\mathfrak{z} = \frac{T_4}{T_E} \quad (4)$$

durch Differentiation bei konstanter Höchsttemperatur

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dT_E} = - \frac{T_4}{T_E^2} \quad (5)$$

oder für endlich kleine Verschiebungen

$$\Delta \mathfrak{z} = - \frac{\mathfrak{z}}{T_E} \Delta T_E \quad (6)$$

Die Verstellfläche ergibt sich aus dem Durchflussgesetz Gl. 2. 3. (34), welches für endlich kleine Verschiebungen

$$\Delta \phi = \frac{\Delta \dot{M} - \left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \pi_N} \right) \phi \cdot \Delta \pi_N}{\left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \phi} \right) \pi_N} \quad (7)$$

heisst. Der Index N soll daran erinnern, dass hier das Druckverhältnis der Nutzturbine massgebend ist. Die Durchsatzmenge ist nach dem vereinfachten Kegelgesetz (welches für den Hochdruckteil nach wie vor gilt)

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} = \frac{\pi}{\pi_0} \sqrt{\frac{T_{40}}{T_4}} \quad (8)$$

Für kleine Verschiebungen gilt (Ableitung analog Gl. 2. 3. (17))

$$\Delta \dot{M} = \frac{\Delta \pi}{\pi} - \frac{\Delta T_4}{2T_4} \quad (9)$$

Gl. (9) in Gl. (7) eingesetzt, ergibt für die notwendige Verstellfläche

$$\Delta \phi = \frac{\frac{\Delta \Pi}{\Pi} - \frac{\Delta T_4}{2T_4} - \left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \Pi_N} \right) \phi \cdot \Delta \Pi_N}{\left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \phi} \right) \Pi_N} \quad (10)$$

Für konstante Höchsttemperatur ist speziell

$$\Delta \phi = \frac{\frac{\Delta \Pi}{\Pi} - \left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \Pi_N} \right) \phi \cdot \Delta \Pi_N}{\left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \phi} \right) \Pi_N} \quad (11)$$

Die Aenderung des Druckverhältnisses der Nutzturbine $\Delta \Pi_N$ muss jetzt noch auf die Aenderungen von Π und \mathfrak{z} zurückgeführt werden. Die Differentiation der Gleichung für das Leistungsgleichgewicht

$$\Pi^x - 1 = \gamma_m \mathfrak{z} \left[1 - \Pi_T^{-y} \right] \quad (12)$$

nach Π ergibt

$$x \Pi^{x-1} = \gamma_m \left[\mathfrak{z} y \Pi_T^{-y-1} \cdot \frac{d \Pi_T}{d \Pi} + \left[1 - \Pi_T^{-y} \right] \frac{d \mathfrak{z}}{d \Pi} \right] \quad (13)$$

Aus der Zuordnung der Druckverhältnisse

$$z \Pi = \Pi_T \cdot \Pi_N \quad (14)$$

folgt

$$\frac{d \Pi_T}{d \Pi} = \frac{z \Pi_N - z \Pi \frac{d \Pi_N}{d \Pi}}{\Pi_N^2} \quad (15)$$

und eingesetzt in Gl. (13) verbleibt

$$x \pi^{x-1} = \eta_m \left\{ \vartheta^y \pi_T^{-y-1} \cdot \frac{z \pi_N - z \pi}{\pi_N^2} \frac{d\pi_N}{d\pi} + [1 - \pi_T^{-y}] \frac{d\vartheta}{d\pi} \right\}$$

$$\frac{d\pi_N}{d\pi} = \frac{\pi (\pi^x - 1) \frac{d\vartheta}{d\pi} + [\eta_m \vartheta^2 y \pi_T^{-y} - \vartheta x \pi^x]}{\eta_m \vartheta^2 y \pi_T^{-y+1} \cdot \frac{1}{z}} \quad (16)$$

Für endlich kleine Aenderungen bedeutet dies

$$\Delta \pi_N = \frac{\pi (\pi^x - 1) \Delta \vartheta + [\eta_m \vartheta^2 y \pi_T^{-y} - \vartheta x \pi^x] \Delta \pi}{\eta_m \vartheta^2 y \pi_T^{-y+1} \cdot \frac{1}{z}} \quad (17)$$

Die Anpassung des Höchstdruckes bedingt eine Aenderung der Drehzahl an der freilaufenden Verdichtergruppe. Für einen Verdichter mit einer Turbine als Verbraucher gilt mit guter Näherung

$$\frac{\Delta i_{sv}}{\Delta i_{svo}} = \left(\frac{n}{n_o} \right)^2 \quad (18)$$

$$\frac{c_p \cdot T_E \cdot \psi_k}{c_p \cdot T_{Eo} \cdot \psi_{ko}} = \left(\frac{n}{n_o} \right)^2 \quad (19)$$

mit

$$\psi_k \equiv \pi^x - 1 \quad (20)$$

oder

$$\frac{n}{n_o} = \sqrt{\frac{T_E \cdot \psi_k}{T_{Eo} \cdot \psi_{ko}}} \quad (21)$$

In der Nähe eines bekannten Betriebspunktes ist

$$\frac{n + \Delta n}{n} = \sqrt{\frac{T_E + \Delta T_E}{T_E}} \sqrt{\frac{\psi_k + \Delta \psi_k}{\psi_k}} \quad (22)$$

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta T_E}{2T_E} + \frac{\Delta \psi_k}{2\psi_k} \quad (23)$$

Aus Gl. (20) folgt durch Differentiation nach Π

$$\frac{d\psi_k}{d\Pi} = x \Pi^{x-1} \quad (24)$$

was in Gl. (23) eingesetzt auf

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta T_E}{2T_E} + \frac{x\Pi^{x-1}}{2(\Pi^{x-1})} \Delta \Pi \quad (25)$$

führt und damit die zur Aufrechterhaltung der Leistung notwendige Drehzahländerung ergibt.

Für die Änderung des Wirkungsgrades gilt Gl. 2.1. (23)

$$\Delta \eta_{thi} = \left(\frac{\partial \eta_{thi}}{\partial \vartheta} \right)_{\Pi} \Delta \vartheta + \left(\frac{\partial \eta_{thi}}{\partial \Pi} \right)_{\vartheta} \Delta \Pi \quad (26)$$

wobei sich die partiellen Ableitungen nach Π und ϑ nach Gl. 2.1. (27) ... (34) angeben lassen.

Für eine gegebene Erhöhung der Umgebungstemperatur ΔT_E folgen aus Gl. (6) $\Delta \vartheta$, aus Gl. (3) $\Delta \Pi$ und aus Gl. (17) $\Delta \Pi_N$. Damit lassen sich alle gesuchten Größen ermitteln, nämlich aus Gl. (10) die notwendige Verstellfläche $\Delta \phi$, aus Gl. (25) die Drehzahländerung $\frac{\Delta n}{n}$ der freilaufenden Verdichtergruppe und aus Gl. (26) die Änderung des Wirkungsgrades $\Delta \eta_{thi}$.

Die wichtigsten Ergebnisse dieser Untersuchung sind in Diagrammform dargestellt. Abb. 1 zeigt für eine Maschine mit festem Leitapparat den Leistungsabfall bei einer Erhöhung der Umgebungstemperatur um 10°C und konstanter Höchsttemperatur (ϑ ist das Temperaturverhältnis im Auslegungspunkt). Dieser Leistungsabfall kann mit einem beweglichen Leitapparat verhindert werden. Hierzu sind die

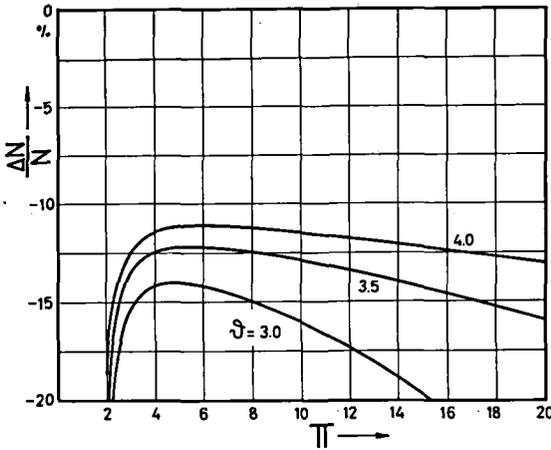


Abb. 2.4.1. Leistungsabfall in Prozenten für eine Steigerung der Umgebungstemperatur um 10°C .

in Abb. 2 ... 4 gezeigten Flächenänderungen notwendig. Man sieht einerseits, dass sich diese bei Maschinen mit üblichen Druckverhältnissen in durchaus annehmbaren Grenzen halten, andererseits aber auch, dass es zweckmässig ist, am beweglichen Leitapparat ein Druckverhältnis Π' von mindestens 1,5 umzusetzen. Die Aenderungen der Drehzahl $\frac{\Delta n}{n}$ zeigt Abb. 5. Auch diese sind tragbar und übersteigen praktisch kaum je 5 %. Ueber den Wirkungsgradabfall orientieren Abb. 6 ... 8. Für Gasturbinen ohne Rekuperator ist in allen wichtigen Fällen eine Verbesserung gegenüber der konventionellen Anlage zu erwarten, während bei Anlagen mit Wärmerückgewinn fast durchwegs eine Verschlechterung eintritt.

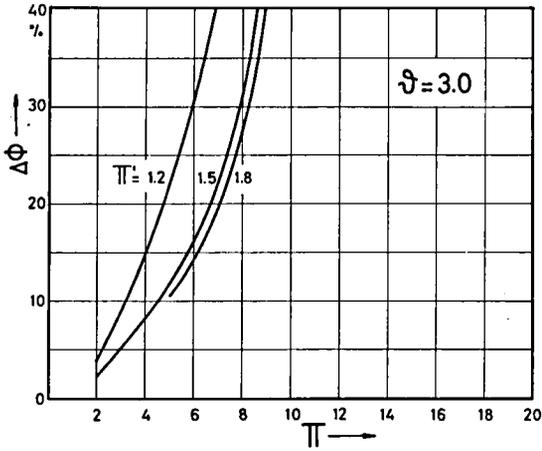


Abb. 2.4.2. Notwendige Verstellfläche in Prozenten, um bei einer Erhöhung der Umgebungstemperatur um 10°C die Leistung konstant zu halten.

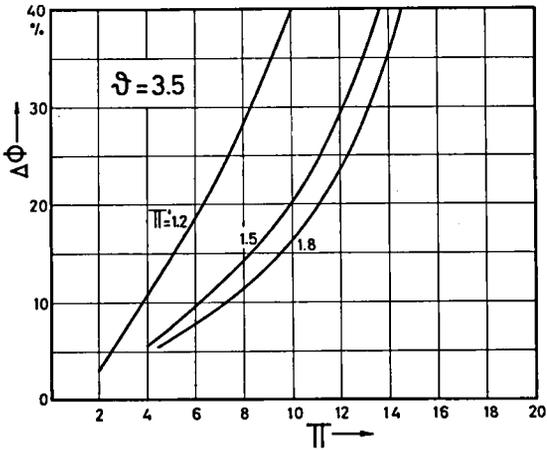


Abb. 2.4.3. Notwendige Verstellfläche in Prozenten, um bei einer Erhöhung der Umgebungstemperatur um 10°C die Leistung konstant zu halten.

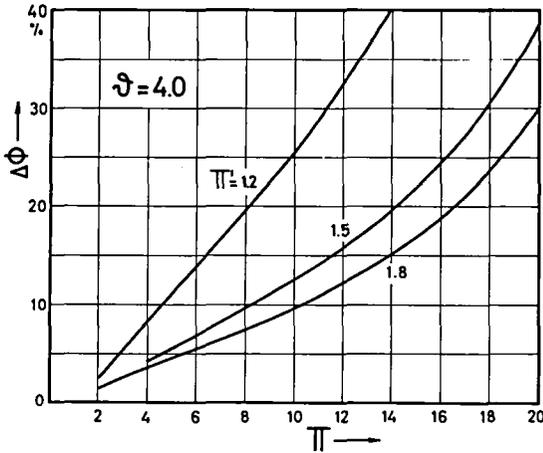


Abb. 2.4.4. Notwendige Verstellfläche in Prozenten, um bei einer Erhöhung der Umgebungstemperatur um 10°C die Leistung konstant zu halten.

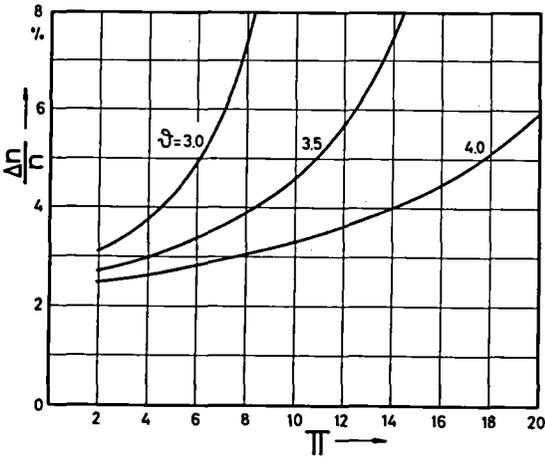


Abb. 2.4.5. Drehzahlsteigerung an der Verdichterguppe, wenn bei einer Erhöhung der Umgebungstemperatur um 10°C die Leistung konstant gehalten werden soll.

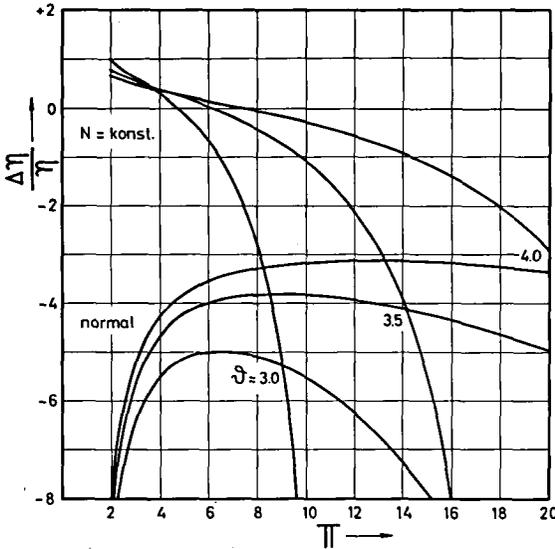


Abb. 2.4.6. Wirkungsgradänderung in Prozenten bei einer Steigerung der Umgebungstemperatur um 10°C . Anlage ohne Rekuperator.

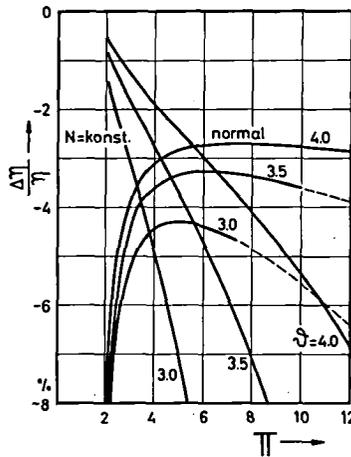


Abb. 2.4.7. Wirkungsgradänderung in Prozenten bei einer Steigerung der Umgebungstemperatur um 10°C . Rekuperatorwirkungsgrad $\eta_r = 0.75$.

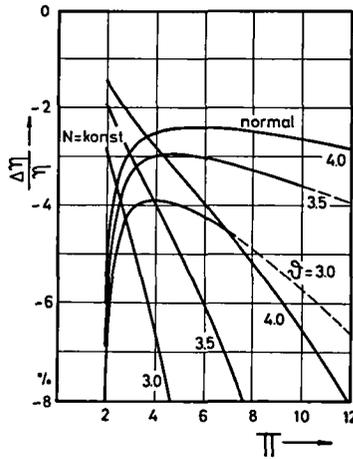


Abb. 2. 4. 8. Wirkungsänderung in Prozenten bei einer Steigerung der Umgebungstemperatur um 10°C. Rekuperatorwirkungsgrad $\eta_r = 0.9$.

Zur Untersuchung des Teillastverhaltens setzen wir konstanten Umgebungszustand voraus. Die Leistung ist nach Gl. 2. 1. (22)

$$\frac{N}{N_0} = \frac{\Pi}{\Pi_0} \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}} \frac{\Lambda}{\Lambda_0} \quad (27)$$

oder

$$N = \frac{N_0}{\Pi_0} \cdot \frac{\sqrt{\beta_0}}{\Lambda_0} \frac{\Pi \Lambda}{\sqrt{\beta}} \quad (28)$$

Der Ausdruck

$$X_0 \equiv \frac{N_0 \cdot \sqrt{\beta_0}}{\Pi_0 \cdot \Lambda_0} \quad (29)$$

stellt dabei eine charakteristische Maschinengröße dar. Für die Leistung bleibt

$$N = X_0 \cdot \frac{\Pi \cdot \Lambda}{\sqrt{\beta}} \quad (30)$$

In Abb. 9 ist für eine Anlage ohne Wärmetauscher der Wirkungsgrad η_{thi} als Funktion von $\frac{\Pi \Lambda}{\sqrt{\beta}}$ mit β als Parameter aufgetragen. Der als Abszisse gewählte Ausdruck $\frac{\Pi \Lambda}{\sqrt{\beta}}$ ist für eine gegebene Maschine bis auf den Masstabfaktor X_0 gleichbedeutend mit der Leistung N . Die günstigsten Betriebspunkte liegen nun offenbar auf der durch die Schar gebildeten Hüllkurve (wir kommen später auf deren numerische Festlegung zurück). Auf dieser Hüllkurve gilt ein ganz bestimmter Zusammenhang zwischen Druck- und Temperaturverhältnis und dieser muss eingehalten werden, damit Teillast unter optimalen Bedingungen gefahren werden kann.

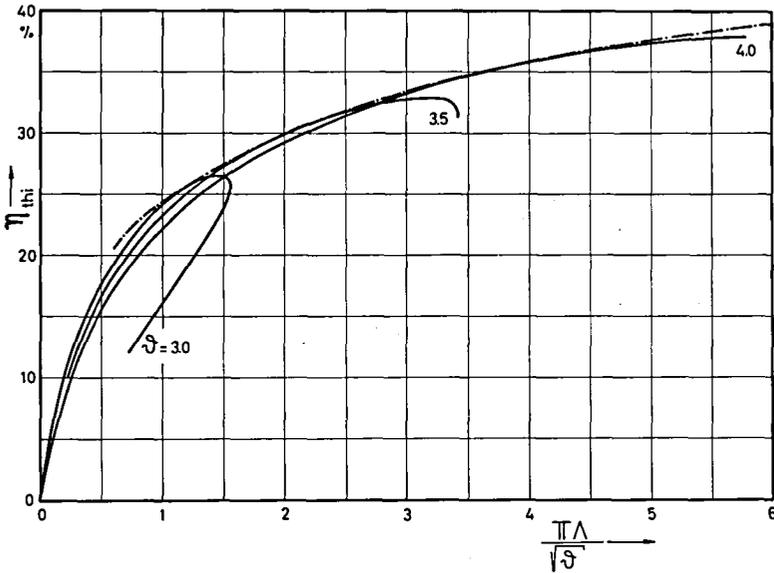


Abb. 2.4.9. Wirkungsgradverlauf von Gasturbinen ohne Rekuperator

Diese Regel ist jedoch nur anwendbar, wenn der Auslegungspunkt bereits auf dieser Hüllkurve liegt. Um auch den allgemeinen Fall beurteilen zu können, zeichnen wir nochmals den Zusammenhang zwischen η_{thi} , $\frac{\Pi \Lambda}{\sqrt{\beta}}$, Π und β auf (Abb. 10), wählen aber diesmal Π als Ordinate. Auch tragen wir die Linien konstanten Wirkungsgrades ein. Die optimale Zuordnung von Temperatur- und Druckverhältnis (welche der Hüllkurve in Abb. 9 entspricht), ist strichpunktiert eingetragen.

Zuerst betrachten wir einen Auslegungspunkt A, der oberhalb dieser Kurve liegen soll. Offenbar besteht die günstigste Regelungsart nun darin, die Optimalkurve auf direktem Wege zu erreichen und ihr hernach zu folgen. Dies würde nun

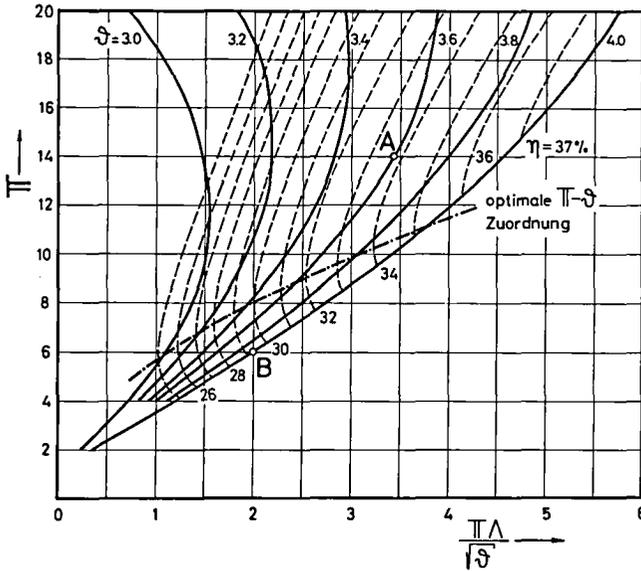


Abb. 2.4.10. Zusammenhang der Grössen π , θ , η thi und $\frac{\pi \Lambda}{\sqrt{\theta}}$ bei Gasturbinen

jedoch eine Erhöhung des Temperaturverhältnisses bedingen, was nicht zugelassen werden darf.

Somit ist es am günstigsten, bis zur Optimalcurve der Linie konstanten Temperaturverhältnisses zu folgen.

Von einem Auslegungspunkt B unterhalb der Optimalcurve erreichte man diese auf direktestem Wege durch Erhöhung des Druckverhältnisses. Auch dies dürfte im allgemeinen nicht ohne weiteres zulässig sein (sonst hätte man ja bereits im Auslegungspunkt ein höheres Druckverhältnis gewählt), sodass wir hier vorschlagen, den Höchstdruck konstant zu halten. Praktisch dürfte dieser Fall allerdings nur selten vorliegen.

Bei Anlagen mit Rekuperator Abb. 11 und 12 liegen die Zusammenhänge insofern einfacher, als im praktisch in Frage kommenden Bereich keine der Abb. 9 analoge Hüllkurve existiert, sondern ein höheres Temperaturverhältnis eindeutig auch eine Verbesserung des Wirkungsgrades mit sich bringt. Es ist also nur jener Bereich vorhanden, der auf Abb. 9 oberhalb der Optimalcurve im Bereich des Punktes A liegt. Somit ist hier stets die Regelung auf konstante Höchsttemperatur am vorteilhaftesten.

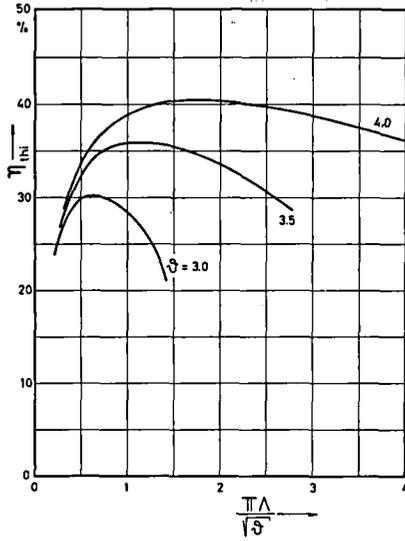


Abb. 2.4.11. Wirkungsgradverlauf bei Gasturbinen mit Rekuperator $\eta_r = 0.75$.

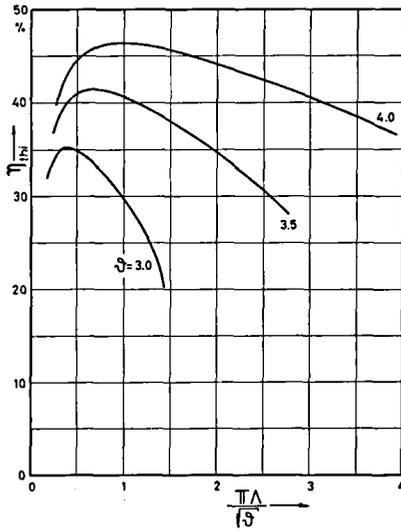


Abb. 2.4.12. Wirkungsgradverlauf bei Gasturbinen mit Rekuperator $\eta_r = 0.9$.

Zur Berechnung der Wirkungsgradänderungen bei variabler Leistung ist der Quotient $d\eta/dN$ massgebend. Nach Gl. 2.1. (23) und 2.1. (37) sind

$$d\eta_{\text{thi}} = \left(\frac{\partial \eta_{\text{thi}}}{\partial \varphi} \right)_{\Pi} d\varphi + \left(\frac{\partial \eta_{\text{thi}}}{\partial \Pi} \right)_{\varphi} d\Pi \quad (31)$$

und

$$\frac{dN}{N} = \frac{d\Pi}{\Pi} + \frac{d\Lambda}{\Lambda} - \frac{d\varphi}{2\varphi}, \quad (32)$$

wobei nach Gl. 2.1. (38)

$$d\Lambda = \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} \right)_{\Pi} d\varphi + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \Pi} \right)_{\varphi} d\Pi \quad (33)$$

ist. Für die Wirkungsgradänderung gilt damit

$$\frac{d\eta}{dN/N} = \frac{\left(\frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right)_{\Pi} d\varphi + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \Pi} \right)_{\varphi} d\Pi}{\frac{1}{\Pi} d\Pi + \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} \right)_{\Pi} d\varphi + \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \Pi} \right)_{\varphi} d\Pi - \frac{1}{2\varphi} d\varphi} \quad (34)$$

Wir haben festgestellt, dass es zweckmässig ist, je nach Lage des Auslegungspunktes entweder das Temperaturverhältnis oder das Druckverhältnis konstant zu halten. Für diese beiden Grenzfälle geht Gl. (34) über in

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial N/N} \right)_{\varphi} = \frac{\left(\frac{\partial \eta}{\partial \Pi} \right)_{\varphi}}{\frac{1}{\Pi} + \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \Pi} \right)_{\varphi}} \quad (35)$$

bzw.

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial N/N} \right)_{\Pi} = \frac{\left(\frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right)_{\Pi}}{\frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} \right)_{\Pi} - \frac{1}{2\varphi}} \quad (36)$$

Für eine Maschine ohne verstellbare Leitschaufeln ist der Zusammenhang $d\Pi/d\varphi$ durch Gl. 2.2. (15) gegeben und die Wirkungsgradänderungen folgen direkt aus Gl. (34).

Die Abbildungen 13 ... 15 zeigen die so erhaltenen Resultate für Anlagen ohne Rekuperator, wobei die mit "normal" angeschriebenen Kurven wiederum für Anlagen ohne verstellbaren Leitapparat gelten. Tatsächlich bringt entweder das Konstanthalten der Höchsttemperatur oder aber des Höchstdruckes eine Verbesserung des Wirkungsgrades.

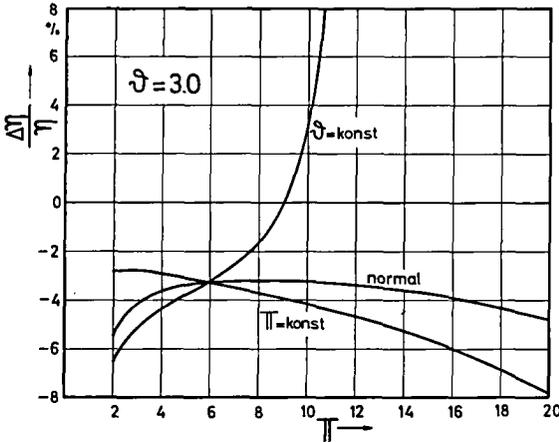


Abb. 2.4.13. Änderung des Wirkungsgrades in Prozenten bei Abnahme der Nutzleistung um 10 %. Anlage ohne Rekuperator.

Gleichzeitig kann auf diese Art die Hüllkurve Abb. 9 numerisch festgelegt werden. Auf dieser gilt nämlich der Zusammenhang

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial N}\right)_{\pi} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial N}\right)_{\vartheta} \quad (37)$$

Die Punkte mit gleichen partiellen Ableitungen nach π und ϑ erscheinen in den Abb. 13 ... 15 als Schnittpunkte. Damit lässt sich jener Druck - Temperaturzusammenhang aufzeichnen, der für die Regelung zweckmässig eingehalten wird (Abb. 16).

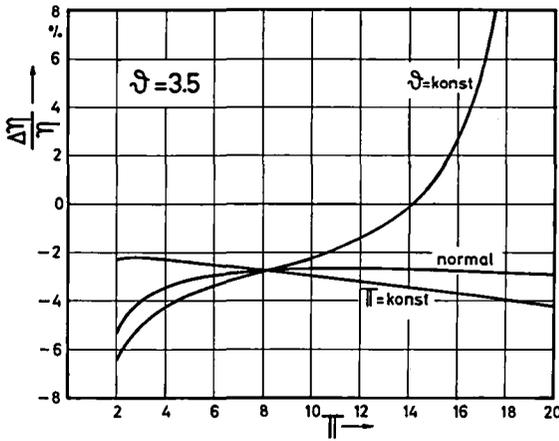


Abb. 2.4.14. Aenderung des Wirkungsgrades in Prozenten pro 10 % Abnahme der Nutzleistung für Anlagen ohne Rekuperator

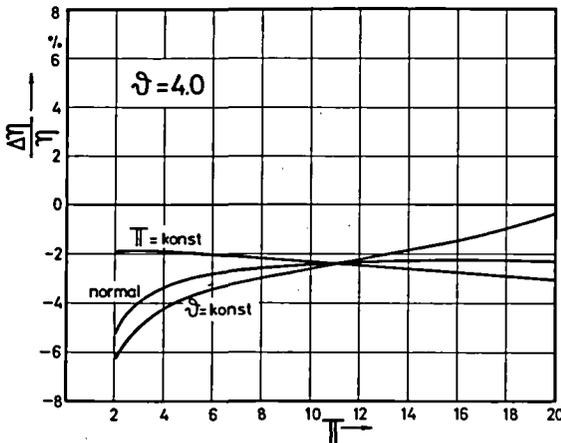


Abb. 2.4.15. Aenderung des Wirkungsgrades in Prozenten pro 10 % Abnahme der Nutzleistung für Anlagen ohne Rekuperator

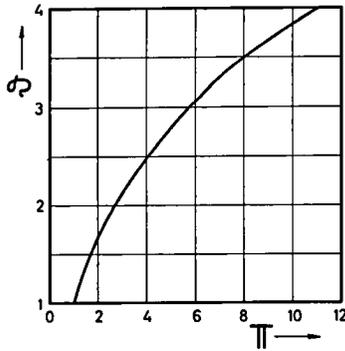


Abb. 2.4.16. Optimaler Zusammenhang zwischen Temperatur- und Druckverhältnis

Für Anlagen mit Rekuperator zeigen Abb. 17 und 18 die Wirkungsgradabfälle bei Teillast. Wie wir schon früher festgestellt haben, bringt stets die Regelung auf konstante Höchsttemperatur die günstigeren Resultate.

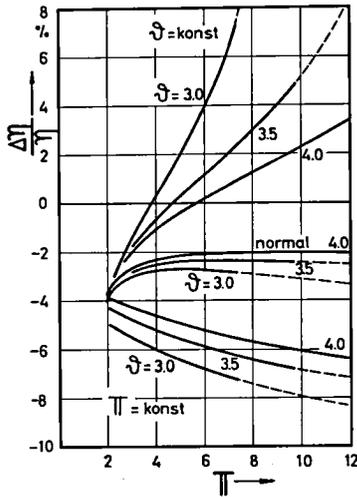


Abb. 2.4.17. Änderung des Wirkungsgrades in Prozenten pro 10 % Abnahme der Nutzleistung. Rekuperatorwirkungsgrad $\eta_r = 0.75$.

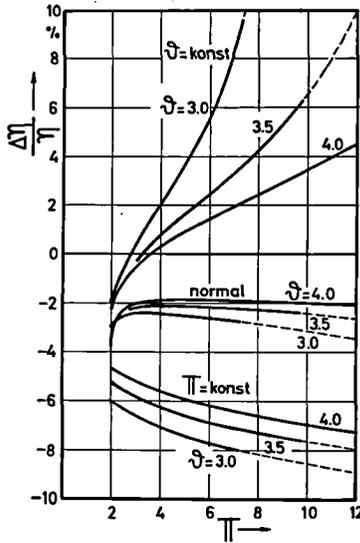


Abb. 2. 4. 18. Änderung des Wirkungsgrades in Prozenten pro 10 % Abnahme der Nutzleistung. Rekuperatorwirkungsgrad $\eta_r = 0.9$.

Zur Berechnung der notwendigen Verstellflächen greifen wir auf Gl. (10) zurück.

$$\Delta \phi = \frac{\frac{\Delta \Pi}{\Pi} - \frac{\Delta T_4}{2T_4} - \left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \Pi_N} \right) \phi \cdot \Delta \Pi_N}{\left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \phi} \right) \dot{M}} \quad (38)$$

Sie vereinfacht sich im Falle konstanter Höchsttemperatur auf

$$\Delta \phi = \frac{\frac{\Delta \Pi}{\Pi} - \left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \Pi_N} \right) \phi \cdot \Delta \Pi_N}{\left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \phi} \right) \dot{M}} \quad (39)$$

Für die notwendige Druckänderung $\Delta \Pi$ folgt aus Gl. 2.1. (37)

$$\frac{dN}{N} = \frac{d\Pi}{\Pi} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \Pi} \right)_{\phi} \cdot d\Pi - \frac{d\phi}{2\lambda} \quad (40)$$

bei konstantem Temperaturverhältnis

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N}{N} &= \frac{\Delta \Pi}{\Pi} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \Pi} \right)_{\phi} \Delta \Pi \\ \Delta \Pi &= \frac{\frac{\Delta N}{N}}{\frac{1}{\Pi} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \Pi} \right)_{\phi}} \end{aligned} \quad (41)$$

Aus Gl. (17) lässt sich noch $\Delta \Pi_N$ berechnen.

$$\Delta \Pi_N = \frac{z \left[\gamma_m^{\phi} \gamma_T^{-y} - x \Pi^x \right] \Delta \Pi}{\gamma_m^{\phi} \gamma_T^{-y+1}} \quad (42)$$

Damit kann die zum Einhalten optimaler Teillastverhältnisse notwendige Leitradverstellung angegeben werden. Für eine gegebene Lastabnahme $\Delta N/N$ folgt jetzt aus Gl. (41) $\Delta \Pi$ aus Gl. (42) $\Delta \Pi_N$ und aus Gl. (39) $\Delta \phi$.

Für jene Fälle, bei denen die Konstanthaltung des Höchstdruckes zweckmässig ist, heisst Gl. (10)

$$\Delta \phi = \frac{-\frac{\Delta T_4}{2T_4} - \left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \Pi_N} \right)_{\phi} \cdot \Delta \Pi_N}{\left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \phi} \right)_{\dot{M}}} \quad (43)$$

oder auch

$$\Delta \phi = \frac{-\frac{\Delta \phi}{2\lambda} - \left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \Pi_N} \right)_{\phi} \cdot \Delta \Pi_N}{\left(\frac{\partial \dot{M}}{\partial \phi} \right)_{\dot{M}}} \quad (44)$$

Die Aenderung des Temperaturverhältnisses ergibt sich durch Umformung der Gl. (40)

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \vartheta} \right)_{\Pi} \Delta \vartheta - \frac{\Delta \vartheta}{2 \vartheta}$$

$$\Delta \vartheta = \frac{\frac{\Delta N}{N}}{\frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \vartheta} \right)_{\Pi} - \frac{1}{2 \vartheta}} \quad (45)$$

Schliesslich errechnet sich $\Delta \Pi_N$ aus der Gl. (17), die für konstanten Höchst-
druck

$$\Delta \Pi_N = \frac{z \Pi (\Pi^x - 1) \Delta \vartheta}{\eta_m \vartheta^2 y \Pi^{-y+1}} \quad (46)$$

heisst. Aus der gegebenen Lastabnahme $\Delta N/N$ lassen sich aus Gl. (45) $\Delta \vartheta$, aus Gl. (46) $\Delta \Pi_N$ und aus Gl. (44) die Verstellfläche $\Delta \phi$ berechnen.

Die Werte für $\Delta \phi$, die sich für eine Lastabnahme von 10 % ergeben, können den Diagrammen 19 ... 21 entnommen werden. Aus den Resultaten geht die nicht ganz selbstverständliche Bedingung hervor, dass optimale Teillastbedingungen von rekuperatorlosen Maschinen bei kleinen Druckverhältnissen durch öffnen, bei grossen durch schliessen erreicht werden. Die kritische Grenze ist gestrichelt eingetragen.

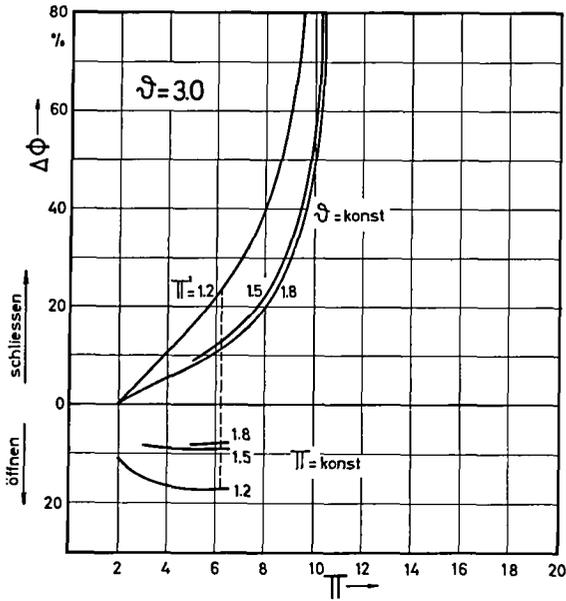


Abb. 2.4.19. Querschnittsänderung im verstellbaren Leitapparat, um eine Verminderung der Leistung um 10 % unter optimalen Bedingungen zu erreichen.

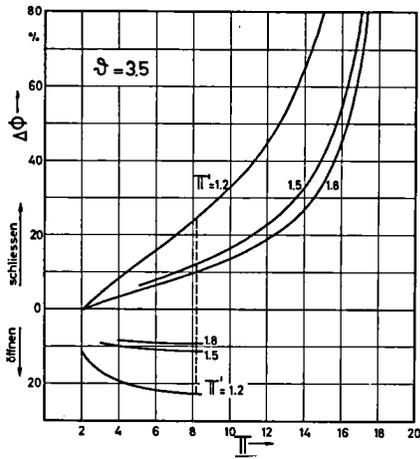


Abb. 2. 4. 20. Querschnittsänderung im verstellbaren Leitapparat, um eine Verminderung der Leistung um 10 % unter optimalen Bedingungen zu erreichen.

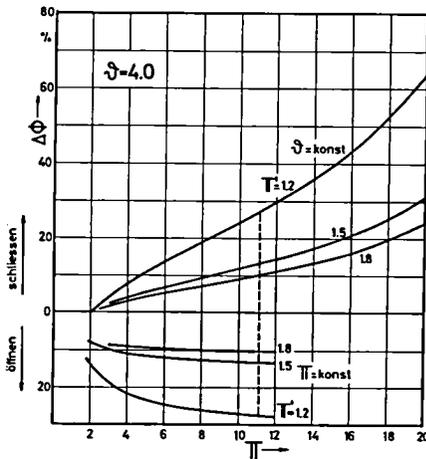


Abb. 2. 4. 21. Querschnittsänderung im verstellbaren Leitapparat, um eine Verminderung der Leistung um 10 % unter optimalen Bedingungen zu erreichen.

2.5. Beurteilung der Resultate

Das Betriebsverhalten einer Gasturbine wird im wesentlichen durch den Quotienten $d\pi/d\psi$ bestimmt. Dieser charakterisiert den Zusammenhang zwischen Temperatur- und Druckänderungen.

Ist nun z. B. $d\pi/d\psi$ gross, heisst dies, dass kleine Temperaturänderungen grosse Druckvariationen mit sich ziehen. Bei einer Erhöhung der Umgebungstemperatur und einer damit verbundenen Verkleinerung des Temperaturverhältnisses sinkt der Druck und somit auch die Leistung stark ab. Die Maschine ist sehr klimaempfindlich. Andererseits können grössere Lastschwankungen durch kleine Temperaturänderungen aufgenommen werden, was sich auf den Teillastwirkungsgrad sehr positiv auswirkt. Umgekehrt zeigt eine analoge Ueberlegung, dass kleine $d\pi/d\psi$ -Werte geringe Klimaempfindlichkeit und schlechte Teillastwirkungsgrade ergeben.

Bei Gasturbinen mit festem Leistapparat ist $d\pi/d\psi$ durch die Art der Schaltung eindeutig gegeben. Daraus geht hervor, dass sich eine solche Gasturbine nur entweder bezüglich Klimaempfindlichkeit oder aber bezüglich Teillastwirkungsgrad günstig verhält.

Im Gegensatz dazu ist $d\pi/d\psi$ bei Maschinen mit einem beweglichen Leitapparat frei wählbar und wird stets so angepasst, dass optimale Verhältnisse entstehen. Grundlage hierzu sind die unter 2.4. hergeleiteten Kriterien. Eine solche Turbine zeigt dann sowohl bezüglich Klimaempfindlichkeit als auch bezüglich Teillastwirkungsgrad ein günstiges Verhalten.

Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass $d\pi/d\psi$ nicht mehr von der Schaltung der Maschinen abhängt. Man ist also nicht mehr darauf angewiesen, wegen des Betriebsverhaltens eine bestimmte Anordnung zu wählen und kann andere, z. B. konstruktive Gründe in den Vordergrund stellen.

Am günstigsten präsentiert sich dann wohl die Anlage mit seriegeschalteten Turbinen, welche ein anpassungsfähiges Verdichteraggregat unabhängig von der Nutzturbinendrehzahl besitzt (geringere Neigung zum Pumpen). Der Hauptvorteil jedoch ist, dass der verstellbare Leitapparat vor der Nutzturbine in einem Gebiet niedriger Temperatur liegt und daher viel weniger konstruktive Probleme aufwirft. Dies ist der Grund, warum im folgenden stets diese Schaltungsart vorausgesetzt wird.

Alle diese Bemerkungen gelten für Maschinen mit dem sehr guten polytropen Wirkungsgrad von $\eta_p = 0,9$. Wir suchen nun noch einige Anhaltspunkte dafür, wie sich diese Verhältnisse mit abnehmendem Wirkungsgrad ändern. Dazu betrachten wir die Bedingung des Leistungsgleichgewichtes etwas näher, und zwar in der Form

$$\pi_V^{\frac{\kappa_V - 1}{\kappa_V}} - 1 = \eta_V \eta_T \vartheta \left[1 - \pi_T^{-\frac{\kappa_T - 1}{\kappa_T}} \right] \quad (1)$$

was einer vereinfachten Gl. 4.2. (14) entspricht. Hier wird deutlich, dass das Produkt der Wirkungsgrade von Verdichter und Turbine (die sich von den polytropen Wirkungsgraden nur um den Rückgewinn unterscheiden) mit dem Temperaturverhältnis der massgebende Parameter ist. Eine Verschlechterung der Wirkungsgrade muss also gleichartige Veränderungen mit sich bringen wie eine Verkleinerung des Temperaturverhältnisses. Mit der Formel

$$\vartheta_{abl} = \frac{\eta_V \cdot \eta_T}{\eta_V^* \cdot \eta_T^*} \vartheta_{eff} \quad (2)$$

kann so ein Hilfswert ϑ_{abl} gefunden werden, der nun beim Ablesen unserer Diagramme massgebend wird. Für den Nenner $\eta_V^* \cdot \eta_T^*$ kann genügend genau 0.81 gesetzt werden.

In Abb. 1 ist als Beispiel der Leistungsabfall für eine Steigerung der Umgebungstemperatur um 10°C analog der Abb. 2.4.1. dargestellt, und zwar diesmal für $\eta_p = 0,9$ (dicke Linien) und $\eta_p = 0,85$ (dünne Linien). Der Bereich $\eta_p = 0,85 \dots 0,9$ ist schraffiert. Die Gültigkeit der Gl. (2) lässt sich damit leicht verifizieren.

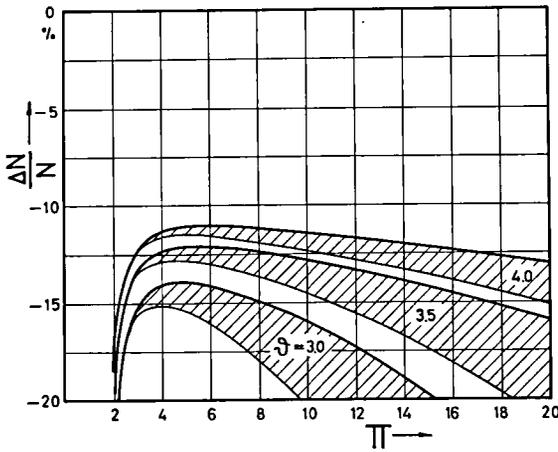


Abb. 2.5.1. Leistungsabfall in Prozenten für eine Steigerung der Umgebungstemperatur um 10°C . Vergleich verschiedener Wirkungsgrade.

———— $\eta_p = 0.9$ ————— $\eta_p = 0.85$.

3. Berechnung der Charakteristiken von Turbinen mit verstellbaren Leitschaufeln

3.1. Allgemeines

Für eine genaue Berechnung von Gasturbinensätzen ist die Kenntnis der einzelnen Maschinencharakteristiken unbedingt notwendig. Diese sollen hier für eine Turbine mit verstellbarem erstem Leitschaufelkranz berechnet werden. Dazu sind einige spezielle Annahmen zu treffen. So müssen insbesondere das Schaufelgitter und die Turbinengeometrie bekannt sein. Davon ausgehend bestimmen wir den dem untersuchten Betriebspunkt zugehörigen Strömungszustand. Hier müssen die Energiegleichung, die Kontinuität und die kinematischen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Radkränzen erfüllt sein.

Im weiteren muss noch das Entspannungsgesetz befriedigt werden. Ist der Strömungszustand einmal bekannt, lassen sich alle gesuchten Größen, insbesondere Durchflussmenge und Druckgefälle, leicht ausrechnen.

3.2. Vereinfachungen

Um die mathematische Struktur nicht unnötig zu komplizieren, treffen wir einige vereinfachende Annahmen:

1. Die Formulierung der Gleichungen geschieht auf der Basis der eindimensionalen Betrachtungsweise. Alle Rechengrößen sind daher als geeignete Mittelwerte einzusetzen. Dies gilt insbesondere für die Radwirkungsgrade, welche die dreidimensionalen Verluste (Spaltverluste, Randverluste usw.) bereits in gemittelter Form enthalten müssen.
2. Ideales Gas. An sich gelten alle Ueberlegungen auch unter der weniger engen Voraussetzung des idealen Dampfes. Einzig der leichteren Lesbarkeit wegen ist ideales Gas vorausgesetzt. Dies ist bei Gasturbinen auch keine Einschränkung der Allgemeinheit.
3. Der Isentropenexponent κ wird als konstant angenommen. Da beim idealen Gas

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa-1} R \quad (1)$$

gilt, ist auch c_p konstant.

4. Der effektive Abströmwinkel am Profil ist unabhängig von der Abströmgeschwindigkeit, also für feste Schaufelungswinkel konstant.
5. Die Stufe ist adiabatisch durchströmt, d. h. es wird in ihr keine Wärme zu- oder abgeführt (z. B. durch Schaufelkühlung).
6. Die Strömung füllt stets den gesamten Querschnitt aus. Eventuelle Verdrängungseffekte von dicken Grenzschichten und Ablösungen können am Schluss der Rechnung als Korrektur berücksichtigt werden, sofern geeignete Unterlagen vorhanden sind.

Die Voraussetzungen 1 ... 5 dürfen als gut erfüllt betrachtet werden. Einzig Punkt 6 bedeutet eine wesentliche Einschränkung. Es ist von Fall zu Fall zu prüfen, ob diese Vereinfachung zulässig ist.

3.3. Berechnung einer einzelnen Stufe

Wir betrachten der Einfachheit halber zuerst eine einzelne Turbinenstufe.

Die Bezeichnung der Zustandspunkte geschieht, wie Abb. 1 zeigt, durch folgende Indices:

- Index 0 vor dem Leitrad
- Index 1 zwischen Leit- und Laufrad
- Index 2 nach dem Laufrad

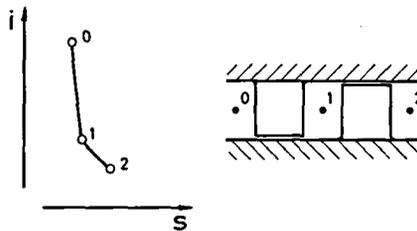


Abb. 3.3.1. Bezeichnung der Zustandspunkte und Prozessverlauf im i, s - Diagramm

Damit ergeben sich auch die in Abb. 2 dargestellten, für das Geschwindigkeitsdreieck gültigen Bezeichnungen.

Die Energiegleichung über dem Leitrad heisst dann

$$h_o = i_1 + \frac{c_1^2}{2} \quad (1)$$

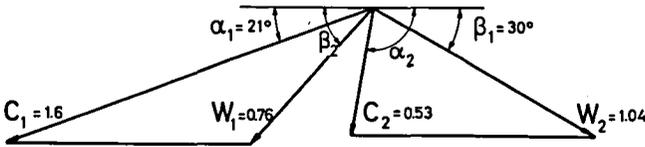


Abb. 3.3.2. Geschwindigkeitsdreieck im Auslegungspunkt

mit h für die Totalenthalpien und i für die statischen Enthalpien. Bezeichnet Index t die Totaltemperatur, ist

$$\frac{c_1^2}{2} = c_p T_{ot} - c_p T_1$$

$$\frac{c_1^2}{2c_p T_{ot}} = 1 - \frac{T_1}{T_{ot}} \quad (2)$$

Bemerkenswert ist, dass der statische Zustand vor dem Leitrad in der Gleichung nicht auftritt und demzufolge keinen Einfluss hat.

Das Isentropengesetz heisst (vergl. auch Abb. 3)

$$\frac{T_{1s}}{T_{ot}} = \left(\frac{p_1}{p_o} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \quad (3)$$

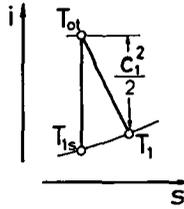


Abb. 3.3.3. Entspannungsverlauf im Leitrad

Mit der Definition des Radwirkungsgrades

$$\eta' \equiv \frac{c_1^2/2}{c_{1s}^2/2} = \frac{c_1^2/2}{h_o - i_{1s}} \quad (4)$$

ergibt sich für den verlustbehafteten Fall

$$\begin{aligned} \frac{c_1^2}{2} &= \eta' [c_p T_{ot} - c_p T_{1s}] \\ \frac{c_1^2}{2c_p T_{ot}} &= \eta' \left[1 - \frac{T_{1s}}{T_{ot}} \right] \\ \frac{c_1^2}{2c_p T_{ot}} &= \eta' \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_o} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

Die Kontinuitätsgleichung nach dem Leitrad

$$\dot{m} \cdot v_1 = c_{n1} \cdot \Omega_1 \quad (6)$$

wird umgeformt in

$$\dot{m} \frac{R T_1}{p_1} = c_1 \sin \alpha_1 \Omega_1$$

$$\frac{\dot{m} \sqrt{2c_p T_{ot}}}{\Omega_1 \cdot P_o} = \frac{2 \kappa}{\kappa - 1} \frac{c_1}{\sqrt{2c_p T_{ot}}} \sin \alpha_1 \frac{P_1}{P_o} \frac{T_{ot}}{T_1} \quad (7)$$

Die relative Eintrittsgeschwindigkeit w_1 ins Laufrad ergibt sich aus der kinematischen Beziehung

$$w_1^2 = c_1^2 + u_1^2 - 2c_1 u_1 \cos \alpha_1 \quad (8)$$

Diese Gleichung beschreibt die üblicherweise durch das Geschwindigkeitsdreieck dargestellte Vektoraddition.

Die Behandlung des Laufrades geschieht analog. Da aber zur Formulierung der Gleichungen das relative Koordinatensystem benützt wird, sind die Feldkräfte zu berücksichtigen. Die Energiegleichung heisst dann

$$\begin{aligned} i_2 + \frac{w_2^2}{2} &= i_1 + \frac{w_1^2}{2} + \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} \\ \frac{w_2^2}{2} &= c_p T_1 + \frac{w_1^2}{2} - c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} \\ \frac{w_2^2}{2c_p T_{ot}} &= \frac{T_1}{T_{ot}} + \frac{w_1^2}{2c_p T_{ot}} - \frac{T_2}{T_{ot}} + \frac{u_2^2}{2c_p T_{ot}} - \frac{u_1^2}{2c_p T_{ot}} \end{aligned} \quad (9)$$

Der Entspannungsverlauf ist in Abb. 4 gezeigt. Das Isentropengesetz schreibt sich

$$\frac{T_{2s}}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \quad (10)$$

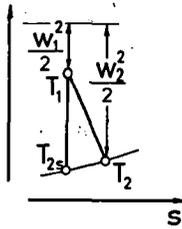


Abb. 3.3.4. Entspannungsverlauf im Laufrad

Mit der Definition des Laufradwirkungsgrades η''

$$\eta'' \equiv \frac{w_2^2/2}{w_{2s}^2/2} = \frac{w_2^2/2}{i_1 + \frac{w_1^2}{2} - i_{2s} + \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2}} \quad (11)$$

kann der verlustbehaftete Fall erfasst werden.

$$\frac{w_2^2}{2} = \eta'' \left[c_p T_1 - c_p T_{2s} + \frac{w_1^2}{2} + \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} \right]$$

$$\frac{w_2^2}{2} = \eta'' \left[c_p T_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right) + \frac{w_1^2}{2} + \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} \right]$$

$$\frac{w_2^2}{2c_p T_{ot}} = \eta'' \left[\frac{T_1}{T_{ot}} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right) + \frac{w_1^2}{2c_p T_{ot}} + \frac{u_2^2}{2c_p T_{ot}} - \frac{u_1^2}{2c_p T_{ot}} \right] \quad (12)$$

Die Kontinuitätsgleichung heisst hier

$$\dot{m} \cdot v_2 = c_{n2} \cdot \Omega_2 \quad (13)$$

und analog Gl. (7) umgeformt

$$\frac{\dot{m} \sqrt{2c_p T_{ot}}}{\Omega_1 \cdot P_o} = \frac{2 \kappa}{\kappa - 1} \frac{w_2}{\sqrt{2c_p T_{ot}}} \sin \beta_2 \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \frac{P_2}{P_o} \frac{T_{ot}}{T_2} \quad (14)$$

Schliesslich gilt für den Uebergang vom relativen zum absoluten Koordinatensystem nach dem Laufrad die Beziehung

$$c_2^2 = w_2^2 + u_2^2 - 2w_2 u_2 \cos \beta_2 \quad (15)$$

In den Gleichungen (2), (5), (7), (9), (12), (14) treten einige dimensionslose Parameter auf, die durch Reduktion auf den Anfangszustand entstehen. Sie sind offensichtlich die charakteristischen Kenngrössen der Stufe.

Wir definieren daher

$$C \equiv \frac{c}{\sqrt{2c_p T_{ot}}}, \quad W \equiv \frac{w}{\sqrt{2c_p T_{ot}}}, \quad U \equiv \frac{u}{\sqrt{2c_p T_{ot}}} \quad (16)$$

C, W und U sind die Croccozahlen der Geschwindigkeiten c, w und u, bezogen auf den Totalzustand vor der Stufe. Die Croccogeschwindigkeit ist jene Grenzgeschwindigkeit, die sich bei der Entspannung ins absolute Vakuum bei unveränderten Eigenschaften des Mediums ergibt. Sie ist durch die Beziehung

$$Ma = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}} C \quad (17)$$

mit der Machzahl verknüpft. Näheres darüber vergl. [1] Abschn. 3.6.

Bei den Druckverhältnissen setzen wir

$$\pi' \equiv \frac{P_1}{P_o} \quad \pi \equiv \frac{P_2}{P_o} \quad (18)$$

Für die Temperaturverhältnisse führen wir keine Abkürzungen ein, da sie leicht eliminiert werden können.

Hingegen stellt

$$\dot{M}_D = \frac{\dot{m} \sqrt{2c_p T_{ot}}}{\Omega_1 \cdot P_o} \quad (19)$$

ein dimensionsloses Mass für die Durchflussmenge dar.

Wenn wir aus den Gln. (2) und (9) die Temperaturverhältnisse ausrechnen

$$\frac{T_1}{T_{ot}} = 1 - C_1^2 \quad (20)$$

$$\frac{T_2}{T_{ot}} = 1 - C_1^2 + W_1^2 - W_2^2 + U_2^2 - U_1^2 \quad (21)$$

und in den übrigen Gleichungen sofort eliminieren, verbleiben die Beziehungen

$$C_1^2 = \eta' \left[1 - \pi' \frac{\kappa-1}{\kappa} \right] \quad (22)$$

$$\dot{M}_D = \frac{2 \kappa}{\kappa-1} \sin \alpha_1 \frac{C_1 \pi'}{1 - C_1^2} \quad (23)$$

$$W_1^2 = C_1^2 + U_1^2 - 2C_1 U_1 \cos \alpha_1 \quad (24)$$

$$W_2^2 = \eta'' \left[(1 - C_1^2) \left(1 - \left(\frac{\pi}{\pi'} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right) + W_1^2 + U_2^2 - U_1^2 \right] \quad (25)$$

$$\dot{M}_D = \frac{2 \kappa}{\kappa-1} \sin \beta_2 \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \frac{\pi W_2}{1 - C_1^2 + W_1^2 - W_2^2 + U_2^2 - U_1^2} \quad (26)$$

$$C_2^2 = W_2^2 + U_2^2 - 2W_2 U_2 \cos \beta_2 \quad (27)$$

Die Radwirkungsgrade η' und η'' sind abhängig vor allem vom Anströmwinkel und der mit der Anströmgeschwindigkeit gebildeten Croccozahl, sowie in geringerem Masse auch von der Reynoldszahl. Einflüsse der Machzahl gehen über die Crocco-zahlen C_o und W_1 in die Rechnung ein, da

$$Ma = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}} C$$

ist.

Diese Funktionen

$$\eta' = \eta'(\alpha_0, C_0, Re) \quad (28)$$

und

$$\eta'' = \eta''(\beta_1, W_1, Re) \quad (29)$$

können im Gittersversuch bestimmt werden und stehen dann für die Rechnung als Diagramme zur Verfügung. Wir nehmen diese Funktionen vorläufig als gegeben an und werden unter 3.5. auf die Radwirkungsgrade zurückkommen.

Dieses Gleichungssystem kann nach Vorgabe von U_1 , α_1 , β_2 und \dot{M}_D gelöst werden.

Aus

$$c_p T_2 \left[\left(\frac{P_2}{P_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] = \frac{c_2^2}{2} \quad (30)$$

folgt für das Verhältnis des totalen zum statischen Druck nach dem Laufrad

$$\pi_s \equiv \frac{P_2}{P_0} \quad (31)$$

$$\pi_s = \left[1 + \frac{T_{ot}}{T_2} C_2^2 \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (32)$$

und demnach für das Totaldruckverhältnis an der Stufe

$$Q \equiv \frac{P_2}{P_0} = \pi \cdot \pi_s \quad (33)$$

Die Totaltemperatur nach dem Laufrad ist

$$T_{2t} = T_2 + \frac{c_2^2}{2c_p}$$

und das Verhältnis der Totaltemperaturen an der Stufe

$$\theta \equiv \frac{T_{2t}}{T_{ot}} = 1 - C_1^2 + W_1^2 - W_2^2 + C_2^2 + U_2^2 - U_1^2 \quad (34)$$

Von diesem Totalzustand ausgehend kann die folgende Stufe berechnet werden.

3.4. Berechnung der mehrstufigen Maschine

Eine 2. Stufe (oder allgemein eine folgende) geht von neuen Anfangsbedingungen aus, nämlich

$$\text{Totaldruck} \quad P_{on} = Q \cdot P_{oI}$$

$$\text{Totaltemperatur} \quad T_{otn} = \theta \cdot T_{otI} \quad (2)$$

Q und θ sind dabei Zahlen zwischen 0 und 1, wobei 1 definitionsgemäss für die erste Stufe gilt. Mit diesen neuen Anfangsbedingungen können die dem Abschnitt 3.3. entsprechenden Bedingungen für eine beliebige Stufe formuliert werden.

Für das Leitrad heisst die Energiegleichung jetzt

$$c_1^2 = 2 (h_{on} - i_{1n}) \quad (3)$$

$$= 2c_p T_{otI} \left[\frac{T_{otn}}{T_{otI}} - \frac{T_{1n}}{T_{otn}} \frac{T_{otn}}{T_{otI}} \right]$$

$$C_1^2 = \theta \left[1 - \frac{T_{1n}}{T_{otn}} \right] \quad (4)$$

Als Bezugswerte gelten immer diejenigen der ersten Stufe (Index I) ausser bei π' und π , die auf den Anfangsdruck der laufenden Stufe bezogen sind.

Die Entspannung im Leitrad gehorcht der Bedingung

$$\eta' = \frac{c_1^2/2}{c_p [T_{otn} - T_{1sn}]} \quad (5)$$

$$c_1^2 = 2 \eta' c_p T_{otn} \left[1 - \frac{T_{1sn}}{T_{otn}} \right]$$

$$c_1^2 = \eta' \theta \left[1 - \pi' \frac{\kappa - 1}{\kappa} \right] \quad (6)$$

und die Umformung der Kontinuitätsgleichung liefert

$$c_1 \sin \alpha_1 = \frac{\dot{m}}{\Omega_{1n}} \frac{R T_{1n}}{p_{1n}} \quad (7)$$

$$\frac{c_1 \cdot \sin \alpha_1}{\sqrt{2c_p T_{otI}}} = \frac{\dot{m} \sqrt{2c_p T_{otI}}}{\Omega_{1I} \cdot p_{oI}} \frac{\Omega_{1I}}{\Omega_{1n}} \frac{T_{1n}}{2c_p T_{otI}} \frac{p_{oI}}{p_{1n}} R$$

$$\dot{M}_D = \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \sin \alpha_1 C_1 \pi' \frac{T_{otn}}{T_{1n}} \frac{\Omega_{1n}}{\Omega_{1I}} \frac{Q}{\theta} \quad (8)$$

Zwischen Leit- und Laufrad gilt die kinematische Beziehung

$$w_1^2 = c_1^2 + U_{1n}^2 - 2c_1 U_{1n} \cos \alpha_1 \quad (9)$$

Die Umfangsgeschwindigkeit U_{1n} ist im allgemeinen von U_{1I} verschieden. Es gilt der Zusammenhang

$$\frac{U_{1n}}{U_{1I}} = \frac{D_{1n}}{D_{1I}} = \text{konst.} \quad (10)$$

$$U_{1n} = \frac{D_{1n}}{D_{1I}} U_{1I}$$

$$w_1^2 = C_1^2 + \left(\frac{D_{1n}}{D_{1I}}\right)^2 U_{II}^2 - 2 \left(\frac{D_{1n}}{D_{1I}}\right) U_{II} \cdot C_1 \cos \alpha_1 \quad (11)$$

Für das Laufrad heisst die Energiegleichung

$$\begin{aligned} w_2^2 &= 2 \left(i_{1n} + \frac{w_1^2}{2} - i_{2n} \right) + 2(u_2^2 - u_1^2) \\ &= 2c_p T_{ot} \left[\frac{T_{1n}}{T_{otn}} \frac{T_{otn}}{T_{otI}} + w_1^2 - \frac{T_{2n}}{T_{otn}} \frac{T_{otn}}{T_{otI}} + u_2^2 - u_1^2 \right] \\ w_2^2 &= \theta \left[\frac{T_{1n}}{T_{otn}} - \frac{T_{2n}}{T_{otn}} \right] + W_1^2 + U_2^2 - U_1^2 \quad (12) \end{aligned}$$

Aus dem Spannungsgesetz folgt

$$\gamma'' = \frac{w_2^2/2}{c_p \left[T_{1n} - T_{2sn} \right] + \frac{w_1^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2}} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} w_2^2 &= 2\gamma'' c_p \left\{ T_{otn} \left[\frac{T_{1n}}{T_{otn}} - \frac{T_{2sn}}{T_{otn}} \right] + w_1^2 + u_2^2 - u_1^2 \right\} \\ w_2^2 &= \gamma'' \left[\theta \left(\frac{T_{1n}}{T_{otn}} - \frac{T_{2sn}}{T_{otn}} \right) + W_1^2 + U_2^2 - U_1^2 \right] \quad (14) \end{aligned}$$

und aus der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{M}_D = \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \sin \beta_2 W_2 \pi \frac{T_{otn}}{T_{2n}} \frac{\Omega_{2n}}{\Omega_{1I}} \frac{Q}{\theta} \quad (15)$$

Den Uebergang vom relativen auf das absolute Koordinatensystem gibt

$$C_2^2 = W_2^2 + \left(\frac{D_{2n}}{D_{1I}}\right)^2 U_{II}^2 - 2 \frac{D_{2n}}{D_{1I}} U_{II} W_2 \cos \beta_2 \quad (16)$$

Jetzt werden wiederum alle Temperaturen eliminiert

$$\frac{T_{1n}}{T_{otn}} = 1 - \frac{C_1^2}{\theta}$$

$$\frac{T_{1n}}{T_{otI}} = \theta - C_1^2 \quad (17)$$

$$\frac{T_{2n}}{T_{otn}} = \frac{T_1}{T_{otn}} + W_1^2 - W_2^2 + U_2^2 - U_1^2$$

$$\frac{T_{2n}}{T_{otI}} = \theta - C_1^2 + W_1^2 - W_2^2 + U_2^2 - U_1^2 \quad (18)$$

Die den Gln. 3.3. (22) ... (27) analoge Darstellung ist dann

$$C_1^2 = \eta' \theta \left[1 - \pi' \frac{\kappa-1}{\kappa} \right] \quad (19)$$

$$\dot{M}_D = \frac{2 \kappa}{\kappa-1} \sin \alpha_1 C_1 \pi' \frac{\Omega_{1n}}{\Omega_{1I}} \frac{Q}{\theta - C_1^2} \quad (20)$$

$$W_1^2 = C_1^2 + \left(\frac{D_{1n}}{D_{1I}} \right)^2 U_{1I}^2 - 2 \frac{D_{1n}}{D_{1I}} U_{1I} C_1 \cos \alpha_1 \quad (21)$$

$$W_2^2 = \eta'' \left[(\theta - C_1^2) \left(1 - \left(\frac{\pi'}{\pi''} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right) + W_1^2 + U_2^2 - U_1^2 \right] \quad (22)$$

$$\dot{M}_D = \frac{2 \kappa}{\kappa-1} \sin \beta_2 \frac{\Omega_{2n}}{\Omega_{1I}} \frac{W_2 \cdot \pi \cdot Q}{\theta - C_1^2 + W_1^2 - W_2^2 + U_2^2 - U_1^2} \quad (23)$$

$$C_2^2 = W_2^2 + \left(\frac{D_{2n}}{D_{1I}} \right)^2 U_{1I}^2 - 2 \frac{D_{2n}}{D_{1I}} U_{1I} W_2 \cos \beta_2 \quad (24)$$

Auch hier betrachten wir die Radwirkungsgrade als gegeben.

Analog Gl. 3.3. (32) leiten wir für das Verhältnis des totalen zum statischen Druck nach dem Laufrad

$$\pi_s = \left[1 + \frac{T_{otI}}{T_{2n}} C_2^2 \right]^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \quad (25)$$

her, womit der Totaldruck nach der Stufe mit

$$Q_n = Q_{n-1} \cdot \pi \cdot \pi_s \quad (26)$$

angegeben werden kann.

Nach der letzten Stufe schliesst üblicherweise ein Diffusor an, der einen Teil der kinetischen Energie der Normalkomponente von c_2 in statischen Druck umzusetzen vermag. Mit dem Diffusorumsetzungsgrad λ_{Diff} beträgt das Druckverhältnis im Diffusor

$$\pi_{Diff} \equiv \frac{p_{nach\ Diffusor}}{p_{vor\ Diffusor}} \quad (27)$$

$$c_p T_{2n} \left[\pi_{Diff}^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} - 1 \right] = \lambda_{Diff} \cdot \frac{c_2^2}{2}$$

$$\pi_{Diff} = \left[1 + \lambda_{Diff} \frac{T_{otI}}{T_{2n}} C_{n2}^2 \right]^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \quad (28)$$

Die nach dem Diffusor noch vorhandene kinetische Energie und die Umfangskomponente von c_2 betrachten wir als verloren.

Schliesslich ergibt sich für die Totaltemperatur nach der Stufe

$$\theta = \frac{T_{2n}}{T_{otI}} + C_2^2 \quad (29)$$

$$\theta_n = \theta_{n-1} - C_1^2 + W_1^2 - W_2^2 + U_2^2 - U_1^2 + C_2^2 \quad (30)$$

Damit ist die Stufe hinreichend charakterisiert und alle gewünschten Grössen lassen sich leicht berechnen.

Die innere Arbeit ist die Differenz der Totalenthalpien vor und nach der Stufe, also

$$L_i = h_o - h_2 = c_p T_{otI} \left[\frac{T_{otn}}{T_{otI}} - \frac{T_{2tn}}{T_{otI}} \right]$$

$$L_i = c_p T_{otI} [\theta_{n-1} - \theta_n] \quad (31)$$

oder mit der dimensionslosen inneren Arbeit

$$\Lambda_i \equiv \frac{L_i}{2c_p T_{otI}} \quad (32)$$

$$\Lambda_i = \frac{\psi_{n-1} - \psi_n}{2} \quad (33)$$

Das Drehmoment folgt aus der Euler'schen Momentengleichung

$$M_d = \gamma_m \cdot \dot{m} \left[c_{u1} - \frac{u_2}{u_1} c_{u2} \right] \frac{D_1}{2} \quad (34)$$

$$M_d = \gamma_m \cdot \dot{M}_D \frac{P_{oI} \Omega_{1I}}{\sqrt{2c_p T_{otI}}} \left[c_{u1I} - \frac{D_{2n}}{D_{1n}} c_{u2} \right] \sqrt{2c_p T_{otI}} \frac{D_{1n}}{2}$$

Mit der Definition der dimensionslosen Momentenzahl

$$M_{dD} \equiv \frac{2 M_d}{P_{oI} \cdot \Omega_{1I} \cdot D_{1I}} \quad (35)$$

wird

$$\begin{aligned}
 M_{dD} &= \eta_m \cdot \dot{M}_D \frac{D_{1n}}{D_{1I}} \left[C_{u1} - \frac{D_{2n}}{D_{1n}} (W_{u2} - U_2) \right] \\
 &= \eta_m \cdot \dot{M}_D \frac{D_{1n}}{D_{1I}} \left[C_1 \cos \alpha_1 - \frac{D_{2n}}{D_{1n}} W_2 \cos \beta_2 + \left(\frac{D_{2n}}{D_{1n}} \right) U_2 \right] \\
 M_{dD} &= \eta_m \cdot \dot{M}_D \left[\frac{D_{1n}}{D_{1I}} C_1 \cos \alpha_1 - \frac{D_{2n}}{D_{1I}} W_2 \cos \beta_2 + \left(\frac{D_{2n}}{D_{1I}} \right)^2 U_{1I} \right] \quad (36)
 \end{aligned}$$

Die Leistung ist

$$\begin{aligned}
 N &= \eta_m \cdot \dot{m} \cdot L_i \quad (37) \\
 &= \eta_m \cdot \dot{M}_D \frac{P_{oI} \cdot \Omega_{1I}}{\sqrt{2c_p T_{otI}}} 2c_p T_{otI} \cdot \Lambda_i
 \end{aligned}$$

oder mit der dimensionslosen Leistungszahl

$$N_D \equiv \frac{N}{P_{oI} \cdot \Omega_{1I} \sqrt{2c_p T_{otI}}} \quad (38)$$

$$\underline{N_D = \eta_m \cdot \dot{M}_D \cdot \Lambda_i} \quad (39)$$

Die Leistung hätte auch als Produkt der Drehzahl und des Drehmomentes gefunden werden können

$$N = \omega \cdot M_d \quad (40)$$

Die Drehzahl kann ausgedrückt werden durch

$$\omega = \frac{2 u_1}{D_1} \quad (41)$$

somit ist

$$N = \frac{2 u_1}{D_1} M_d \quad (42)$$

und

$$N_1 \cdot P_{oI} \cdot \Omega_{1I} \sqrt{2c_p T_{otI}} = \frac{2U_1 \sqrt{2c_p T_{otI}}}{D_{1I}} \frac{M_{dI}}{2} P_{oI} \Omega_{1I} D_{1I}$$

$$\underline{N_D = U_1 \cdot M_{dD}} \quad (43)$$

Diese Formel wird uns bei der numerischen Berechnung als Kontrolle dienen.
Der innere Wirkungsgrad einer einzelnen Stufe ist

$$\eta_{ist} \equiv \frac{\Delta h}{\Delta h_s} = \frac{c_p T_{otI} [\theta_{n-1} - \theta_n]}{c_p T_{otn-1} \left[1 - \left(\frac{Q_n}{Q_{n-1}} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} \quad (44)$$

$$\eta_{ist} = \frac{\theta_{n-1} - \theta_n}{\theta_{n-1} \left[1 - \left(\frac{Q_n}{Q_{n-1}} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} \quad (45)$$

und der innere Wirkungsgrad der ganzen Turbine

$$\eta_i \equiv \frac{\sum \Delta h}{\Delta h_{stot}} = \frac{c_p T_{otI} [1 - \theta_n]}{c_p T_{otI} \left[1 - Q_n^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} \quad (46)$$

$$\eta_i = \frac{1 - \theta_n}{1 - Q_n^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \quad (47)$$

Die Turbomaschinentheorie verwendet bekanntlich oft gewisse dimensionslose Kennwerte. Die beiden wichtigsten sind die Druckzahl

$$\psi \equiv \frac{\Delta i_s}{u_2^2/2} \quad (48)$$

welche die Form

$$\psi = \frac{2\Delta i_s}{2c_p T_{otI}} \frac{2c_p T_{otI}}{u_2^2}$$

$$\psi = \frac{1}{U_2^2} \left[\frac{C_1^2}{\gamma} - C_0^2 + \frac{W_2^2}{\gamma} - W_1^2 + U_1^2 + U_1^2 - U_2^2 \right] \quad (49)$$

$$\psi = \left(\frac{D_{2n}}{D_{1I}} U_{1I} \right)^2 \left[\frac{C_1^2}{\gamma} - C_0^2 + \frac{W_2^2}{\gamma} - W_1^2 + U_{1I}^2 \left(\frac{D_{1n}^2}{D_{1I}^2} - \frac{D_{2n}^2}{D_{1I}^2} \right) \right] \quad (50)$$

annimmt und die Durchflusszahl (bei vollbeaufschlagten Maschinen)

$$\psi = \frac{\dot{m} \cdot v_2}{u_2 \cdot \Omega_2} = \frac{c_{n2}}{u_2} k_1 \quad (51)$$

die mit der Vereinfachung $k_1 = 1$ zu

$$\psi = \frac{W_2 \sin \beta_2}{\frac{D_{2n}}{D_{1I}} U_{1I}} \quad (52)$$

wird.

Daraus lassen sich leicht herleiten die Schluckzahl μ

$$\mu = \frac{\psi}{\sqrt{\psi}} \quad (53)$$

und die Laufzahl

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\psi}} \quad (54)$$

Diese beiden Zahlen liefern gute Unterlagen zur Kontrolle der Rechnung, da man weiss, dass

$$\mu = \mu(\nu)$$

ungefähr konstant ist und für grosse und kleine ν etwas zunehmen muss. Der Wirkungsgrad über der Laufzahl aufgetragen ergibt ungefähr eine Parabel, die für steigende Reaktion etwas völliger wird.

Schliesslich interessiert noch der Reaktionsgrad

$$r \equiv \frac{\Delta i_s'}{\Delta i_s} \quad (55)$$

$$r = \frac{\frac{W_2^2}{\gamma^n} - W_1^2 + U_{1I}^2 \left[\frac{D_{1n}^2}{D_{1I}^2} - \frac{D_{2n}^2}{D_{1I}^2} \right]}{\frac{C_1^2}{\gamma^r} - C_o^2 + \frac{W_2^2}{\gamma^n} - W_1^2 + U_{1I}^2 \left[\frac{D_{1n}^2}{D_{1I}^2} - \frac{D_{2n}^2}{D_{1I}^2} \right]} \quad (56)$$

In den Gleichungen (50) und (56) kommt die Geschwindigkeit C_o vor, die gleich C_2 der vorhergehenden Stufe ist. Für die erste Stufe gilt

$$c_o \cdot \sin \alpha_o \cdot \Omega_o = \dot{m} \cdot v_o \quad (57)$$

$$c_o = \frac{\dot{m} \cdot v_o}{\sin \alpha_o \cdot \Omega_o}$$

$$C_o = \frac{\kappa - 1}{2 \kappa} \dot{M}_D \frac{\Omega_1}{\Omega_o} \frac{T_o}{T_{ot}} \frac{P_o}{p_o} \frac{1}{\sin \alpha_o} \quad (58)$$

$\frac{T_o}{T_{ot}} \cdot \frac{P_o}{p_o}$ ist ungefähr 1, meist sind auch $\alpha_o = 90^\circ$ und $\frac{\Omega_1}{\Omega_o} \approx 1$, sodass für die kleine Grösse C_o genügend genau

$$C_o = \frac{x-1}{2x} \dot{M}_D \quad (59)$$

gesetzt werden darf.

3.5. Radwirkungsgrade

Die Radwirkungsgrade η' und η'' haben wir in der Form

$$\eta' = \eta'(\alpha_o, C_o, Re) \quad (1)$$

und

$$\eta'' = \eta''(\beta_1, W_1, Re) \quad (2)$$

als gegeben angenommen. Diese Darstellungsart ist aber nicht üblich. Die Diagrammdarstellung erschwert ferner die digital-elektronische Berechnung.

Eine eigentliche Berechnung des jeweiligen Radwirkungsgrades auf theoretischer Basis scheidet zum vornherein aus, hingegen kann ein qualitativ richtiger Ansatz für die Rechnung eine grosse Hilfe sein. Um den Charakter eines solchen Ansatzes zu finden, bedarf es einiger grundsätzlicher Ueberlegungen.

Denken wir uns zuerst ein Gitter, das ein wesentliches Druckgefälle umsetzt, und bei dem somit eine stark beschleunigte Strömung vorliegt. Der Druckumsatz wird also mindestens über einen erheblichen Bereich von Zuströmwinkeln mit verhältnismässig kleinen Verlusten erfolgen. Lediglich die Ausnutzung der kinetischen Energie wird je nach Anströmung mit mehr oder weniger grossen Verlusten behaftet sein. Es erscheint demzufolge richtig, eine Verschlechterung des Radwirkungsgrades nur diesem Anteil zuzuschreiben. Anstelle des üblichen Ansatzes

$$\frac{c_1^2}{2} = \eta'(h_o - i_{1s}) \quad (3)$$

$$\frac{c_1^2}{2} = \eta'(i_o - i_{1s} + \frac{c_o^2}{2}) \quad (4)$$

schreiben wir

$$\frac{c_1^2}{2} = \eta^{**} (i_0 - i_{1s} + a_{\Delta} \cdot \frac{c_0^2}{2}) \quad (5)$$

η^{**} ist der Radwirkungsgrad im Auslegungspunkt, der jetzt auch für sämtliche anderen Betriebspunkte konstant gehalten wird. Die Verschlechterung der Umsetzung bei unkorrekter Anströmung wird durch die Variation des Faktors a_{Δ} berücksichtigt. Im Optimalpunkt ist $a_{\Delta} = 1$, in allen übrigen Betriebspunkten $a_{\Delta} < 1$.

Analog gilt für das Laufrad

$$\frac{w_2^2}{2} = \eta^{**} (i_1 - i_{2s} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + b_{\Delta} \frac{w_1^2}{2}) \quad (6)$$

Der Anteil der Feldkräfte ist analog der statischen Druckumsetzung zu behandeln, da hier nur die Feldbeschleunigung anstelle der konvektiven Beschleunigung tritt.

Es bleibt nun noch die Abhängigkeit der Faktoren a_{Δ} und b_{Δ} vom Anströmwinkel zu formulieren. Diese ist rein empirisch und muss auf Messunterlagen basieren. Die wenigen Literaturstellen, die darüber etwas aussagen, lassen sich etwa wie folgt zusammenfassen:

Die Art der Abhängigkeit von Anströmwinkel und Anströmgeschwindigkeit ist von Profil zu Profil verschieden. Während die einen Autoren für positive und negative Winkelvariationen symmetrische Abweichungen angeben, vgl. z.B. Kraft [11] stellen andere eine ausgesprochene Asymmetrie fest, z.B. Friedrich [7], wobei sich hier vor allem der "Bauchstoss" (vgl. Abb. 1) als sehr verlustbehaftet zeigt. In einer Zusammenstellung von Traupel [1] kommen beide Varianten vor, selbstverständlich mit allen Uebergängen.

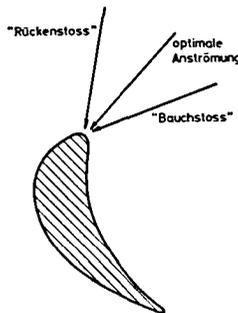


Abb. 3.5.1. Benennungen bei unkorrekter Anströmung

Allgemein ist die Tendenz festzustellen, dass die Abhängigkeit umso grösser ist, je stärker umgelenkt wird. Diese Aussage bestätigt vorerst die früher dargelegten Gedankengänge.

Ein numerischer Vergleich zeigt, dass die Winkelabhängigkeit je nach der Profilform sehr verschieden ist. Der Ansatz

$$a_{\Delta} = 1 - k (\Delta \alpha)^n \quad (7)$$

gibt den Verlauf sehr gut wieder, wobei für "Rücken-" und "Bauchstoss" nicht notwendigerweise dieselben Konstanten einzusetzen sind. Bei Verwendung der Indices α für Leitrad, β für Laufrad, R für Rückenstoss und B für Bauchstoss ergibt sich für das Leitrad

$$a_{\Delta} = 1 - k_{\alpha B} \cdot (\Delta \alpha)^n \alpha^B \quad \text{für} \quad \alpha < \alpha_{\text{opt}} \quad (8)$$

$$a_{\Delta} = 1 - k_{\alpha R} \cdot (\Delta \alpha)^n \alpha^R \quad \text{für} \quad \alpha > \alpha_{\text{opt}} \quad (9)$$

und für das Laufrad

$$b_{\Delta} = 1 - k_{\beta B} \cdot (\Delta \beta)^n \beta^B \quad \text{für} \quad \beta < \beta_{\text{opt}} \quad (10)$$

$$b_{\Delta} = 1 - k_{\beta R} \cdot (\Delta \beta)^n \beta^R \quad \text{für} \quad \beta > \beta_{\text{opt}} \quad (11)$$

Durch geeignete Wahl der Konstanten k und Exponenten n kann der η -Verlauf gut dargestellt werden.

Die Gleichung (5) kann noch umgeformt werden zu

$$\frac{c_1^2}{2} = \eta'^* \left[(h_o - i_{1s}) - (1 - a_{\Delta}) \frac{c_o^2}{2} \right] \quad (12)$$

oder dimensionslos

$$C_1^2 = \eta'^* \theta \left[1 - \pi' \frac{\chi-1}{\chi} \right] - (1 - a_{\Delta}) C_o^2 \quad (13)$$

Sie eignet sich etwas besser für das praktische Rechnen, da für die erste Stufe die Festlegung einer Geschwindigkeit c_0 nicht notwendig wird. Der 2. Ausdruck fällt dann einfach weg.

Zur Berechnung der Druckzahl ψ , des Reaktionsgrades r , sowie der daraus abgeleiteten Grössen μ und ν werden die Radwirkungsgrade benötigt. Um vergleichbare Resultate zu erhalten, müssen die nach Gl. 3.4. (19) und (22) definierten Radwirkungsgrade eingesetzt werden.

Diese heissen

$$\eta' = \frac{C_1^2}{\beta (1 - \pi' \frac{\kappa - 1}{\kappa})} \quad (14)$$

und

$$\eta'' = \frac{W_2^2}{(\beta - C_1^2)(1 - (\frac{\pi'}{\pi}) \frac{\kappa - 1}{\kappa}) + W_1^2 + U_2^2 - U_1^2} \quad (15)$$

3.6. Lösungsmethode

Zu lösen ist das folgende Gleichungssystem:

$$C_1^2 = \eta' * \theta \left[1 - \pi' \frac{\kappa - 1}{\kappa} \right] - (1 - a_\Delta) C_0^2 \quad (1)$$

$$\dot{M}_D = \frac{2 \kappa}{\kappa - 1} \sin \alpha_1 C_1 \pi' \frac{\Omega_{1n}}{\Omega_{1I}} \frac{Q}{\theta - C_1^2} \quad (2)$$

$$W_1^2 = C_1^2 + \left(\frac{D_{1n}}{D_{1I}} \right)^2 U_{1I}^2 - 2 \frac{D_{1n}}{D_{1I}} U_{1I} C_1 \cos \alpha_1 \quad (3)$$

$$\beta_1 = \arcsin \left(\frac{C_1}{W_1} \sin \alpha_1 \right) \quad (4)$$

$$b_{\Delta} = 1 - k_{\beta} (\Delta \beta)^n \beta \quad (5)$$

$$W_2^2 = \gamma^{**} \left[(\beta - C_1^2) \left(1 - \left(\frac{\pi'}{\pi} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right) + b_{\Delta} W_1^2 + U_2^2 - U_1^2 \right] \quad (6)$$

$$\dot{M}_D = \frac{2\kappa}{\kappa-1} \sin \beta_2 \frac{\Omega_{2n}}{\Omega_{1I}} \frac{W_2 \cdot \pi \cdot Q}{\theta - C_1^2 + W_1^2 - W_2^2 + U_2^2 - U_1^2} \quad (7)$$

$$C_2^2 = W_2^2 + \left(\frac{D_{2n}}{D_{1I}} \right)^2 U_{1I}^2 - 2 \left(\frac{D_{2n}}{D_{1I}} \right) U_{1I} W_2 \cos \beta_2 \quad (8)$$

$$\alpha_2 = \arcsin \left(\frac{W_2}{C_2} \sin \beta_2 \right) \quad (9)$$

$$a_{\Delta} = 1 - k_{\alpha} (\Delta \alpha)^n \alpha \quad (10)$$

Die Gleichungen (4) und (9) zur Berechnung von β_1 und α_2 folgen unmittelbar aus dem Geschwindigkeitsdreieck (vergl. Abb. 3.3.2).

In diesem Gleichungssystem sind θ und Q als Anfangsbedingungen gegeben. α_1 und β_2 legen die jeweilige Stellung der Leit- und Laufschaufeln fest. Diese beiden Winkel, sowie U_{1I} und \dot{M}_D sind zur Bestimmung des Gleichungssystems notwendig und hinreichend.

Allerdings ist es nicht möglich, aus diesen Grössen alle andern direkt zu berechnen. Verwendet wurde das folgende Rechenprogramm:

Vorgegeben ist \dot{M}_D . Aus Gl. (1) und (2) wird durch sukzessive Approximation das zugehörige Wertepaar π' , C_1 gesucht. Gl. (3) gibt dann W_1 , Gl. (4) β_1 und Gl. (5) b_{Δ} . Aus den Gln. (6) und (7) ist wieder auf die vorher beschriebene Weise das Wertepaar π , W_2 zu finden, worauf Gl. (8) C_2 , Gl. (9) α_2 und Gl. (10) a_{Δ} liefern.

Zur Bestimmung des Wertepaares π' , C_1 gehen wir aus von einem an sich beliebigen, aber möglichst zweckmässig gewählten π' , aus dem wir nach Gl. (1) C_1 und Gl. (2) \dot{M}_D ausrechnen. Dieses \dot{M}_{D1} (1. Näherung) wird im allgemeinen nicht mit dem vorgegebenen \dot{M}_D übereinstimmen. Wir müssen für π' eine zweckmässige Korrektur finden. Dies geschieht durch Linearisierung.

Gl. (1) differenziert nach π' gibt

$$2C_1 \frac{dC_1}{d\pi'} = -\gamma'^* \theta \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\pi'}{\pi'} + C_0^2 \frac{da_\Delta}{d\pi'} \quad (11)$$

a_Δ ist aber von π' unabhängig und die Ableitung

$$\frac{da_\Delta}{d\pi'} \equiv 0$$

Somit verbleibt nach kurzer Umformung

$$\frac{d\pi'}{dC_1} = -\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{\pi' C_1}{\gamma'^* \theta - C_1^2 + (1 - a_\Delta) C_0^2} \quad (12)$$

Für die praktische Rechnung wurde $(1 - a_\Delta) C_0^2$ gegenüber $\gamma'^* \theta - C_1^2$ vernachlässigt. Nur in ganz ausserordentlichen Betriebszuständen wird $(1 - a_\Delta) C_0^2$ merkbar und seine Streichung beeinflusst nur die Konvergenzgeschwindigkeit, nicht aber die Genauigkeit.

Gl. (12) heisst dann

$$\frac{d\pi'}{dC_1} = -\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{\pi' C_1}{\gamma'^* \theta - C_1^2} \quad (13)$$

Gl. (2) abgeleitet nach C_1 ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{M}_D}{dC_1} &= \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \sin\alpha_1 \frac{\Omega}{\Omega_{1I}} Q \frac{1}{[\theta - C_1^2]^2} \left[(\theta - C_1^2) \left(C_1 \frac{d\pi'}{dC_1} + \pi' \right) + 2C_1^2 \pi' \right] \\ \frac{d\dot{M}_D}{dC_1} &= \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \sin\alpha_1 \frac{\Omega}{\Omega_{1I}} \frac{Q}{[\theta - C_1^2]^2} \left[(\pi' + C_1 \frac{d\pi'}{dC_1}) (\theta - C_1^2) + 2C_1^2 \pi' \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{d\dot{M}_D}{d\pi'} = \frac{d\dot{M}_D}{dC_1} \cdot \frac{dC_1}{d\pi'} \quad (15)$$

und wir erhalten als Korrektur

$$\Delta \pi' = \frac{d\pi'}{d\dot{M}_D} \Delta \dot{M}_D \quad (16)$$

Der verbesserte Wert für die Iteration ist dann

$$\pi'_{n+1} = \pi'_n + \frac{d\pi'}{d\dot{M}_D} (\dot{M}_D - \dot{M}_{Dn}) \quad (17)$$

Das Auffinden des Wertepaares π , W_2 des Laufrades erfolgt analog. Aus Gl. (6) folgt

$$2W_2 \frac{dW_2}{d\pi} = -\gamma^{**} (\theta - C_1^2) \frac{\lambda - 1}{\lambda} \frac{\left(\frac{\pi}{\pi'}\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}{\frac{\pi}{\pi'} \cdot \pi'} + W_1^2 \frac{db \Delta}{d\pi} \quad (18)$$

Da auch hier $\frac{db \Delta}{d\pi} \equiv 0$ ist, resultiert

$$\frac{d\pi}{dW_2} = -\frac{2\lambda}{\lambda-1} \frac{W_2 \pi}{\gamma^{**} (\theta - C_1^2) \left(\frac{\pi}{\pi'}\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}} \quad (19)$$

$$\frac{d\pi}{dW_2} = -\frac{2\lambda}{\lambda-1} \frac{W_2 \pi}{\gamma^{**} (\theta - C_1^2) \left(\frac{\pi}{\pi'}\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}} \quad (19)$$

und da nach Gl. (6)

$$\left(\frac{\pi}{\pi'}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = 1 - \frac{W_2^2}{\gamma^{n^*}} - \frac{b_{\Delta} W_1^2 - U_2^2 + U_1^2}{\theta - C_1^2} \quad (20)$$

folgt

$$\frac{d\pi}{dW_2} = - \frac{2\alpha}{\alpha-1} \frac{\pi W_2}{\gamma^{n^*} \left[\theta - C_1^2 + b_{\Delta} W_1^2 - \frac{W_2^2}{\gamma^{n^*}} + U_2^2 - U_1^2 \right]} \quad (21)$$

Gl. (7) ergibt nach W_2 abgeleitet

$$\frac{d\dot{M}_D}{dW_2} = \frac{2\alpha}{\alpha-1} \sin \beta_2 \frac{\Omega}{\Omega_{1I}} Q \frac{(\theta - C_1^2 + W_1^2 - W_2^2 + U_2^2 - U_1^2)(W_2 \frac{d\pi}{dW_2} + \pi) + 2W_2^2 \pi}{(\theta - C_1^2 + W_1^2 - W_2^2 + U_2^2 - U_1^2)} \quad (22)$$

Daraus folgt wiederum die Korrektur

$$\Delta \pi = \frac{d\pi}{d\dot{M}_D} \Delta \dot{M}_D \quad (23)$$

und der verbesserte Wert für π ist

$$\pi_{n+1} = \pi_n + \frac{d\pi}{d\dot{M}_D} (\dot{M}_D - \dot{M}_{Dn}) \quad (24)$$

Hiermit ist das Gleichungssystem (1) ... (10) gelöst.

Es können jetzt alle weiteren Grössen leicht berechnet werden. Insbesondere ergeben Gl. 3.4. (26) und (30) den Totalzustand nach dieser Stufe und somit den Anfangstotalzustand der nächsten Stufe, die auf gleiche Weise durchgerechnet wird.

Nach der letzten Stufe wird Gl. 3.4. (26) durch Gl. 3.4. (28) ersetzt.

Die Lösung des Gleichungssystems muss neu bestimmt werden für

- jede Stufe
- jede Menge
- jede Umfangsgeschwindigkeit
- jede Schaufelstellung

Dies ergibt sofort eine grosse Anzahl Kombinationen und rechtfertigt den Einsatz eines Rechenautomaten.

Die Rechnung wurde auf der ERMETH (Elektronische Rechenmaschine der Eidg. Techn. Hochschule, Zürich) durchgeführt. Die Berechnung eines Betriebspunktes erfordert ca. 1 Minute Rechenzeit pro Stufe.

Genauere Angaben über den Rechnungsgang gibt die Beschreibung des Programmes ERMETH 03/3577.

3.7. Maximal mögliche Durchflussmenge

Die Kontinuitätsgleichung in den Formen 3.3. (7) und (14) bzw. 3.4. (20) und (23) gilt nur soweit, bis in einem Radkranz die maximale Massenstromdichte erreicht wird. Diese Grenzbedingungen sind für Leit- und Laufrad einzeln zu formulieren.

Für das Leitrad ist die maximale Massenstromdichte dann erreicht, wenn

$$\frac{d\dot{M}_D}{d\pi'} = 0 \quad (1)$$

ist, oder wegen

$$\frac{d\dot{M}_D}{d\pi'} = \frac{d\dot{M}_D}{dC_1} \cdot \frac{dC_1}{d\pi'} \quad (2)$$

auch wenn

$$\frac{d\dot{M}_D}{dC_1} = 0 \quad (3)$$

da der Faktor $\frac{dC_1}{d\pi'}$ stets von null verschieden ist.

Nach Gl. 3.6. (14) ist dann

$$(\pi' + C_1 \frac{d\pi'}{dC_1})(\theta - C_1^2) + 2C_1^2 \pi' = 0 \quad (4)$$

$$\pi' (\theta - C_1^2) + C_1 \frac{d\pi'}{dC_1} (\theta - C_1^2) + 2C_1^2 \pi' = 0$$

und mit der nach C_1 abgeleiteten Gl. 3.4. (19)

$$\frac{d\pi'}{dC_1} = - \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{\pi' C_1}{\eta' \theta - C_1^2} \quad (5)$$

resultiert

$$- \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{\pi' C_1}{\eta' \theta - C_1^2} C_1 (\theta - C_1^2) + \pi' (\theta - C_1^2) + 2C_1^2 \pi' = 0$$

$$- \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{1 - \frac{C_1^2}{\theta}}{\eta' - \frac{C_1}{\theta}} \frac{C_1^2}{\theta} + 1 + \frac{C_1^2}{\theta} = 0 \quad (6)$$

Mit der Abkürzung

$$A \equiv \frac{C_1^2}{\theta} \quad (7)$$

bleibt schliesslich die quadratische Gleichung

$$A^2 \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} - A \left[\frac{2\kappa}{\kappa - 1} + (1 - \eta') \right] + \eta' = 0 \quad (8)$$

die nach A aufgelöst werden kann.

Für den reibungsfreien Fall ergibt sich

$$A^2 \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} - A \frac{2\kappa}{\kappa - 1} + 1 = 0$$

oder

$$C_1^{+2} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \eta' \quad (9)$$

Im Laufrad gelten analog Gl. (1) und Gl. (3) die Bedingungen

$$\frac{d\dot{M}_D}{d\pi} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{d\dot{M}_D}{dW_2} = 0 \quad (11)$$

und damit

$$(\theta - C_1^2 + W_1^2 - W_2^2 + U_2^2 - U_1^2) \left(\pi + \frac{d\pi}{dW_2} W_2 \right) + 2W_2^2 \pi = 0 \quad (12)$$

Gl. 3.4. (22) nach W_2 abgeleitet gibt

$$\frac{d\pi}{dW_2} = - \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{W_2 \pi}{\eta'' (\theta - C_1^2) \left(\frac{\pi}{\pi'} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \quad (13)$$

und in Gl. (12) eingesetzt

$$\left[\pi - \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{W_2^2 \pi}{\eta'' \left[\theta - C_1^2 + W_1^2 - \frac{W_2^2}{\eta''} + U_2^2 - U_1^2 \right]} \right] + \frac{2W_2^2 \pi}{\theta - C_1^2 + W_1^2 - W_2^2 + U_2^2 - U_1^2} = 0 \quad (14)$$

Mit der Definition

$$B \equiv \frac{W_2^2}{\theta - C_1^2 + W_1^2 + U_2^2 - U_1^2} \quad (15)$$

bleibt

$$- \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{1 - B}{\eta'' - B} B + 1 + B = 0$$

oder

$$B \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} - B \left[\frac{2\kappa}{\kappa - 1} + (1 - \eta'') \right] + \eta'' = 0 \quad (16)$$

Diese Form ist dieselbe wie bei Gl. (8) und B kann ausgerechnet werden. Da Gl. (15) im Nenner nur bekannte Grössen enthält, ist hieraus W_2^+ zu bestimmen.

Anhand dieser Formeln kann nachgeprüft werden, ob die angenommene Menge noch überall unter derjenigen maximaler Massenstromdichte liegt und ob die Kontinuitätsgleichung für unter- oder überkritische Verhältnisse zu verwenden ist.

Nur beim ersten Leitrad, wo die Anfangsbedingungen nicht von \dot{M}_D abhängen, kann eine explizite Lösung für \dot{M}_D^+ angegeben werden.

3.8. Ueberkritische Verhältnisse

Sobald überkritische Druckverhältnisse auftreten, wird im engsten Querschnitt maximale Massenstromdichte erreicht. Praktisch kommt dies nur in ganz speziellen Fällen vor, so z. B. bei einem verstellbaren Leitapparat in stark geschlossenem Zustand. Ein solcher gehört aber üblicherweise der ersten Stufe an. Dort gilt

$$\dot{M}_D^+ = \frac{2 \kappa}{\kappa - 1} \sin \alpha_1 \frac{C_1^+ \cdot \pi^{'+}}{1 - C_1^{+2}} \quad (1)$$

\dot{M}_D^+ ist direkt proportional dem Sinus des Öffnungswinkels α_1 .

Das unter 3.6. angegebene Lösungsverfahren muss dann leicht modifiziert werden.

Aus Gl. 3.7. (8) ist C_1^+ zu berechnen, aus Gl. 3.6. (1) $\pi^{'+}$, worauf die Menge \dot{M}_D^+ aus Gl. 3.6. (2) folgt. Diese kann also nicht mehr angenommen werden, hingegen ist $\pi^{'+}$ jetzt frei wählbar. Aus Gl. 3.6. (1) folgt dann C_1^{++} , worauf die Rechnung wie unter 3.6. beschrieben weiter geht.

Durch die Nachexpansion nach dem Leitrad erfolgt eine Strahlablenkung im Sinne einer Vergrößerung des Abströmwinkels. Bei Machzahlen wenig über eins ist dieser Einfluss allerdings gering und wir rechnen daher nach wie vor mit dem als konstant vorausgesetzten Winkel α_1 .

3.9. Daten der berechneten Maschine

Für die Berechnung wurde von einer Einheitsstufe ausgegangen, die charakterisiert ist durch die Abströmwinkel $\alpha_1 = 21^\circ$ und $\beta_2 = 30^\circ$. Die Querschnitte sind so gewählt, dass für $U = 0,2$ ungefähr $\varphi = 0,55$ wird. Dies ergibt einen Reaktionsgrad von ca. 20 %. Das Geschwindigkeitsdreieck im Auslegungspunkt zeigt Abb. 3.3.2. Das im Leitrad umgesetzte Druckverhältnis π' (vergl. Def. 2.3(8.)) ist mit 1.58 recht hoch, was die Wirksamkeit der Verstellstufe erhöht (vergl. 2.3.).

Die Radwirkungsgrade im Auslegungspunkt wurden mit $\eta'^* = 0,92$ und $\eta''^* = 0,90$ angenommen. Für die Wirkungsgradberechnung wurden $k_R = 200 \cdot 10^{-6}$ und $k_B = 400 \cdot 10^{-6}$ gesetzt, n_α und n_β sind 2. Diese Faktoren sind aus Versuchsunterlagen gewonnen, ihre Werte veranschaulicht Abb. 1.

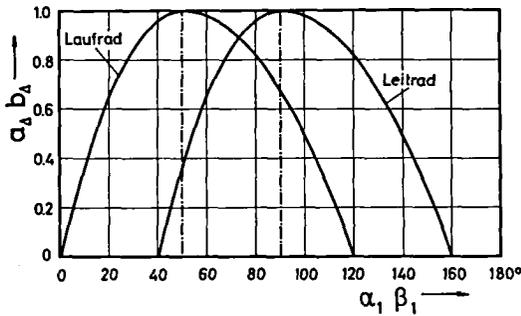


Abb. 3.9.1. Verschlechterung der Radwirkungsgrade infolge unkorrekter Anströmung

Nach der letzten Stufe schliesst ein Diffusor an, der 65 % der Normalkomponente c_{n2} in statischen Druck umzusetzen vermag.

Die Umfangsgeschwindigkeit ist konstant für alle Stufen, die Querschnitte sind so angepasst, dass im Auslegungspunkt φ ungefähr konstant ist. Einzig für die Berechnung des inkompressiblen Grenzfall es ist Ω konstant gesetzt.

3.10. Beurteilung der Resultate

Das Verhalten der einstufigen Maschine wurde für die Leitschaufelstellungen $\alpha_1 = 15, 17, 19, 21, 25, 30$ und 35° und die Umfangsgeschwindigkeiten $U = 0.0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25$ und 0.3 berechnet, was total 49 Kombinationen ergibt.

Abb. 1 ... 3 zeigen den Zusammenhang zwischen Druckverhältnis und Durchflussmenge mit der Umfangsgeschwindigkeit als Parameter, dargestellt für die Winkelstellungen $\alpha_1 = 17, 21$ und 30° . Der Einfluss der Umfangsgeschwindigkeit ist durchaus fühlbar, vor allem in Betriebszuständen, deren Geschwindigkeitsdreieck von jenem des Auslegungspunktes stark abweicht. Ainley [3] hat mit Messungen an Gleichdruck- und Ueberdruckturbinen diese Tatsache bestätigt. Weitere Hinweise finden sich auch bei [8]; [9], u. a. Dass bei verschwindendem Druckverhältnis und vorwärts laufender Turbine ein positiver Durchfluss verbleiben kann, zeigt Egli [6].

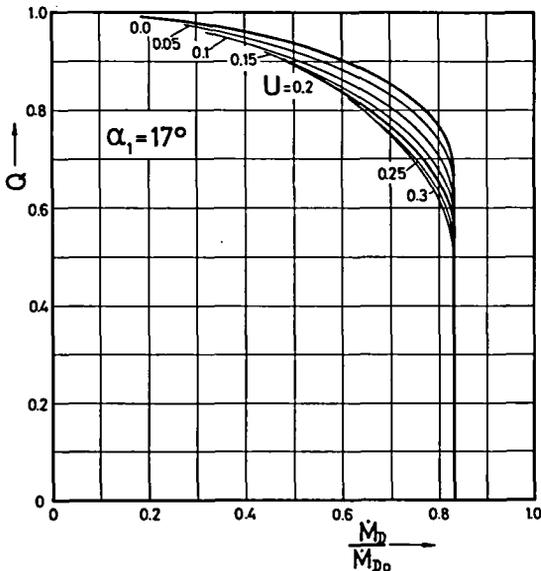


Abb. 3.10.1. Durchflusscharakteristik einer einstufigen Turbine

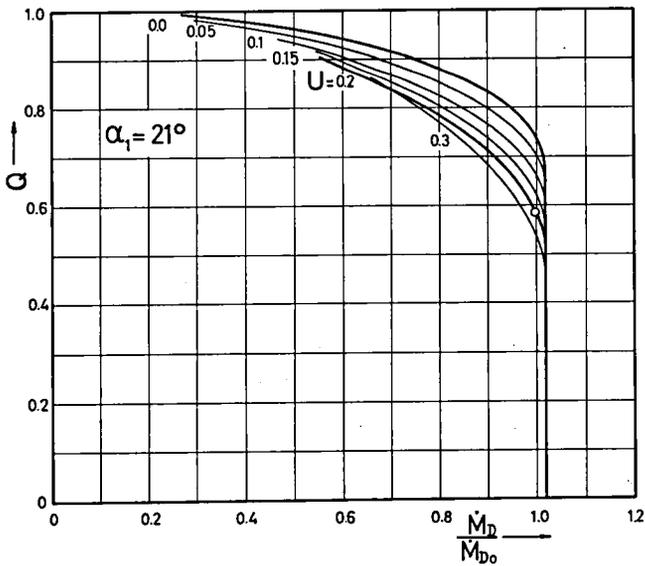


Abb. 3.10.2. Durchflusscharakteristik einer einstufigen Turbine

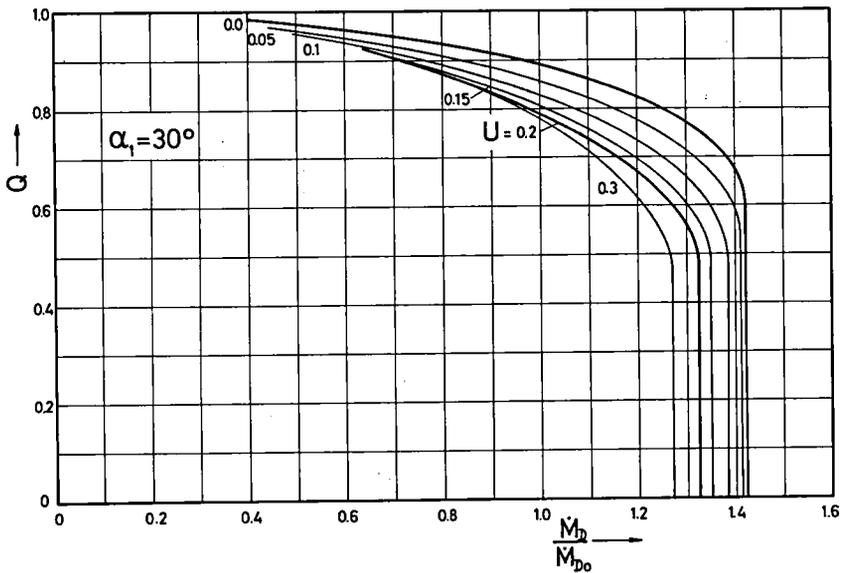


Abb. 3.10.3. Durchflusscharakteristik einer einstufigen Turbine

Abb. 4 ... 7 zeigen dieselben Resultate für konstante Umfangsgeschwindigkeit mit dem Verstellwinkel als Parameter aufgezeichnet. Direkt können diese Kurven nicht geprüft werden, da sich keine entsprechenden Messresultate finden. Da aber das Rechenverfahren für einen beliebigen festen Winkel geprüft ist, muss es für jeden Winkel richtige Resultate liefern. Solange maximale Massenstromdichte im Leitrad erreicht wird, muss die dimensionslose Durchflussmenge proportional dem Sinus des Verstellwinkels variieren, in allen anderen Fällen ist der Einfluss geringer (vergl. 2.3.). Diese Feststellung findet sich in den Resultaten bestätigt. Aus den eingetragenen Muschelkurven ist der grosse Bereich guter Wirkungsgrade zu erkennen.

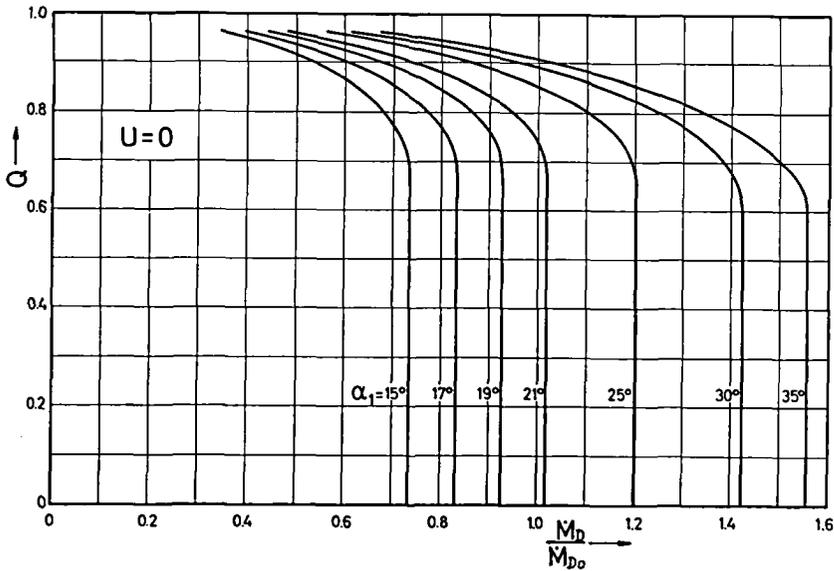


Abb. 3.10.4. Durchflusscharakteristik einer einstufigen Turbine mit drehbaren Leitschaufeln

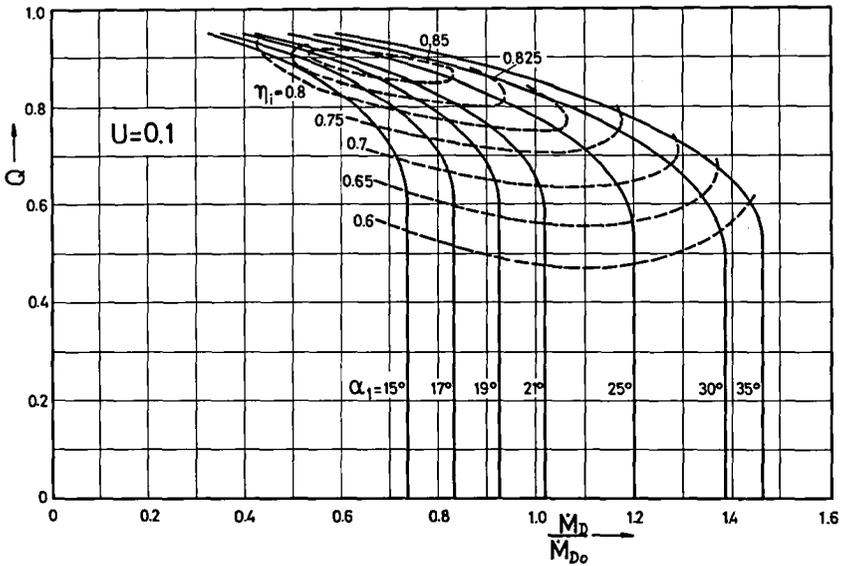


Abb. 3.10.5. Durchflusscharakteristik einer einstufigen Turbine mit drehbaren Leitschaufeln

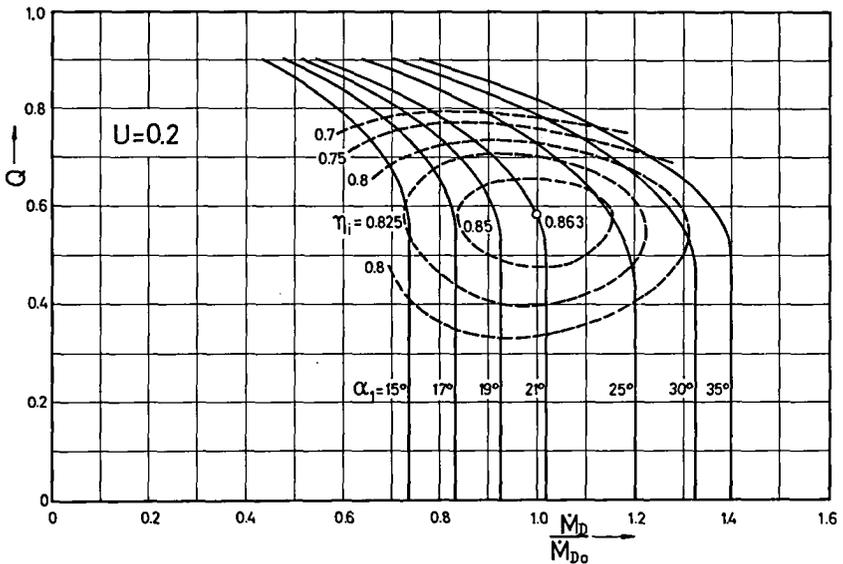


Abb. 3.10.6. Durchflusscharakteristik einer einstufigen Turbine mit drehbaren Leitschaufeln

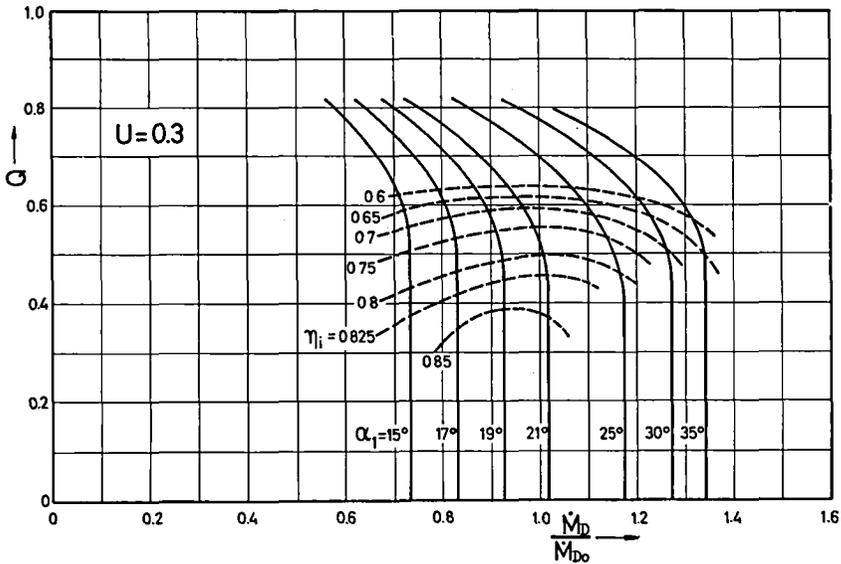


Abb. 3.10.7. Durchflusscharakteristik einer einstufigen Turbine mit drehbaren Leitschaufeln

Die Turbinenwirkungsgrade sind in Abb. 8 ... 10 als Funktion des Totaldruckverhältnisses aufgezeichnet, in der Form, wie sie in den weiteren Rechnungen praktisch gebraucht werden. Auch hier gibt Ainley [3] die Bestätigung für den qualitativ richtigen Verlauf. Ihre Ueberprüfung kann auch erfolgen, indem man von der Erfahrungstatsache Gebrauch macht, dass $\eta = \eta(\nu)$ eine parabelartige Kurve gibt. (Traupel [1], Ainley [3]). Auch dieser Zusammenhang stimmt mit den Rechnungen gut überein (Abb. 11).

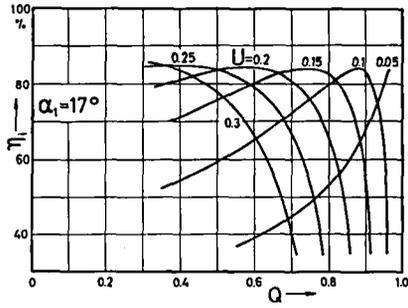


Abb. 3.10.8. Wirkungsgradcharakteristik einer einstufigen Turbine

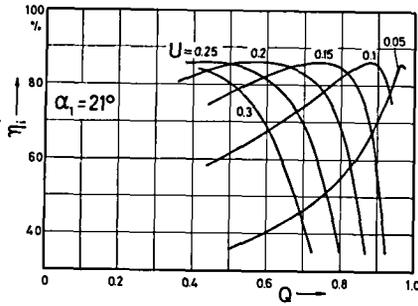


Abb. 3.10.9. Wirkungsgradcharakteristik einer einstufigen Turbine

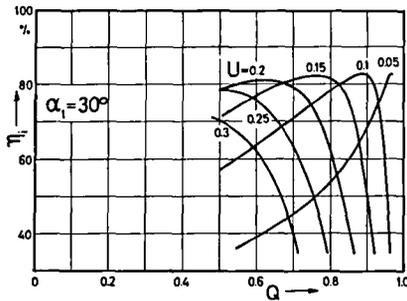


Abb. 3.10.10. Wirkungsgradcharakteristik einer einstufigen Turbine

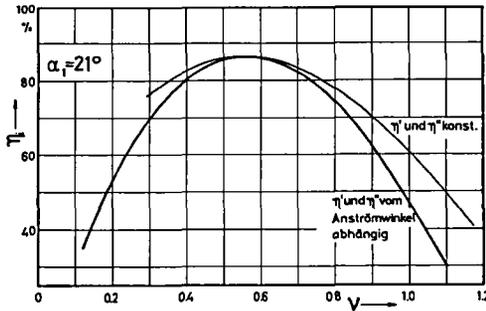


Abb. 3.10.11. Wirkungsgradparabel für Profile mit verschiedenen Anströmempfindlichkeiten

Ebenfalls als Funktion der Laufradzahl v wurde die Durchsatzzahl μ aufgetragen (Abb. 12 ... 14). μ wird oft konstant gesetzt, eine Annahme, die für approximative Rechnungen bei nicht allzu extremen Betriebszuständen sicher zweckmässig ist. Es zeigen sich aber doch einige charakteristische Abweichungen. So ist für kleine v (langsamlaufende Turbine) μ merkbar grösser als im Auslegungspunkt. Diese Resultate decken sich mit Angaben von Traupel [1], Ainley [3] und Isogai [9]. Für grosse v (schnellaufende Maschine) findet ein Wiederanstieg von μ nur für anströmungsunempfindliche Profile statt, während im anderen Fall μ weiter abnimmt und ein Minimum erst bei sehr grossen v findet. Dieses Charakteristikum kommt auch bei Traupel [1] zum Ausdruck, indem diese Kurventypen dort für Ueberdruck- und Gleichdruckturbine angegeben werden. Tatsächlich ist die Gleichdruckturbine empfindlicher auf falsche Anströmung. Diese Feststellungen gelten für kompressible und inkompressible Medien (Abb. 12 und 13). Abb. 14 zeigt noch den Einfluss der Umfangsgeschwindigkeit auf μ . Die Kurven verlaufen weitgehend gleich und zeigen nur in der Nähe des Schallpunktes merkbare Abweichungen.

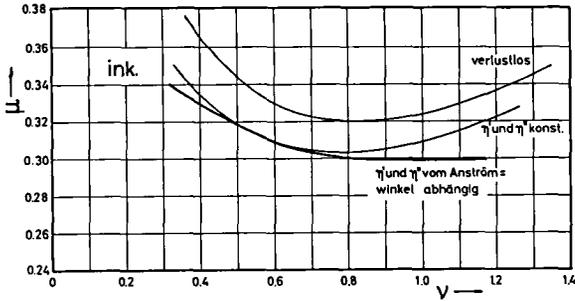


Abb. 3.10.12. Verlauf der Schluckzahl μ im inkompressiblen Grenzfall, verlustlos und für verschiedene Anströmeigenschaften

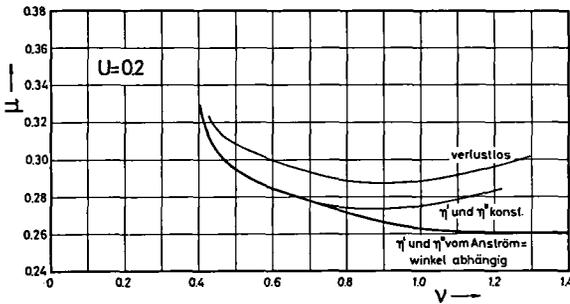


Abb. 3.10.13. Verlauf der Schluckzahl μ im kompressiblen Fall, verlustlos und für verschiedene Anströmeigenschaften

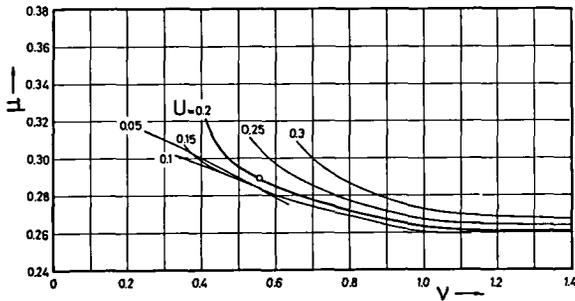


Abb. 3.10.14. Einfluss der Kompressibilität auf die Schluckzahl

Mit der Berechnung der dimensionslosen Drehmomente (Abb. 15 ... 17), die wiederum anhand der Resultate von Ainley [3] auf ihre qualitative Richtigkeit geprüft werden können, ist das Verhalten der Turbine völlig beschrieben.

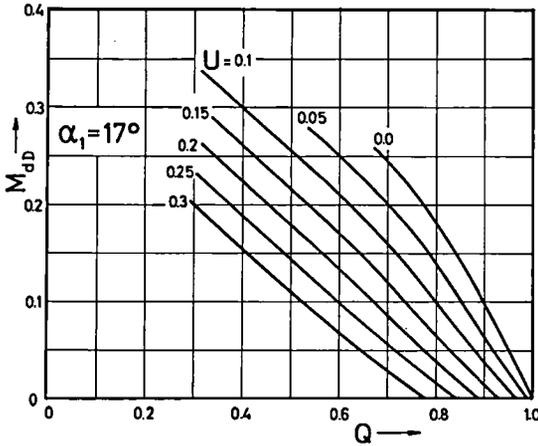


Abb. 3.10.15. Drehmomentcharakteristik einer einstufigen Turbine

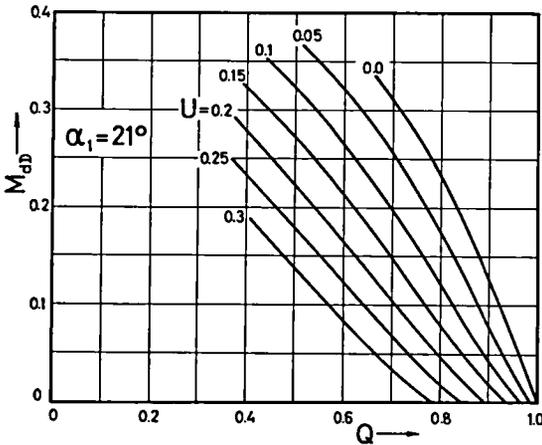


Abb. 3.10.16. Drehmomentcharakteristik einer einstufigen Turbine

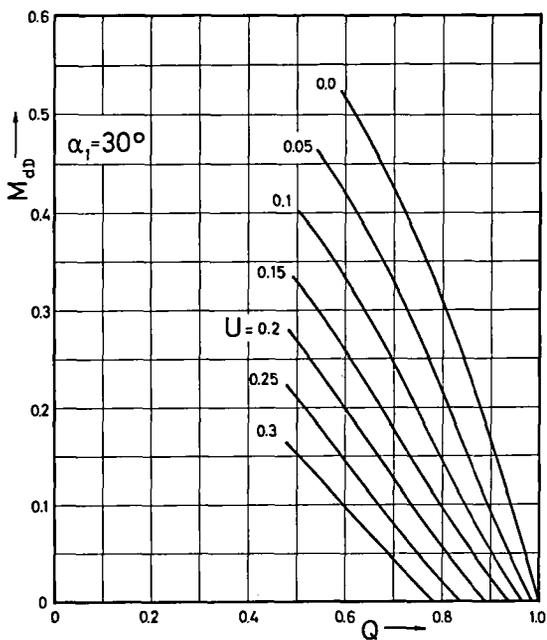


Abb. 3.10.17. Drehmomentcharakteristik einer einstufigen Turbine

Die zweistufige Maschine wurde für $\alpha_1 = 17, 21$ und 30° bei $U = 0.0, 0.1, 0.2$ und 0.3 berechnet. Abb. 18 ... 20 zeigen den Zusammenhang zwischen Druckverhältnis und Durchflussmenge, Abb. 21 ... 23 die Wirkungsgrade und Abb. 24 ... 26 die Drehmomente.

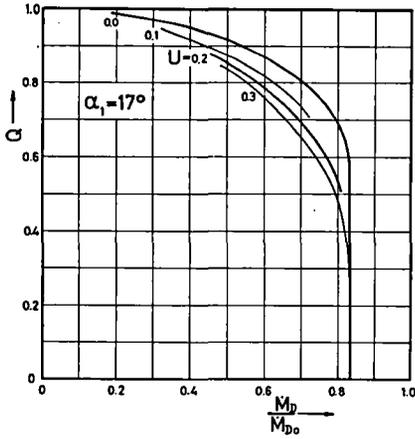


Abb. 3.10.18. Durchflusscharakteristik einer zweistufigen Turbine

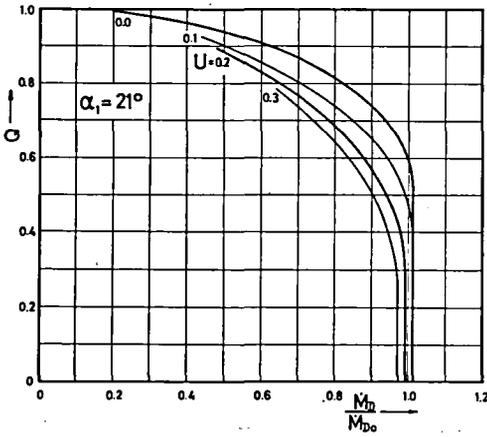


Abb. 3.10.19. Durchflusscharakteristik einer zweistufigen Turbine

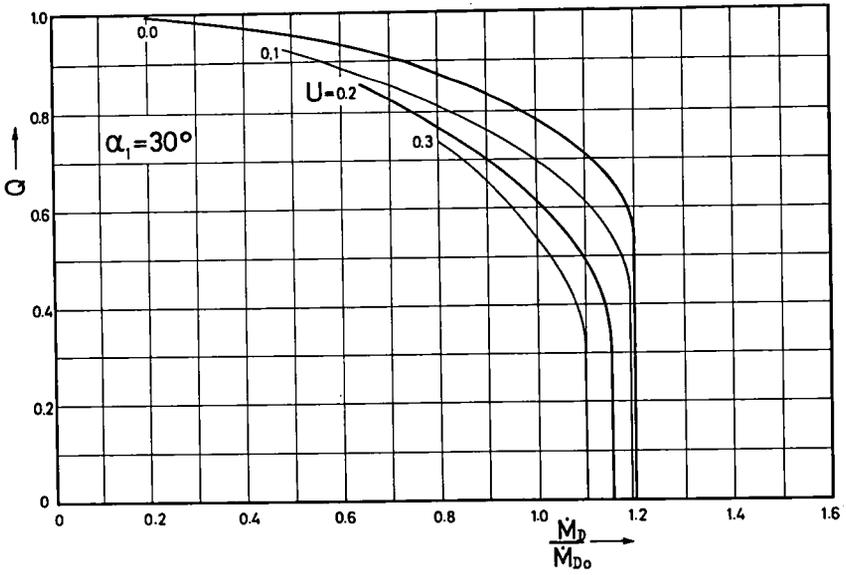


Abb. 3.10.20. Durchflusscharakteristik einer zweistufigen Turbine

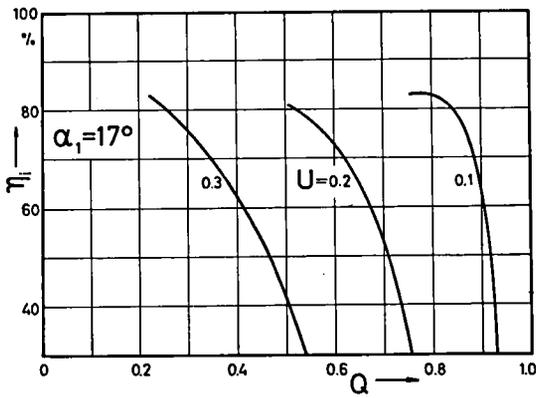


Abb. 3.10.21. Wirkungsgradcharakteristik einer zweistufigen Turbine

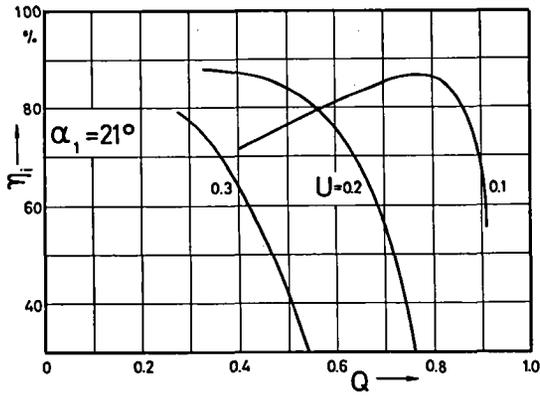


Abb. 3.10.22. Wirkungsgradcharakteristik einer zweistufigen Turbine

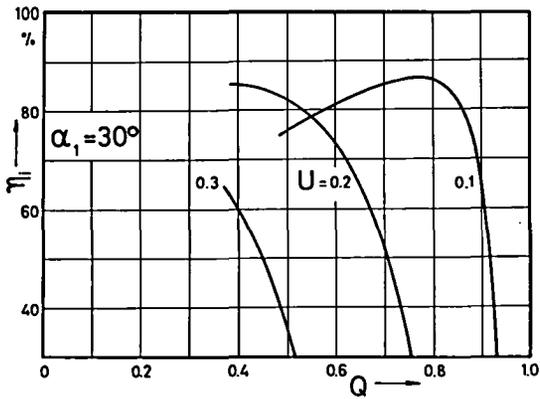


Abb. 3.10.23. Wirkungsgradcharakteristik einer zweistufigen Turbine

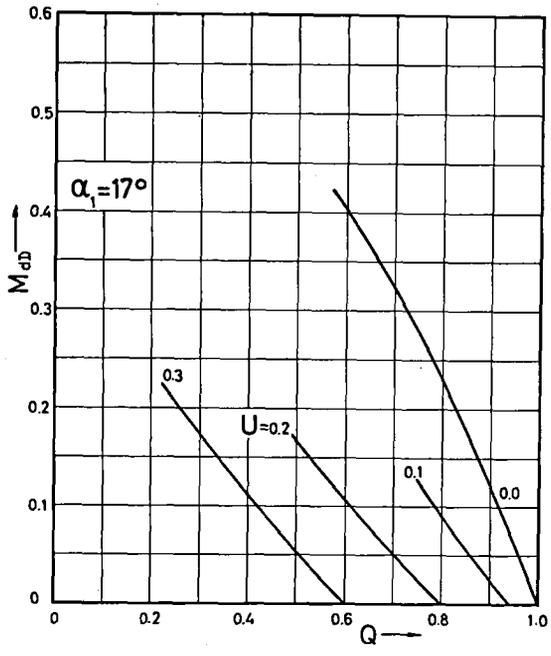


Abb. 3.10.24. Drehmomentcharakteristik einer zweistufigen Turbine

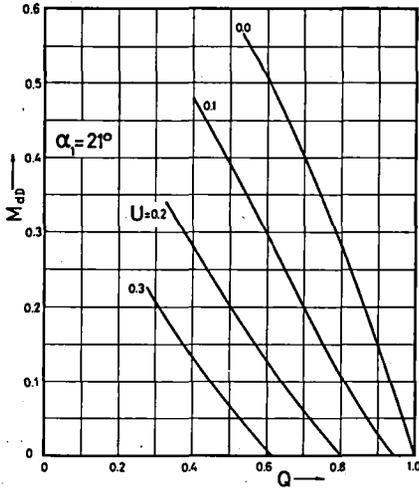


Abb. 3.10.25. Drehmomentcharakteristik einer zweistufigen Turbine

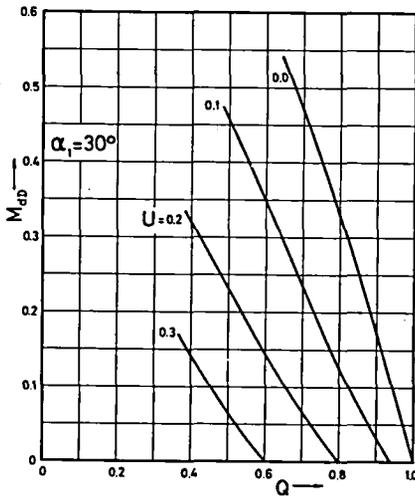


Abb. 3.10.26. Drehmomentcharakteristik einer zweistufigen Turbine

Dreistufig erfolgte die Berechnung für $\alpha_1 = 21^\circ$ bei $U = 0.0, 0.1, 0.2$ und 0.3 , sowie für $\alpha_1 = 17$ und 30° bei $U = 0.2$. Die Resultate finden sich auf Abb. 27 ... 30. In Abb. 30 fällt vor allem auf, welch grossen Einfluss eine einzige Verstellstufe auch bei einer mehrstufigen Maschine auf ihr Durchflussverhalten hat. Grund dazu ist die starke Leitradbelastung von $\pi' = 1,58$ (vergl. 2. 3.).

Oft wird für das Durchflussverhalten einer Turbine ein Gesetz angegeben, das nur von der Stufenzahl abhängig ist und Einflüsse der Umfangsgeschwindigkeit vernachlässigt, vergl. z. B. Mallinson und Lewis [12]. Tatsächlich ist für Betriebspunkte, deren Geschwindigkeitsplan von jenem des Auslegungspunktes nicht stark abweicht, der Einfluss der Stufenzahl dominierend und jener der Umfangsgeschwindigkeit sehr gering. In Abb. 31 sind die so entstandenen Schluckkurven für ein-, zwei-, drei- und vielstufige Turbinen aufgezeichnet. Bei den für die ein- und zweistufige Maschine schraffierten Bereichen gilt die obere Begrenzung für kleinen, die untere für grossen Reaktionsgrad. Es zeigt sich, dass die dreistufige Maschine (hier gezeichnet für $r \approx 0,2$) dem Kegelgesetz bereits sehr nahe kommt.

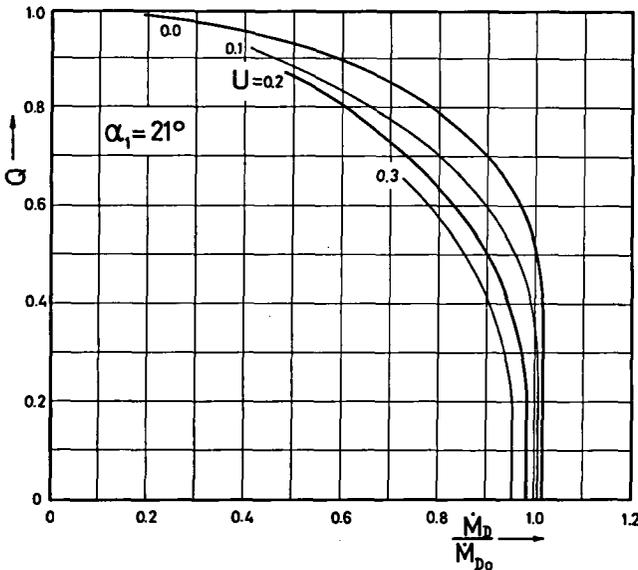


Abb. 3. 10. 27. Durchflusscharakteristik einer dreistufigen Turbine

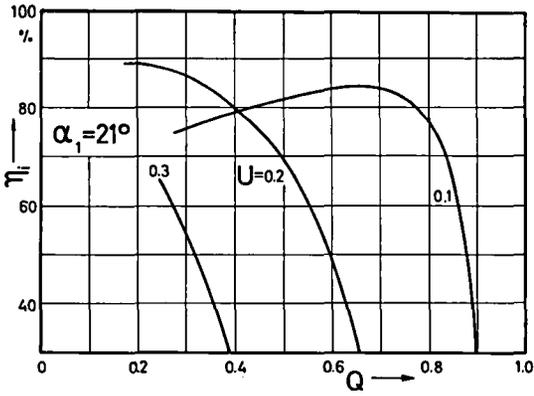


Abb. 3.10.28. Wirkungsgradcharakteristik einer dreistufigen Turbine

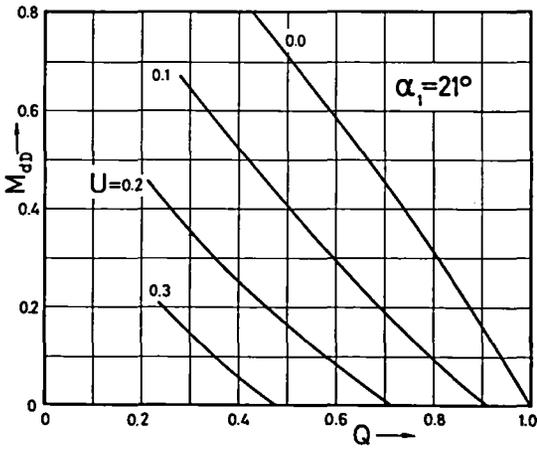


Abb. 3.10.29. Drehmomentcharakteristik einer dreistufigen Turbine

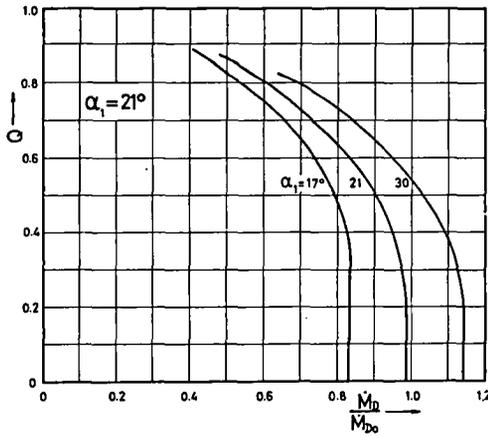


Abb. 3.10.30. Durchflusscharakteristik einer dreistufigen Turbine mit drehbarem erstem Leitschaufelkranz

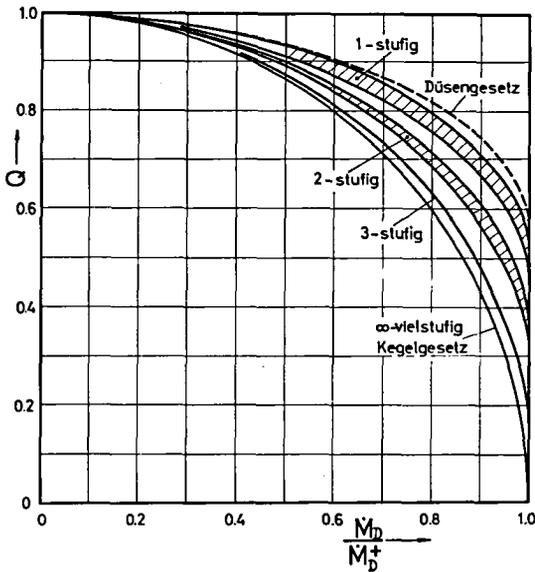


Abb. 3.10.31. Vergleich der Durchfluss-gesetze für verschiedene Stufenzahlen

4. Betriebsverhalten gesamter Gasturbinenanlagen

4.1. Allgemeines

Ziel dieses letzten Teils ist die Berechnung der Beharrungszustände von Gasturbinenanlagen unter Verwendung der in Kap. 3 berechneten Turbinencharakteristiken, sowie entsprechender Verdichterkennfelder. Während in Kap. 2 nur das Verhalten in unmittelbarer Nähe eines bekannten Betriebspunktes untersucht werden konnte, ist es hier möglich, einen weiten Bereich genauer zu analysieren. Ferner können eine wesentliche Anzahl von Einflussgrößen mit einbezogen werden. So gehen alle bei der Berechnung der Turbinencharakteristiken berücksichtigten Effekte in die Rechnung ein. Insbesondere werden die Maschinenwirkungsgrade η_V und η_T jedem einzelnen Betriebspunkt entsprechend eingesetzt. Die Pumpgrenze des Verdichters und die Drehzahl des Hochdruckaggregates können über den ganzen Bereich kontrolliert werden.

Nicht zuletzt soll die Berechnung eines Beispiels dazu dienen, die Zuverlässigkeit der summarisch berechneten Resultate von Kap. 2 zu überprüfen und eventuelle Abweichungen davon zu diskutieren.

Wiederum setzen wir eine zweiwellige Gasturbine mit seriegeschalteten Turbinen voraus, wobei die Nutzturbine allein mit einem verstellbaren Leitapparat ausgerüstet ist (Abb. 1).

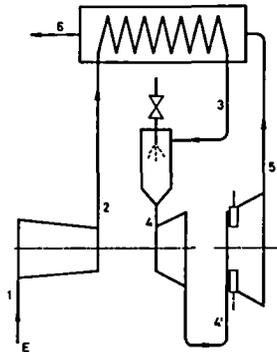


Abb. 4.1.1. Anlagenschema und Numerierung der Zustandspunkte einer zweiwelligen Gasturbine mit seriegeschalteten Turbinen

4.2. Verdichterguppe

An der freilaufenden Turbogruppe muss die Bedingung des Leistungsgleichgewichtes erfüllt sein, das heisst die Verdichterturbine muss die Arbeit zum Antrieb des Verdichters und zur Deckung der Reibungsverluste liefern.

$$\dot{m}_T \cdot \Delta h_T = \dot{m}_V \cdot \Delta h_V + L_r \cdot \dot{m}_V \quad (1)$$

wobei

$$\Delta h_T = \eta_T \cdot \Delta h_{sT} = \eta_T c_{pT} T_4 \left[1 - \pi_T^{\frac{\kappa_T - 1}{\kappa_T}} \right] \quad (2)$$

und

$$\Delta h_V = \frac{\Delta h_{sV}}{\eta_V} = \frac{1}{\eta_V} c_{pV} T_1 \left[\pi_V^{\frac{\kappa_V - 1}{\kappa_V}} - 1 \right] \quad (3)$$

Die Lagerreibungsarbeit pro Masseneinheit L_r kann proportional dem Quadrat der Gruppendrehzahl gesetzt werden.

$$L_r = L_{ro} \cdot \left(\frac{n}{n_o} \right)^2 \quad (4)$$

Da die Verdichterarbeit pro Masseneinheit Δh_V ebenfalls mit dem Quadrat der Drehzahl steigt, gilt

$$\Delta h_V = \Delta h_{Vo} \left(\frac{n}{n_o} \right)^2 \quad (5)$$

Somit ist L_r proportional Δh_V

$$L_r = \frac{L_{ro}}{\Delta h_{Vo}} \Delta h_V \quad (6)$$

also

$$\dot{m}_T \cdot \Delta h_T = \dot{m}_V \left(\Delta h_V + \frac{L_{ro}}{\Delta h_{Vo}} \Delta h_V \right) \quad (7)$$

Der mechanische Wirkungsgrad η_m

$$\eta_m \equiv \frac{\dot{m}_V \cdot \Delta h_V}{\dot{m}_T \cdot \Delta h_T} \quad (8)$$

$$\eta_m = \frac{1}{1 + \frac{L_{ro}}{\Delta h_{V0}}} \quad (9)$$

ist somit konstant.

Für die Mengen kann gesetzt werden

$$\dot{m}_T = \dot{m}_V (1 + \beta)(1 - \delta) \quad (10)$$

wobei β = Brennstoffmenge pro kg Luft

δ = Leckverluste pro kg Luft

Für Anlagen ohne Wärmetauscher oder mit festem Rekuperator ist meist hinreichend genau

$$(1 + \beta)(1 - \delta) = 1 \quad (11)$$

während bei Regeneratoren diese Vereinfachung nicht mehr zulässig ist. Wir setzen daher

$$(1 + \beta)(1 - \delta) \equiv 1 - \mu \quad (12)$$

womit auch der Grenzfall Gl. (11) durch $\mu = 0$ wiedergegeben wird.

Gl. (7) heisst jetzt

$$\dot{m}_V (1 - \mu) \Delta h_T = \dot{m}_V \cdot \Delta h_V \cdot \eta_m \quad (13)$$

$$\begin{aligned} (1 - \mu) \eta_T c_{pT} T_4 \left[1 - \pi_T \frac{\kappa_V^{-1}}{\kappa_V} \right] \\ = \frac{1}{\eta_V} c_{pV} T_1 \left[\pi_V \frac{\kappa_V^{-1}}{\kappa_V} - 1 \right] \\ \pi_V \frac{\kappa_V^{-1}}{\kappa_V} - 1 = (1 - \mu) \eta_V \eta_T \eta_m \frac{c_{pT}}{c_{pV}} \cdot \left[1 - \pi_T \frac{\kappa_T^{-1}}{\kappa_T} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Für das ideale Gas gilt ferner

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{\kappa}{\kappa - 1} R \\ \frac{c_{pT}}{c_{pV}} &= \frac{\kappa_T (\kappa_V - 1) R_T}{(\kappa_T - 1) \kappa_V R_V} \end{aligned}$$

und da $R_V \approx R_T$

$$\frac{c_{pT}}{c_{pV}} = \frac{\kappa_T (\kappa_V - 1)}{(\kappa_T - 1) \kappa_V} \quad (15)$$

Die Variation der Leckmenge \dot{m}_L eines Regenerators kann leicht abgeschätzt werden, wenn man voraussetzt, dass der Hauptanteil des Verlustes durch Transport komprimierter Luft auf die Niederdruckseite erfolgt. Ferner soll der Regenerator von der Verdichterguppe aus angetrieben werden.

Dann ist

$$\frac{\dot{m}_L}{\dot{m}_{Lo}} = \frac{\varrho_2}{\varrho_{2o}} \cdot \frac{n_V}{n_{Vo}} \quad (16)$$

und mit

$$\mu \equiv \frac{\dot{m}_L}{\dot{m}_V} \quad (17)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\dot{m}_{V0}}{\dot{m}_V} \cdot \frac{\varrho_2}{\varrho_{20}} \cdot \frac{n_V}{n_{V0}} \quad (18)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\dot{V}_{20}}{\dot{V}_2} \cdot \frac{n_V}{n_{V0}} \quad (19)$$

Bei einem Verdichter mit einer Gasturbine (ohne verstellbare Leitschaufeln) als Verbraucher ist auch das Fördervolumen am Hochdruckende ungefähr proportional der Drehzahl. μ kann daher als konstant betrachtet werden.

Für die Druckverhältnisse ergibt sich die Bedingung

$$\pi_V = \frac{1}{(1 - \varepsilon) \pi_T \cdot \pi_N} \quad (20)$$

wobei ε die Summe aller relativen Druckverluste

$$\varepsilon \equiv \frac{\Delta p_E}{p_1} + \frac{\Delta p_{WT}}{p_2} + \frac{\Delta p_{Br}}{p_4} + \frac{\Delta p_{\dot{U}}}{p_4} + \frac{\Delta p_{WT}}{p_5} + \frac{\Delta p_A}{p_6} \quad (21)$$

darstellt. Einzig die Austrittsverluste sind in den Charakteristiken eingeschlossen. Nach Traupel [2] kann gesetzt werden

$$\varepsilon = \frac{\pi_{V0} (\pi_V - 1)}{\pi_V (\pi_{V0} - 1)} \varepsilon_0 \quad (22)$$

Sobald wir den Einfluss der Turbinendrehzahl auf das Schluckvermögen mitberücksichtigen wollen, müssen wir die sonst stillschweigend erfüllte Gleichheit der Drehzahl formulieren. Aus

$$n_V^* \equiv \frac{n_V}{n_{V0}} \sqrt{\frac{T_{10}}{T_1}} \quad (23)$$

und

$$n_T^* \equiv \frac{n_T}{n_{T0}} \sqrt{\frac{T_{40}}{T_4}} \quad (24)$$

folgt hierfür

$$n_V^* = n_T^* \sqrt{\frac{j}{j_0}} \quad (25)$$

Aus Gl. (10) lässt sich die Mengenbilanz herleiten

$$\frac{\dot{m}_T}{\dot{m}_{T0}} = \frac{\dot{m}_V}{\dot{m}_{V0}} \frac{(1 + \beta)(1 - \delta)}{(1 + \beta_0)(1 - \delta_0)} \quad (26)$$

Unter Verwendung der Beziehungen Gl. (12) und (19) verbleibt

$$\frac{\dot{m}_T}{\dot{m}_{T0}} = \frac{\dot{m}_V}{\dot{m}_{V0}} \quad (27)$$

Zweckmässig ist die Verwendung der Durchflussgrössen

$$\phi_V \equiv \frac{\dot{m}_V}{\dot{m}_{V0}} \frac{p_{10}}{p_1} \sqrt{\frac{T_1}{T_{10}}} \quad (28)$$

für den Verdichter und

$$\phi_T \equiv \frac{\dot{m}_T}{\dot{m}_{T0}} \frac{p_{40}}{p_4} \sqrt{\frac{T_4}{T_{40}}} \quad (29)$$

für die Turbine, wobei ϕ_T wegen der Definition 3.3. (19) (Dimensionslose Durchsatzmenge) auch dargestellt werden kann als

$$\phi_T = \frac{\dot{M}_D}{\dot{M}_{D0}} \quad (30)$$

Somit geht Gl. (27) über in

$$\phi_T \frac{p_4}{p_{4o}} \sqrt{\frac{T_{4o}}{T_4}} = \phi_V \frac{p_1}{p_{1o}} \sqrt{\frac{T_{1o}}{T_1}}$$

$$\phi_T = \phi_V \frac{\pi_{V_o}}{\pi_V} \sqrt{\frac{\mathcal{J}_V}{\mathcal{J}_o}} \quad (31)$$

Analog ergibt sich mit der Definition

$$\phi_N \equiv \frac{\dot{m}_T}{\dot{m}_{To}} \frac{p'_{4o}}{p'_4} \sqrt{\frac{T'_4}{T'_{4o}}} \quad (32)$$

für die Nutzturbine

$$\phi_N = \frac{\pi_{To}}{\pi_T} \sqrt{\frac{\mathcal{J}_T}{\mathcal{J}_{To}}} \phi_T \quad (33)$$

Das hier auftretende Temperaturverhältnis

$$\mathcal{J}_T = \frac{T'_4}{T_4} \quad (34)$$

lässt sich aus dem Entspannungsgesetz für die Hochdruckturbine rechnen.

$$T_4 - T'_4 = \eta_T (T_4 - T'_{4s})$$

$$1 - \frac{T'_4}{T_4} = \eta_T \left(1 - \frac{T'_{4s}}{T_4}\right)$$

$$\mathcal{J}_T = 1 - \eta_T \left(1 - \pi_T^{\frac{\kappa_T - 1}{\kappa_T}}\right) \quad (35)$$

Da η_T über weite Betriebsbereiche kaum variiert, gilt auch

$$\mathcal{J}_T = 1 - \eta_{To} \left(1 - \pi_T^{\frac{\kappa_T - 1}{\kappa_T}}\right) \quad (36)$$

Die weiteren Zusammenhänge sind durch die Verdichtercharakteristik

$$\phi_V = \phi_V(\pi_V, n_V^*) \quad (37)$$

$$\eta_V = \eta_V(\pi_V, n_V^*) \quad (38)$$

und die Turbinencharakteristik gegeben, zB. in der Art, wie sie in Kap. 3 berechnet wurden. Einzig die Bezeichnungen sind den in diesem Kapitel üblichen anzupassen.

$$\phi_T = \phi_T(\pi_T, n_T^*) \quad (39)$$

$$\eta_T = \eta_T(\pi_T, n_T^*) \quad (40)$$

Hierzu muss noch auf den Zusammenhang

$$n^* = \frac{U}{U_0} \quad (41)$$

hingewiesen werden, wobei U die mit der Umfangsgeschwindigkeit gebildete Crocco-zahl darstellt (vergl. Def. Gl. 3.3. (16)).

Bei Turbinen ohne verstellbare Leitschaufeln ist es oft zweckmässiger, statt der genauen Charakteristiken analytische Durchflussgesetze zu verwenden. Bei der Verdichterturbine schwankt n_T^* in sehr engen Grenzen und hat daher keinen spürbaren Einfluss auf den Durchsatz. Es genügt, den Gegendruck allein in Rechnung zu setzen.

$$\frac{\dot{m}_T}{\dot{m}_{T0}} = \frac{p_4}{p_{40}} \sqrt{\frac{T_{40}}{T_4}} F(\pi) \quad (42)$$

Unter Berücksichtigung der Definition (29) verbleibt

$$\phi_T = F(\pi) \quad (43)$$

Für Maschinen mit 3 oder mehr Stufen ist mit guter Genauigkeit das Kegelgesetz

$$\phi_T = \sqrt{\frac{1 - \pi_T^2}{1 - \pi_{T0}^2}} \quad (44)$$

verwendbar. Ebenso ist Gl. (44) bei Iterationsrechnungen zum Auffinden einer ersten Näherung geeignet.

Ueber den Verlauf des Turbinenwirkungsgrades fehlen bis jetzt noch Anhaltspunkte. Eine überschlägige Rechnung zeigt jedoch, dass unter den hier gemachten Voraussetzungen der Wirkungsgrad der Verdichterturbine konstant gesetzt werden darf.

Es ist noch hinzuzufügen, dass bei dieser Berechnungsweise die Gleichheit der Drehzahl nicht berücksichtigt werden muss, da n_T^* in Gl. (44) nicht vorkommt.

Wir stellen nochmals das für das Verdichterraggregat zu lösende Gleichungssystem zusammen:

Leistungsgleichgewicht

$$\pi_V^{\frac{\kappa_V - 1}{\kappa_V}} - 1 = (1 - \mu) \eta_V \eta_{T0} \eta_m \frac{c_{pT}}{c_{pV}} \beta \left[1 - \pi_T^{\frac{\kappa_T - 1}{\kappa_T}} \right] \quad (45)$$

Bedingung für die Druckverhältnisse

$$\pi_N = \frac{1}{(1 - \epsilon) \cdot \pi_V \cdot \pi_T} \quad (46)$$

Gleichheit der Drehzahl

$$n_V^* = n_T^* \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} \quad (47)$$

Mengenbilanzen

$$\phi_T = \phi_V \frac{\pi_{V0}}{\pi_V} \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} \quad (48)$$

$$\phi_N = \phi_T \frac{\pi_{T0}}{\pi_T} \sqrt{\frac{\beta_T}{\beta_{T0}}} \quad (49)$$

Verdichtercharakteristik

$$\phi_V = \phi_V(\pi_V, n_V^*) \quad (50)$$

$$\eta_V = \eta_V(\pi_V, n_V^*) \quad (51)$$

Turbinencharakteristik

entweder graphisch

$$\phi_T = \phi_T(\pi_T, n_T^*) \quad (52)$$

oder als Kegelgesetz

$$\phi_T = \sqrt{\frac{1 - \pi_T^2}{1 - \pi_{T0}^2}} \quad (53)$$

und die Hilfsbeziehungen

$$\varepsilon = \frac{\pi_{V0}(\pi_V - 1)}{\pi_V(\pi_{V0} - 1)} \varepsilon_0 \quad (54)$$

$$\beta_T = 1 - \eta_{T0} (1 - \pi_T)^{\frac{\alpha_T - 1}{\alpha_T}} \quad (55)$$

Wir haben also 10 Gleichungen für die 12 Unbekannten π_V , π_T , π_N , ϕ_V , ϕ_T , ϕ_N , β , η_V , n_V^* , n_T^* , ε und β_T . Zwei der Grössen sind als Parameter frei wählbar. Zweckmässig sind dies β und n_V^* . Dann ergibt sich das folgende Rechenverfahren:

\downarrow annehmen (definitiv)

Mit der Vereinfachung $\phi_T = 1$ die Gl. (48)
in die Verdichtercharakteristik (50)
eintragen.

n_V^* annehmen (provisorisch)

aus Charakteristik (50) π_V
aus Charakteristik (51) γ_V
aus Gleichung (45) π_T
aus Gleichung (47) n_T^*
aus Charakteristik (52) ϕ_T
aus Gleichung (48) ϕ_V

(Bei Verwendung des Kegelgesetzes
erübrigt sich die Berechnung von n_T^* .
 ϕ_T kann direkt aus Gl. (53) angegeben
werden.)

Dieser neue $\pi_V - \phi_V$ Zusammenhang ist wiederum in die Verdichtercharakteristik (50) einzuzeichnen. Meist hat das Verfahren schon so stark konvergiert, dass diese Linie als definitiv betrachtet werden darf. Daraus können nun alle Größen direkt berechnet werden.

n_V^* annehmen (definitiv)

aus Charakteristik (50) π_V
aus Charakteristik (51) γ_V
aus Gleichung (45) π_T
aus Gleichung (47) n_T^*
aus Charakteristik (52) ϕ_T
aus Gleichung (48) ϕ_V Kontrolle!
aus Gleichung (54) ϵ
aus Gleichung (46) π_N
aus Gleichung (55) \downarrow_T
aus Gleichung (49) ϕ_N

(Bei Verwendung des Kegelgesetzes
gilt die frühere Bemerkung.)

Aus den Grössen π_N und ϕ_N lässt sich jetzt die Gesamtcharakteristik des Verdichteraggregates aufzeichnen. Als Parameter kann ψ oder in speziellen Fällen auch π_V verwendet werden.

Für das Verdichteraggregat lassen sich noch zwei interessante Grössen angeben.

Das von der Hochdruckgruppe erzeugte Druckgas lässt sich in der freien Nutzturbine verwerten, wie gut, hängt von der jeweiligen Drehzahl der Nutzturbine ab. Dieser Parameter lässt sich dadurch eliminieren, dass man angibt, welche Energie der Nutzturbine potentiell zur Verfügung steht, oder mit anderen Worten, welche Energie eine verlustlos arbeitende Nutzturbine umzusetzen vermag. Wir nennen diese isentrope Nutzturbinenleistung N_{sN} .

$$\underline{N_{sN} \equiv \dot{m} \cdot \Delta i_{sN}} \quad (56)$$

$$\frac{N_{sN}}{N_{sNo}} = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_o} \frac{\Delta i_{sN}}{\Delta i_{sNo}} \quad (57)$$

Mit den von früher her bekannten Beziehungen

$$\phi_N = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_o} \frac{p'_{4o}}{p'_4} \sqrt{\frac{T'_4}{T'_{4o}}} \quad (58)$$

sowie

$$\Delta i_{sN} = c_{pT} \cdot T'_4 \psi_N \quad (59)$$

und

$$\psi_N \equiv 1 - \pi_N^{\frac{\kappa_T - 1}{\kappa_T}}$$

resultiert schliesslich

$$\frac{N_{sN}}{N_{sNo}} = \phi_N \frac{\pi_{No}}{\pi_N} \sqrt{\frac{\psi_o \cdot \psi_T}{\psi_o \cdot \psi_{To}}} \cdot \frac{\psi_N}{\psi_{No}} \quad (60)$$

Ferner kann ein Wirkungsgrad der Gaserzeugergruppe definiert werden mit

$$\eta_{\text{Gr}} \equiv \frac{N_{\text{SN}}}{\dot{Q}_{\text{zu}}} \quad (61)$$

Zur Berechnung der zugeführten Wärmemenge

$$\dot{Q}_{\text{zu}} = \dot{m} (c_{pT} T_4 - c_{pV} T_3) \quad (62)$$

brauchen wir vorerst das Temperaturverhältnis des Verdichters

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= \frac{1}{\eta_V} (T_{2s} - T_1) \\ \frac{T_2}{T_1} &= 1 + \frac{\psi_k}{\eta_V} \end{aligned} \quad (63)$$

und dasjenige des Wärmetauschers auf der Luftseite

$$\begin{aligned} T_3 - T_2 &= \eta_r (T_5 - T_2) \\ \frac{T_3}{T_1} &= \frac{T_2}{T_1} + \eta_r \left[\frac{T_5}{T_1} - \frac{T_2}{T_1} \right] \\ \frac{T_3}{T_1} &= (1 - \eta_r) \frac{T_2}{T_1} + \eta_r \frac{T_5}{T_1} \end{aligned} \quad (64)$$

wobei

$$\frac{T_5}{T_1} = \frac{T_4}{T_1} \vartheta_T \cdot \vartheta_N \quad (65)$$

ist. Der Wirkungsgrad η_r kann als praktisch konstant betrachtet werden [8]. Für den Gruppenwirkungsgrad bleibt also

$$\eta_{\text{Gr}} = \frac{\dot{m} c_{pT} T_4 \psi_N}{\dot{m} T_1 \left[c_{pT} \frac{T_4}{T_1} - c_{pV} \left[(1 - \eta_r) \left(1 + \frac{\psi_k}{\eta_V} \right) + \eta_r \frac{T_4}{T_1} \vartheta_T \vartheta_N \right] \right]}$$

$$\eta_{Gr} = \frac{\dot{s}_T \cdot \psi_N}{1 - \frac{c_{pV}}{c_{pT}} \left[\frac{1 - \eta_r}{\dot{s}} \left(1 + \frac{\psi_k}{\eta_V} \right) + \eta_r \dot{s}_T \dot{s}_N \right]} \quad (66)$$

In dieser Formel steckt mit \dot{s}_N die Rückwirkung des Betriebszustandes der Nutzturbine auf den Wärmetauscher und damit auch auf den Gruppenwirkungsgrad. Bei rekuperatorlosen Maschinen entfällt diese Beziehung und es bleibt die von der Nutzturbinendrehzahl unabhängige Formel

$$\eta_{Gr} = \frac{\dot{s}_T \cdot \psi_N}{1 - \frac{c_{pV}}{c_{pT}} \left[\frac{1}{\dot{s}} \left(1 + \frac{\psi_k}{\eta_V} \right) \right]} \quad (67)$$

Die Angabe des Gruppenwirkungsgrades η_{Gr} ist also nur für Maschinen ohne Rekuperator sinnvoll, hier aber eine sehr praktische Grösse.

4.3. Die Nutzturbine

Ihre Schluckcharakteristik ist gegeben durch einen Satz von Diagrammen mit dem Zusammenhang

$$\pi_N = \pi_N(\phi_N, \alpha_1, n_N^*) \quad (1)$$

während andererseits die Liefercharakteristik des Verdichteraggregates in der Form

$$\pi_N = \pi_N(\phi_N, \dot{s}) \quad (2)$$

vorliegt. Alle möglichen Betriebspunkte müssen die beiden Bedingungen erfüllen. Im allgemeinen Fall werden Leistung und Drehzahl vom Nutzleistungsempfänger vorgeschrieben. Bei Maschinen mit festem Leitrad ist damit der Betriebszustand eindeutig gegeben. Sobald jedoch die Leitschaufeln beweglich sind, kann eine Bedingung frei gewählt werden. Nach unseren Erkenntnissen aus Kap. 2 ist je nach

Auslegung ein Konstanthalten des Temperaturverhältnisses λ oder des Druckverhältnisses π zweckmässig.

Durch weitere Charakteristiken sind die Wirkungsgrade η_N und die dimensionslosen Momentenzahlen M_{dD} gegeben. Das Drehmoment ist nach Gl. 3.4.

(35)

$$M_{dN} = \frac{M_{dD} \cdot P_{oI} \cdot \Omega_{1I} \cdot D_{1I}}{2} \quad (3)$$

oder

$$\frac{M_{dN}}{M_{dNo}} = \frac{M_{dD} \cdot P_1 \cdot \pi_{No}}{M_{dDo} \cdot P_{1o} \cdot \pi_N} \quad (4)$$

und die Leistung nach Gl. 3.4. (38)

$$N_N = N_1 \cdot p'_4 \cdot \Omega'_4 \sqrt{2c_p T'_4} \quad (5)$$

oder

$$\frac{N_N}{N_{No}} = \frac{N_D \cdot P_1 \cdot \pi_{No}}{N_{Do} \cdot P_{1o} \cdot \pi_N} \quad (6)$$

was mit Gl. 3.4. (43) und Gl. 4.2. (41)

$$\frac{N_N}{N_{No}} = \frac{M_{dN}}{M_{dNo}} n_N^* \quad (7)$$

ergibt.

Wurde die isentrope Nutzturbinenleistung N_{sN} (Gl. 4.2. (60)) berechnet, kann die der Gl. (7) entsprechende Beziehung

$$\frac{N_N}{N_{No}} = \frac{N_{sN}}{N_{sNo}} \cdot \frac{\eta_N}{\eta_{No}} \quad (8)$$

angeschrieben werden.

Die effektive Drehzahl der Nutzturbine errechnet sich aus der Definition

$$n_N^* = \frac{n_N}{n_{No}} \sqrt{\frac{T'_{4o}}{T'_4}} \quad (9)$$

$$\frac{n_N}{n_{No}} = n_N^* \sqrt{\frac{T'_4}{T'_{4o}}}$$

zu

$$\frac{n_N}{n_{No}} = n_N^* \sqrt{\frac{T_1 \cdot \beta \cdot \beta T}{T_{1o} \cdot \beta_o \cdot \beta To}} \quad (10)$$

Für konstante Umgebungsbedingungen gehen Gl. (4), (7) und (10) über in

$$\frac{M_{dN}}{M_{dNo}} = \frac{M_{dD} \cdot \pi_{No}}{M_{dDo} \cdot \pi_N} \quad (11)$$

$$\frac{N_N}{N_{No}} = \frac{M_{dN}}{M_{dNo}} \cdot n^* \quad (12)$$

und

$$\frac{n_N}{n_{No}} = n_N^* \sqrt{\frac{\beta \cdot \beta T}{\beta_o \cdot \beta To}} \quad (13)$$

Der thermische Wirkungsgrad der gesamten Anlage ist

$$\eta_{thi} = \eta_{Gr} \cdot \eta_N \quad (14)$$

Den Gruppenwirkungsgrad η_{Gr} gibt Gl. 4.2. (66), das bisher nicht bekannte Temperaturverhältnis der Nutzturbine β_N ist

$$\beta_N = 1 - \eta_N \cdot \psi_N, \quad (15)$$

sodass als Wirkungsgrad verbleibt

$$\eta_{thi} = \frac{\eta_N \cdot \beta_T \cdot \psi_N}{1 - \frac{c_{pV}}{c_{pT}} \left[\frac{1 - \eta_r}{\beta} \left(1 + \frac{\psi_k}{\eta_v} \right) + \eta_r \beta_T \beta_N \right]} \quad (16)$$

Aus dem Vergleich der Liefercharakteristik mit der Schluckcharakteristik der Nutzturbine (Abb. 3.10.4...7) geht der Verstellwinkel α_1 hervor. Das Verhältnis der effektiven Strömungsquerschnitte ist

$$\frac{f'}{f'_0} = \frac{\Omega'}{\Omega'_0} \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_{10}} \quad (17)$$

und da $\Omega' = \Omega'_0$, gilt

$$\frac{f'}{f'_0} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_{10}}$$

$$\Delta \phi \equiv \frac{\Delta f'}{f'_0} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_{10}} - 1 \quad (18)$$

Damit sind alle Grössen zur Berechnung des Teillastverhaltens und auch der Klimaempfindlichkeit aufgefunden.

4.4. Teillastverhalten einer Kleingasturbine

Als Rechnungsbeispiel wollen wir das Teillastverhalten einer Gasturbine im Detail analysieren. Wir wählen dazu eine Konzeption, wie sie zum Antrieb von Automobilen und schweren Landfahrzeugen geeignet erscheint, denn gerade hier wird vorwiegend mit Teillast gefahren.

Das Verdichteraggregat besteht aus einem einstufigen Radialkompressor und einer einstufigen axialen Turbine. Die Nutzturbine mit den drehbaren Leitschaufeln ist ebenfalls axial ausgebildet. Zur Steigerung des Wirkungsgrades wird ein rotierender Regenerator verwendet. Als Höchsttemperatur wählen wir 900°C , was bei 20°C Umgebungstemperatur ein Temperaturverhältnis von $\lambda = 4$ ergibt und heute bei solchen Maschinen üblich ist. Das optimale Druckverhältnis liegt bei ca. 3.0. Um die Leistungsausbeute etwas zu erhöhen, gehen wir auf $\pi_v = 3.35$. Das erlaubt uns, als Verdichtercharakteristik das gemessene Kennfeld eines Radialverdichters von Turboméca (Abb. 1) zu verwenden, beschrieben in Eckert [4]. Bei der Festlegung des Auslegungspunktes ist zu beachten, dass insbesondere nach Berücksichtigung des Gegendruckeinflusses in der Turbine die Pumpgrenze des Ver-

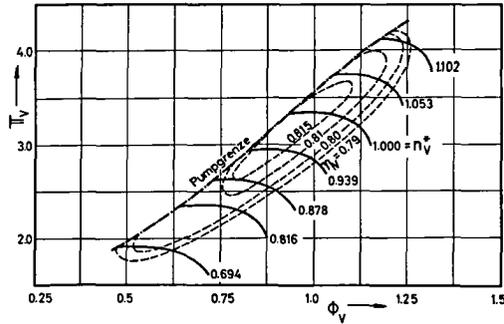


Abb. 4.4.1. Für die Berechnung verwendete Charakteristik eines einstufigen Radialverdichters nach Eckert [4]

verdichters nicht überschritten werden darf. Diese Gefahr ist sehr ausgeprägt vorhanden, da bekanntlich jede Prozessverbesserung das Pumpen begünstigt. Als weitere Begrenzung ist die maximal zulässige Drehzahl des Verdichteraggregates gegeben. Für die Turbinen greifen wir zu dem in Kap. 3 berechneten Charakteristkensatz. Abb. 2 repräsentiert ein Beispiel mit den ihrem Verwendungszweck angepassten Bezeichnungen.

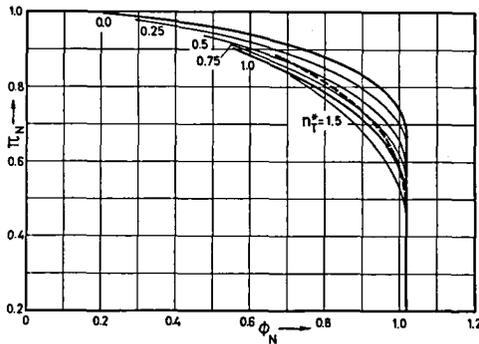


Abb. 4.4.2. Charakteristik einer axialen einstufigen Turbine für eine feste Leitradstellung.
 ----- Schluckkurve, wenn die Turbine den Verdichter antreibt.

Der Zusammenhang zwischen π_T und n_T^* ist von \mathfrak{J} praktisch unabhängig (Abb. 4). Das erlaubt uns, für die HD-Turbine eine einzige Schluckkurve in die Charakteristik einzutragen und das Herauslesen der ϕ_T -Werte zu erleichtern (gestrichelt in Abb. 2).

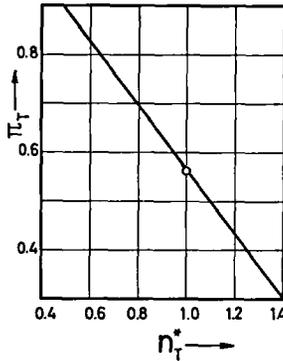


Abb. 4.4.4. Zusammenhang von π_T und n_T^* (von \mathfrak{J} praktisch unabhängig).

Als Resultat entsteht die Gesamtcharakteristik des Gasgenerators (Abb. 5). Ferner ist es zweckmässig, als Unterlagen für die Berechnung der Nutzturbine die Funktionen \mathfrak{J}_T und $\frac{1}{\mathfrak{J}} \left(1 + \frac{\psi_k}{\gamma V} \right)$ über ϕ_N aufzutragen (Abb. 6 und 7).

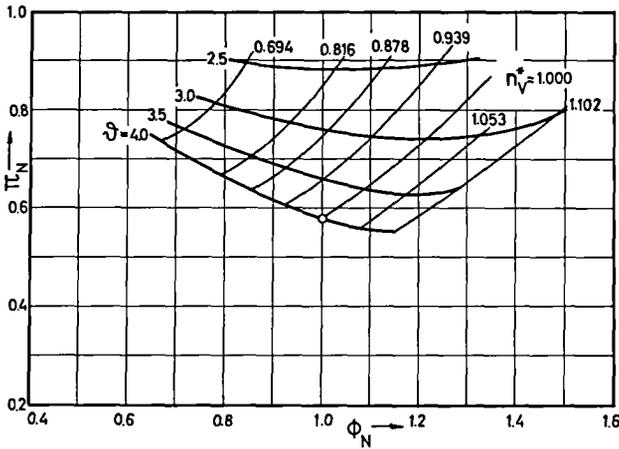


Abb. 4.4.5. Liefercharakteristik des Hochdruckaggregates

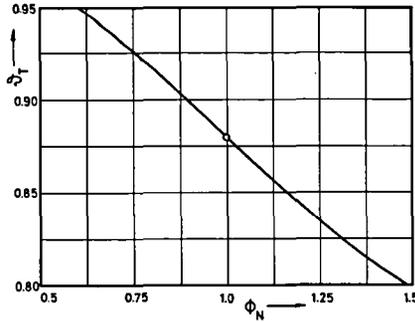


Abb. 4.4.6. Verlauf der Hilfsfunktion ϕ_T

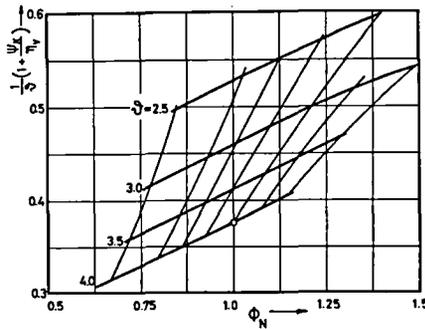


Abb. 4.4.7. Verlauf der Hilfsfunktion $\frac{1}{\phi} \left(1 + \frac{\psi_k}{\eta V} \right)$

Zur Berechnung der Nutzturbine liefert Abschnitt 4.3. die notwendigen Unterlagen. Verwendet wird wiederum der in Kap. 3 berechnete Satz von Charakteristiken. Alle gesuchten Grössen lassen sich direkt berechnen.

Gegenübergestellt werden eine Anlage mit und eine solche ohne verstellbaren Leitapparat. Nach Abschn. 2.4. ist es zweckmässig, die Höchsttemperatur konstant zu halten.

Abb. 4.4.8. zeigt die Leistung der Nutzturbine als Funktion ihrer Drehzahl. Aus dem Vergleich der beiden Kennfelder geht hervor, dass durch Schliessen des

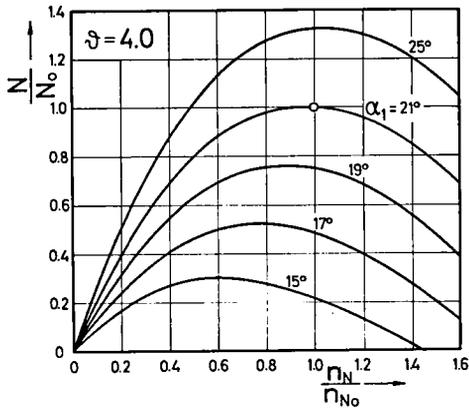
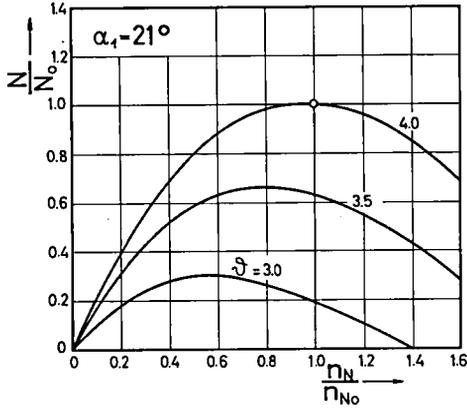


Abb. 4.4.8. Leistungskarakteristik bei festem Leitapparat bzw. konstantem Temperaturverhältnis

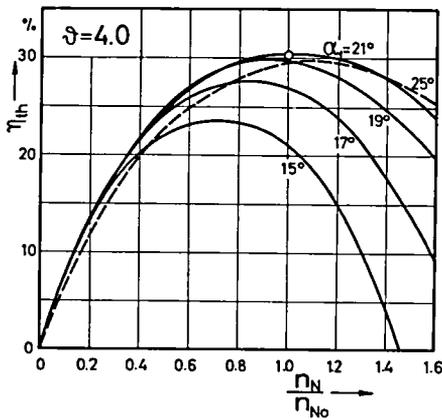
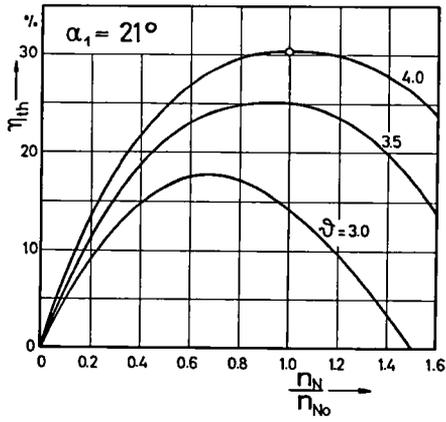


Abb. 4.4.9. Wirkungsgradcharakteristik bei festem Leitapparat bzw. konstantem Temperaturverhältnis

Leitapparates eine ähnliche Leistungsreduktion erfolgen kann wie durch Senken der Höchsttemperatur. Ob in unserem Beispiel der Leitapparat von 21° auf 15° zuge-dreht wird oder aber das Temperaturverhältnis von 4 auf 3 gesenkt wird, es entsteht praktisch dieselbe Leistungsparabel. Allerdings lehrt Abb. 9, dass dabei der Wirkungsgrad diese Bewegung nicht mitmacht. Anstatt eines Wirkungsgradabfalles von 30 % auf 18 % bei gewöhnlicher Regelung resultiert lediglich ein solcher auf 23 %.

Sehr eindrücklich ist auch der Vergleich der beiden Drehmomentcharakteristiken (Abb. 10) mit den eingetragenen Linien konstanten Wirkungsgrades. Mit dem verstellbaren Leitapparat wird der Bereich guter Wirkungsgrade wesentlich ausgedehnt. Zudem kann eine Ueberlast (in unserem Falle ca. 30 %) ohne Erhöhung der Höchsttemperatur gefahren werden. Bei der Verdichtergruppe stellt sich dann allerdings eine höhere Drehzahl ein, und es ist im konkreten Fall zu beurteilen, wie weit dies zulässig ist.

Abb. 11 vergleicht den Wirkungsgradverlauf der beiden Varianten für einen Verbraucher mit konstanter Drehzahl. Praktisch derselbe Verlauf ergibt sich für einen Nutzleistungsempfänger, der dem Propellersgesetz gehorcht. Für den Fall normaler Regelung ist der nach Kap. 2 im Auslegungspunkt zu erwartende Gradient dünn eingezeichnet, während sich beim verstellbaren Leitapparat die horizontale Tangente bestätigt. Die Berechnung zeigt, dass die Abnahme des therm. Wirkungsgrades bei verminderter Leistung und konstant gehaltener Höchsttemperatur hier nicht etwa vorwiegend auf die Abnahme der Maschinenwirkungsgrade η_V und η_T , sondern zum weitaus grössten Teil auf Veränderungen des Druckverhältnisses zurückzuführen sind.

Den Charakteristiken für die einstufige Nutzturbine entnehmen wir die notwendigen Verstellwinkel und berechnen daraus nach Gl. 4.3. (18) die zugehörigen Verstellflächen. Dies ergibt die in Abb. 12 dick ausgezogene Kurve. Als Abszisse wurde das Leistungsverhältnis jener Drehzahl gewählt, bei der die Nutzturbine mit dem besten Wirkungsgrad arbeitet. Schraffiert ist jener Bereich eingetragen, der sich für $\eta_p = 0,84$ bei der Leitradbelastung $\Pi' = 1,58$ für das Kegelgesetz als die eine und überkritische Verhältnisse als die andere Begrenzung ergibt. Die genauer berechnete Verstellfläche liegt also im erwarteten Bereich.

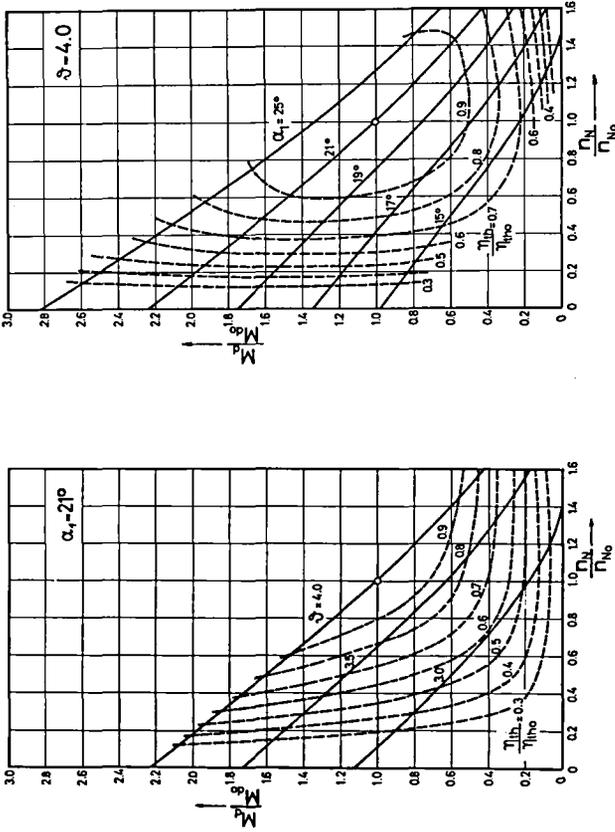


Abb. 4.4. 10. Drehmomentcharakteristik bei festem Leitapparat bzw. konstantem Temperaturverhältnis

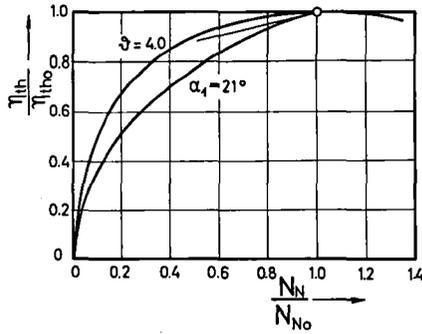


Abb. 4.4.11. Vergleich der beiden Regelungsarten für einen Nutzleistungsempfänger mit konstanter Drehzahl oder Leistungsaufnahme nach dem Propeller-gesetz

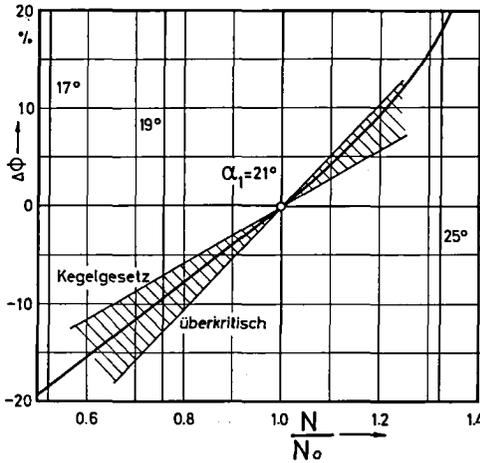


Abb. 4.4.12. Zur Regelung auf konstantes Temperaturverhältnis notwendige Flächen-änderung im verstellbaren Leitapparat
 — vereinfachte Berechnung nach Kap. 2
 — genauere Berechnung nach Kap. 4.

Literaturverzeichnis

- [1] Traupel W. , Thermische Turbomaschinen Bd. 1. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1958.
- [2] Traupel W. , Thermische Turbomaschinen Bd. 2. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1960.
- [3] Ainley D. G. , Performance of Axial-flow Turbines. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers (War Emergency Issue) 159 (1948).
- [4] Eckert B. und E. Schnell, Axial- und Radialkompressoren. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1961.
- [5] Eckert B. , Heutiger Entwicklungsstand der Automobil-Gasturbine. ATZ Jg. 64 (1962) Nr. 8 und 9.
- [6] Egli A. , A rational Representation of the Flow Performance of Reaction Steam Turbine Blading. Journal of Appl. Mechanics Bd. 7, Nr. 1, März 1940.
- [7] Friedrich Hans, Ueber den Einfluss der Anströmung auf das Verhalten eines Turbinenlaufrades. BWK 1956, S. 9...15.
- [8] Hausenblas H. , Vorausberechnung des Teillastverhaltens von Gasturbinen. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1962.
- [9] Isogai, Fujisawa, Yoshii, Experimental Gas Turbine of Mitsubishi Nippon Heavy-Industries Ltc. Congrès International des Machines à Combustion Colloque 1957 Zurich.
- [10] Keenan und Kaye , Gas Tables. New York: Wiley 1948.
- [11] Kraft H. , The Development of a Laminar Wing Type Turbine Bucket. ZAMP 1958, Nr. 5/6, S. 404...421.
- [12] Mallison D. H. und W. G. E. Lewis, The Part-load Performance of various Gas Turbine Engine Schemes. Inst. Mech. Engrs. Appl. Mech. Proc. 1948, Bd. 151 (War Emergency Issue Nr. 41) S. 198...219.
- [13] McMullen J. J. , The Gas-Turbine Installation in Liberty Ship John Sergeant. The Soc. of Naval Architects and Marine Engineers, New York, Bd. 6 (1957) Nr. 4.

Lebenslauf

Am 16. Mai 1935 wurde ich als Sohn des Oskar Jaggi und der Rosa geb. Haggmann in Gerlafingen geboren. Hier besuchte ich während 6 Jahren die Primarschule und anschliessend 6¹/₂ Jahre die Oberrealschule in Solothurn, die ich im Herbst 1954 mit der Maturitätsprüfung abschloss. Während eines Jahres arbeitete ich als Praktikant in verschiedenen Abteilungen der Von Roll AG in Gerlafingen und Olten. Im Herbst 1955 begann ich mein Studium an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich, welches ich im Dezember 1959 mit dem Diplom als Maschineningenieur abschloss. Von Januar 1960 bis Juli 1963 war ich als Assistent am Institut für Thermische Turbomaschinen der Eidgenössischen Technischen Hochschule. Hier entstand die vorliegende Arbeit.

Am 13. Juli 1963 vermählte ich mich mit Maja Freitag.