

**Diss. Nr. 4656**

**Die optimalen Dimensionen  
elektrischer Zuleitungen für Tieftemperaturanlagen**

ABHANDLUNG

zur Erlangung  
der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften  
der  
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE  
ZÜRICH

vorgelegt von  
**MARKUS RAUH**  
dipl. Masch.-Ing. ETH  
geboren am 23. September 1939  
von St. Gallen (Kt. St. Gallen)

Angenommen auf Antrag von  
Prof. Dr. P. Grassmann, Referent  
Prof. Dr. J.L. Olsen, Korreferent

Juris Druck + Verlag Zürich  
1971

Leer - Vide - Empty

## VORWORT

Ausgehend von einer Arbeit über die quasikontinuierliche adiabatische Entmagnetisierung paramagnetischer Salze wurde die vorliegende Arbeit auf Anregung von Prof. Dr. P. Grassmann als Weiterführung einer Diplomarbeit [75] am Institut Kälte- und Verfahrenstechnik der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich durchgeführt.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. P. Grassmann möchte ich an dieser Stelle für die vielen wertvollen Anregungen und das Interesse, das er für die Arbeit bekundete, herzlich danken.

Mein Dank gebührt auch dem Korreferenten, Herrn Prof. Dr. J.L. Olsen für sein Interesse und die interessanten Diskussionen.

Dem Schweizerischen Nationalfonds möchte ich für die grosszügige Zuteilung eines Nachwuchsstipendiums danken. Ebenso ist es mir eine angenehme Pflicht mein Dank der Schweizerischen Volkswirtschaftsstiftung für die Gewährung eines Kredites zur Deckung von Lohn- und Anschaffungskosten auszusprechen. Die Beiträge, die mir der Eidgenössische Schulrat zum Besuch von Kursen und Tagungen zusprach seien ebenfalls gebührend verdankt.

Herrn dipl. Ing. H. Quack, Herrn dipl. Ing. W. Dörfler und allen andern Mitgliedern des Institutes danke ich für den angenehmen Gedanken- und Erfahrungsaustausch. Auch den Herren H. Weber, A. Sailer, H. Maag und A. Weiss von der Institutswerkstatt möchte ich für ihre Mitarbeit danken.

Zürich im September 1970

Markus Rauh

Leer - Vide - Empty

## ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Arbeit soll einen klärenden Beitrag über alle Probleme leisten, die sich bei elektrischen Stromzuführungen zu Tieftemperaturanlagen stellen.

Nach einer einleitenden Beschreibung der Bedeutung solcher Zuleitungen und der bisher darüber erschienenen Literatur werden die Differentialgleichungen abgeleitet und in dimensionsloser Form angeschrieben. Mit vereinfachenden Annahmen über die Stoffwerte des Metalls und den Wärmetübergang wird das Problem analytisch gelöst. Das Optimalkriterium und die für die Dimensionierung und die Verluste wichtigen Kennzahlen werden hergeleitet und ihre qualitative Abhängigkeit von den äusseren Einflussgrössen beschrieben. Anschliessend werden Lösungswege für die Stabilisierung periodisch stromführender Leiter vorgeschlagen und auf die Möglichkeit einer Instabilität des Temperaturprofils hingewiesen.

In einem weiteren Kapitel werden exaktere Modelle für die Wärmeleitfähigkeit und den elektrischen Widerstand sowie für den Wärmeübertragungsmechanismus zwischen Gas und Leiter aufgestellt. Die Resultate der damit durchgeführten numerischen Lösung der Differentialgleichung werden ausführlich diskutiert. Der Einfluss des Restwiderstandes, der Kühlintensität, der Stromstärke und der Extremtemperaturen des Leiters auf die thermischen Verluste, die optimalen Dimensionen und den Spannungsabfall wird am Beispiel von Kupfer quantitativ dargestellt. Ebenso wird die Abnahme der thermischen Verluste durch die Anwendung supraleitender Materialien am kalten Drahtende besprochen und die äusseren Bedingungen, unter denen sich die minimal möglichen Verluste von  $0.5 \text{ mW/A}$  realisieren lassen, werden erwähnt. Zum Abschluss des theoretischen Teils werden die Resultate von Cu mit denjenigen anderer möglicher Leitermaterialien (Al, Ag, Be, Na, Ni, Pb) verglichen. Eine Gegenüberstellung der Ergebnisse beider Lösungswege führt zur Erkenntnis, dass die thermischen Verluste durch die einfachen Annahmen in erster Näherung gut bestimmt werden können. Für die Dimensionierung hingegen liefert einzig die numerische Methode brauchbare Resultate.

Im zweiten Teil erfolgt ein Vergleich zwischen Theorie und Experiment. Die Richtigkeit der für die numerischen Auswertungen benützten Annahmen wird anhand von Leitfähigkeitsmessungen überprüft. Im weiteren werden die Temperaturprofile von Gas und Leiter und die sich bei verschiedenen Kühlintensitäten einstellenden Verluste und optimalen Stromstärken mit den Voraussagen der Theorie verglichen. Die Abweichungen liegen im Rahmen der Messgenauigkeit. Die von der Theorie her zu erwartende Instabilität des Temperaturprofils bestätigte sich im Experiment.

Abschliessend werden die Resultate der Theorie und Messungen mit publizierten Ergebnissen anderer Autoren verglichen.

## INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	3
Zusammenfassung	5
1. Einleitung	9
1.1. Die Bedeutung von elektrischen Zuleitungen zu Tieftemperaturanlagen	9
1.2. Problemformulierung	14
2. Die Differentialgleichungen des Problems	21
3. Lösungen unter idealen Bedingungen	26
3.1. Prinzipielle Betrachtung	26
3.2. Ansätze für die Stoffwerte	27
3.3. Lösung mit angenommenen Anfangsbedingungen	30
3.4. Optimale Dimensionen eines Leiters	35
3.5. Die Lösung des Randwertproblems	37
3.6. Optimale Bedingungen periodisch stromführender Leiter	44
3.7. Eine mögliche Instabilität	53
3.8. Zusammengesetzte Leiter	58
3.9. Variabler Querschnitt des Leiters	60
4. Lösung unter realen Bedingungen	61
4.1. Das Verhalten der Stoffwerte von reinen Metallen	61
4.2. Die Gültigkeit des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes	65
4.3. Die Annahmen für die Widerstands- und Leitfähigkeitsfunktion	67
4.4. Der Wärmeaustausch zwischen Gas und Leiter	70
4.5. Das Rechenprogramm	78
4.5.1. Die Voraussetzungen	78
4.5.2. Der Lösungsweg	80
4.5.3. Das Konvergenzkriterium	81
4.5.4. Die Integration des Drahtparameters	83

4.5.5. Die Wahl der Länge des Integrationsschrittes	86
4.5.6. Das Blockprogramm	86
4.6. Die Resultate der Berechnung	89
4.6.1. Das Temperaturprofil von Leiter und Gas	89
4.6.2. Die thermischen Verluste $q^*$	92
4.6.3. Der Drahtparameter $\kappa^{\circ}$	96
4.6.4. Der Spannungsabfall $\Delta V$ und die Gastemperatur am warmen Ende	99
4.6.5. Der Reduktionsfaktor $\gamma$	102
4.6.6. Der Einfluss der Materialwahl	107
4.7. Vergleich mit den Ergebnissen der idealen Theorie	112
5. Die Versuche	115
5.1. Die Messeinrichtungen	115
5.1.1. Temperaturmessung	115
5.1.2. Messung der Stoffwerte des Metalles	118
5.2. Die Versuche im He-Grossbehälter	121
5.2.1. Versuchseinrichtung	121
5.2.2. Ergebnisse	123
5.3. Die Versuche im He-Dewar	131
5.3.1. Versuchseinrichtung	131
5.3.2. Ergebnisse	132
6. Vergleich mit andern Theorien und Messungen	136
7. Schlussbemerkungen	139
Symbolverzeichnis	140
Quellenangaben	146



## 1. EINLEITUNG

### 1.1. Die Bedeutung von elektrischen Zuleitungen zu Tieftemperaturanlagen

Die erstmalige Verflüssigung von Helium, des Elementes mit der niedrigsten Siedetemperatur, durch Kamerlingh Onnes [1]<sup>1)</sup> am 10. Juli 1908 legte den Grundstein für die Entwicklung der Tieftemperaturtechnik, die im angelsächsischen Sprachgebiet den zutreffenden Namen "Cryogenics"<sup>2)</sup> erhielt.

1911 entdeckte Onnes bei Experimenten mit flüssigem Helium die sprunghafte Reduktion des elektrischen Widerstandes von Quecksilber auf einen unmessbar kleinen Wert. Diese Supraleitfähigkeit wurde in der Folge an einigen weiteren Elementen und Legierungen<sup>3)</sup> festgestellt und darf wohl rückblickend als das interessanteste und vielversprechendste Phänomen in diesem seit 1908 neu erschlossenen Temperaturbereich gewertet werden.

Vorerst blieb jedoch dieses Gebiet eine exklusive Domäne der Forschung, waren doch die Schwierigkeiten für die Verflüssigung des Heliums so gross, dass dieses nur in wenigen hochspezialisierten Laboratorien zur Verfügung stand. Um eine technische Anwendung zu ermöglichen galt es zunächst den aufwendigen Verflüssigungsprozess von Helium zu vereinfachen um einer grossen Anzahl von Benützern die Arbeit mit flüssigem Helium zu ermöglichen. Heute ist dieses Ziel erreicht und es besteht ein kommerzielles Angebot, das von Grossverflüssigern mit 900 l/h [2] bis zu Minicoolern mit einer Leistung von 70 mW bei 4.4 K [3] reicht. Die Erzeugung noch tieferer Temperaturen, zuerst als reiner Selbstzweck, setzte gleich nach der Verflüssigung von Helium ein. Die Druckerniedrigung über dem normalen flüssigen He (Atomgewicht 4) wird unter dem

- 
- 1) Die Zahlen in den eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.
  - 2) Von griechisch κρύος (kalt) und -γενέω (erzeugen).
  - 3) Heute kennt man 28 supraleitende Elemente und über 1000 supraleitende Legierungen [71].

sog.  $\lambda$ -Punkt (2.18 K, 38.3 Torr) wegen der einsetzenden Supraflüssigkeit<sup>4)</sup> sehr aufwendig. Das seltene, leichte Heliumisotop  $^3\text{He}$  wird nicht supraflüssig und weist zudem einen höhern Dampfdruck auf und eignet sich deshalb besonders zur Erzeugung von Temperaturen unter 1 K durch Abpumpen.

Ohne unvertretbar hohen Aufwand an Pumpen gelingt es, auf diese Weise eine Temperatur von 0,3 K ( $p = 10^{-3}$  Torr) aufrechtzuerhalten. Noch tiefere Temperaturen können durch den von Giauque [5] vorgeschlagenen und 1933 erstmals verwirklichten diskontinuierlichen Prozess der adiabaten Entmagnetisierung paramagnetischer Salze [6, Kap. 8] erzeugt werden. Die Eigenschaft der Lösung und Trennung von supraflüssigem He II in  $^3\text{He}$  ermöglicht gemäss einem Vorschlag von London [7] den kontinuierlichen  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  Verdünnungskälteprozess (vgl. z.B. Grassmann [8]). Die momentan leistungsfähigste Anlage dieses Typs erzeugt 0,16 mW bei 100 mK bei einer Zirkulationsrate von 1 mg  $^3\text{He}/\text{s}$  und erreicht eine tiefste Temperatur von 55 mK. Durch die von Kurti [10] erstmals verwirklichte Ausnützung der Kernspinentropie von Cu gelingt es, ausgehend vom mK Bereich, in den  $\mu\text{K}$  Bereich vorzustossen, obwohl die lokale Verteilung und die Bestimmung dieser Temperatur problematisch ist. Der "Rekord" in der Erzeugung immer tieferer makroskopischer Temperaturen wird im Moment (1970) von Lounasma [11] gehalten, der eine durch einen  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  Verdünnungsprozess (1  $\mu\text{W}$  bei 20 mK) vorgekühlte adiabate Kernspinentmagnetisierung an Cu durchführte und eine minimale Temperatur der Probe von 0,63 mK erreichte, die sich während 4 Stunden nicht über 1 mK aufwärmte.

Die Temperaturerzeugung blieb jedoch nicht Selbstzweck. Die ausgeklügelten Kälteprozesse dienten hauptsächlich der festkörperphysikalischen Forschung, die nun in die Lage versetzt wurde, in Abwesenheit thermischer Störungen Theorien und Voraussagen zu verifizieren. Ein erheblicher Anteil dieser Arbeiten (55 % aller Publikationen im Jahre 1969) galt der Erforschung der Supraleitung

---

4) Für das normalflüssige Helium hat sich die Bezeichnung He I, im Gegensatz zum supraflüssigen He II eingebürgert.

und vorallem der Erzeugung von Supraleitern mit immer höheren Sprungtemperaturen  $T_c$ . Der höchste bekannte Wert von  $T_c$  beträgt 20.2 K und wurde an einer speziell behandelten Al Ge Nb<sub>6</sub> Legierung gemessen. Auch dieser Supraleiter benötigt noch He zur Kühlung, da H<sub>2</sub> mit einem Tripelpunkt bei 13,95 K 54 Torr eine zu geringe "Kühlreserve" besitzt, um den supraleitenden Zustand auch bei angemessenen Strömen, die bekanntlich die Supraleitung zerstören können, aufrecht zu erhalten.

Auf Grund dieser jahrelangen Forschungstätigkeit an Hochschulinstituten und in der Industrie stellte sich natürlich die Frage nach der technischen Nutzbarkeit einiger dieser sehr interessanten Ergebnisse. Drei Gebiete, das Kryopumping<sup>5)</sup>, die Anwendung der Supraleitung in der Elektronik und die verlustlose Erzeugung, Umwandlung, Verteilung und Anwendung hoher elektrischer Energien erwiesen sich als geeignet, mit den bekannten, konventionellen Lösungen in Konkurrenz zu treten.

Die Entwicklung der letzten Jahre hat gezeigt, dass Kryopumpen, abgesehen von Forschungsgeräten (Raumsimulationskammern), für spezielle Sauberkeitsanforderungen und Pumpgeschwindigkeiten, z.B. bei Aufdampfanlagen [12], eine günstige Alternative bieten. Auch als sogenannte Booster im abwechslungsweisen Betrieb zeigen sich realisierbare Möglichkeiten [13].

Auf dem Gebiete der Elektronik benützen die Maser [14] und parametrischen Verstärker die starke Erniedrigung ihrer Rauschtemperaturen<sup>6)</sup> durch die Abkühlung der wichtigsten Eingangskomponenten. Das Kryotron [15] als logisches Schaltelement und Speicherzelle hat trotz des geringen Volumens und der

---

5) Vakuumerzeugung durch Kondensation der Restgase an einer kalten Fläche, auf die Grassmann [81] schon 1950 hinwies.

6) Als Rauschtemperatur wird derjenige Störpegel am Ausgang eines Verstärkers bezeichnet, welcher durch die thermischen Schwingungen eines Widerstandes entsprechender Temperatur am Eingang hervorgerufen wird.

extrem kurzen Schaltzeit ( $10^{-6}$  sec) vorläufig keine Anwendungschancen in der Computerindustrie, da der Aufwand für die Kühlung die Vorteile überwiegt. Bedeutende Durchbrüche sind auf diesem Sektor vorläufig keine vorauszusehen.

Die Energietechnik hingegen bietet Ansatzpunkte, welche die Anwendung von Supraleitern — und somit des "know-how" der Tieftemperaturtechnik — in grosstechnischem Rahmen voraussehen lassen. Supraleitende Forschungsmagnete für Laborversuche, Blaskammern und Beschleuniger bestehen in einem weiten Anwendungsspektrum und erfüllen die in sie gesetzten Erwartungen vollumfänglich. Da aber in der Forschung die Fragen der Wirtschaftlichkeit und der Zuverlässigkeit unter andern Aspekten betrachtet werden als in der sehr konservativen Energietechnik bedeuten diese Erfolge noch keinen Durchbruch. Die augenfälligsten und teilweise schon erprobten supraleitenden Komponenten in der Energietechnik sind Motoren, Transformatoren, Gleichrichter und Übertragungskabel.

Der Homopolarmotor bietet die vielversprechendsten Voraussetzungen zur Erzeugung hoher mechanischer Energien bei relativ niedrigen Drehzahlen. Eine 2.8 MW Ausführung mit einem Rotordurchmesser von 2.8 m und einem maximalen Feld von 37 kG wurde in England hergestellt und als Antrieb der zentralen Kühlwasserpumpe eines Kraftwerkes eingesetzt [16]. Ein supraleitender Transformator für hohe Leistungen (für niedrige Leistungen fällt der Wirtschaftlichkeitstest sowieso schlecht aus) wurde bis heute noch nicht gebaut. Lorch [17] führte jedoch aufgrund der ausgedehnten Erfahrung mit supraleitenden Magneten eine Vergleichsstudie für einen 600 MVA 400 kV → 22 kV Transformator durch, die noch knapp zugunsten der konventionellen, ölgekühlten Bauart ausfällt. Für Leistungsgleichrichter, die oft in Zusammenhang mit Leistungstransformatoren vorkommen, erwies sich die Schaltung nach Olsen [18] als vorteilhaft. Die Verluste und die Leistung pro Volumeneinheit bewegen sich in einer Grössenordnung, die für spezielle Anwendungen günstig erscheinen kann. Die Anwendbarkeit des supraleitenden Kabels schliesslich wird von Forschungsorganisationen [19] und der interessierten Industrie untersucht, da die konventionelle Frei-

leitung den steigenden Ansprüchen (Zuleitungen zu Ballungszentren) und den wachsenden Distanzen (Energieproduktion an Ort, wo nach Kühlwasser erhältlich ist) in Zukunft nicht mehr gewachsen sein wird. Kurze Versuchsstrecken bestehen bereits [20] und eine längere wurde in Auftrag gegeben [21].

Vorläufig aber besteht bei den potentiellen Abnehmern noch eine grosse Skepsis gegen die Anwendung dieser modernsten Komponenten. Solange der wirtschaftliche Aspekt nicht überzeugend geklärt werden kann, wird dieser Widerstand kaum zu überwinden sein.

Wie die Studie von Lorch [17] gezeigt hat, betragen die Anschaffungskosten des supraleitenden Transformers mehr als das elffache des ölgekühlten. Bei dieser Summe fallen die Kälteanlage (430 W, 4.2 K) mit einem Anteil von 81 % und das supraleitende Material mit 11 % besonders schwer ins Gewicht. Die Betriebskosten bestehen hauptsächlich aus dem Aufwand, der zur Deckung der thermischen Verluste der Anlage erforderlich ist und betragen ungefähr 27 % der durch den verlustlosen Betrieb eingesparten Energie. In Abb. 1-1 sind die einzelnen Komponenten der thermischen Verluste zusammengestellt. Dabei sticht ins Auge, dass die Hälfte dieser Verluste von den elektrischen Zuleitungen herrührt. Eine Reduktion dieses Betrages auf die Hälfte liesse den Wirtschaftlichkeitsvergleich, vorallem wegen der billigeren Kälteanlage, klar zugunsten der supraleitenden Version ausfallen. Aehnliche Verhältnisse sind bei kleineren Magneten und Gleichrichtern anzutreffen.

Obwohl sich die Verluste bei Motoren und Uebertragungskabeln etwas anders zusammensetzen, lohnt es sich, auch für diese Anwendungszwecke das Problem der Verluste, welche durch die elektrischen Zuleitungen verursacht werden, gründlich zu untersuchen. Die grössten bestehenden Zuleitungen sind für 6000 A nominal pro Leiter ausgelegt [22] und es bestehen Projekte für einen Strombedarf bis 100 kA [23]. Es ist das Ziel dieser Arbeit, einen Beitrag zur optimalen Dimensionierung elektrischer Zuleitungen zu supraleitenden Anlagen zu leisten.

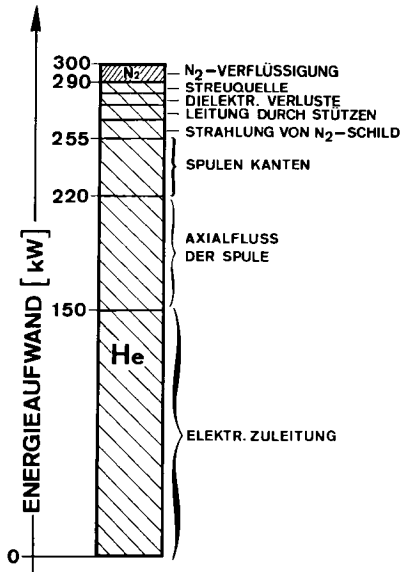


Abb. 1-1.1 Aufteilung der Leistung, die zur Deckung der thermischen Verluste eines supraleitenden Leistungstransformers (600 MVA, 400 kV-22kV) [17] benötigt wird.

## 1.2. Problemformulierung

Jeder unbeschwerte Tieftemperaturexperimentator stösst bei der Auslegung seiner ersten Anlage unwillkürlich auf das Problem der Dimensionierung der praktisch immer vorhandenen elektrischen Zuleitungen.

Eine erste überschlagsmässige Berechnung weist schon auf einige wichtige Aspekte des Problem es hin. Für das Temperaturprofil eines beliebigen Leiters gilt:

$$Q^* = - \lambda F \frac{dT}{dx} \quad 1-1.2$$

Für den stromführenden adiabaten Draht beträgt die Änderung des Wärmestromes

$$dQ^* = \rho J^2 \frac{dx}{F} \quad \text{oder} \quad dx = \frac{F dQ^*}{\rho J^2} \quad 2-1.2.$$

Dies in Gl. 1 eingesetzt ergibt folgende Differentialgleichung für den Wärmestrom

$$Q^* dQ^* = - \lambda \rho J^2 dT \quad 3-1.2.$$

Daraus folgt durch Integration

$$Q_{T_h}^{*2} = - 2 J^2 \int_{T_o}^{T_h} \lambda \rho dT + Q_{T_o}^{*2} \quad 4-1.2.$$

oder mit den auf ein Ampère bezogenen Wärmeströmen

$$q^* \equiv \dot{q}_{T_o} = - \frac{\lambda F}{J} \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = \left( \dot{q}_{T_h}^2 + 2 \int_{T_o}^{T_h} \lambda \rho dT \right)^{1/2} \quad 5-1.2.$$

Daraus ist ersichtlich, dass die thermischen Verluste  $q^*$  minimal werden, sobald der Wärmestrom am warmen Ende  $\dot{q}_{T_h}$  null wird. Ausgehend von dieser Annahme, die als erste Form eines Optimalkriteriums bezeichnet werden kann, ist die Berechnung des Wärmestromes  $\dot{q}(T)$  im Draht möglich.

$$\dot{q}(T) = \left( 2 \int_T^{T_h} \lambda \rho dT \right)^{1/2} \quad 6-1.2.$$

Damit können die optimalen Leiterdimensionen wie folgt berechnet werden:

Aus  $\dot{q} = \frac{\lambda F}{J} \frac{dT}{dx}$  folgt  $dx = \frac{\lambda F}{J} \frac{dT}{\dot{q}(T)}$  oder für  $F = \text{const.}$

$$l_{\text{opt}} = \int dx = \int_{T_o}^{T_h} \frac{\lambda F}{J} \frac{dT}{\dot{q}(T)} = \frac{F}{J} \int_{T_o}^{T_h} \frac{\lambda}{\dot{q}(T)} dT \quad 7-1.2.$$

Schon die Lösung eines ersten Beispiels zeigt, dass auch für diesen einfachen Fall des adiabaten Leiters entweder eine genaue Kenntnis der Stoffwerte  $\rho$  und  $\lambda$  oder grobe Annahmen (z.B.  $\rho \cdot \lambda \sim T$ ) erforderlich sind. Die Fehler von  $\dot{q}(T)$  wirken sich entsprechend Gl. 7 noch in vermehrtem Mass auf die Dimensionen aus.

In den vielen bisher erschienen Veröffentlichungen [24-45], wurden so verschiedenartige Annahmen und Vernachlässigungen getroffen, dass es gerechtfertigt erscheint, diese nachstehend kurz zu besprechen, um einen Ueberblick über den heutigen Stand des Wissens darzulegen.

Der erste Hinweis auf die Problematik elektrischer Zuleitungen zu Tieftemperaturanlagen stammt aus dem Jahre 1915 von Meissner [24], der für das Problem einer 200 A Zuleitung zu einem Experiment in flüssigem  $H_2$  Gl. 4 ebenfalls herleitete und das kurz gestreifte Optimierungsproblem ( $\dot{q}_{T_h} = 0$ ) analytisch bewies. Da über den Verlauf der Stoffwerte keine genauen Angaben bekannt waren, konnten jedoch keine quantitativen Aussagen über die Verluste und Dimensionen gemacht werden. Hingegen wurde der naheliegende Schluss verwirklicht, die Warmendtemperatur der Leiter auf 77 K abzukühlen.

McFee [25] berechnete 1959 erstmals in einer vielbeachteten und grundlegenden Arbeit die Verluste und optimalen Dimensionen thermisch isolierter Leiter mit segmentweise konstanten Stoffwerten. Das Optimalkriterium, das anhand von Gl. 5 kurz gestreift wurde, wird klar formuliert und besprochen. Die am Beispiel von Cu errechneten Werte für  $q^* = 42 \text{ mW/A}$  resp.  $9 \text{ mW/A}$  und  $l_{\text{opt}} \cdot J/F = 5.1 \cdot 10^5$  resp.  $1.1 \cdot 10^6 \text{ A/cm}$  für eine Warmendtemperatur von  $T_h = 290 \text{ K}$  resp.  $77.4 \text{ K}$  und eine Kaltendtemperatur  $T_o = 4.2 \text{ K}$  erscheinen auch in neueren Publikationen noch als Standardwerte [47, S. 222]. Mallon [26] dehnte die Berechnungen auf Al und Na, Mercouroff [29] auf Messing aus. Oberhauser und Sukhatme [35] bestimmten die minimalen Verluste von Ag, Cu, Ni, Pb, Al, Sn, Be, In bei 2 verschiedenen Warmendtemperaturen und verglichen die Resultate mit der Theorie von McFee. Die berechneten Verluste weichen um +36 %, -27 %, die Dimensionen hingegen um +74 %,



- 32 % von Versuchsergebnissen ab. Auch die erwartete relativ spitze Form des Optimums wurde nicht bestätigt. Die Ursache dieser Abweichungen muss in den mangelhaften Annahmen für die Stoffwerte zur Auswertung von Gl. 5 und 7, die von McFee in etwas umständlicherer Form eingeführt wurden, gesucht werden.

Sobol und McNichol [27] berücksichtigten 1962 erstmals den Einfluss des Wärmeaustausches mit den verdampften, sich während des Ausfließens aufwärmenden Gasstromes. Dabei setzten sie einen idealen Wärmeübergang voraus und rechneten segmentweise mit konstanten Stoffwerten. Wegen der speziellen Anordnung sind die Ergebnisse nur schwer mit späteren Resultaten vergleichbar. Williams [28] konnte für einen temperaturproportionalen elektrischen Widerstand und eine konstante Wärmeleitfähigkeit erstmals eine geschlossene Lösung für das Temperaturprofil angeben und daraus für verschiedene Kühlmedien und Warmendtemperaturen die Verluste für idealen und fehlenden Wärmeaustausch ableiten. Fournet und Mailfert [30] gelangen mit nicht näher umschriebenen Annahmen zur Aussage, dass die Verluste ideal gekühlter Leiter unabhängig vom Leitermaterial und der Warmendtemperatur  $0.64 \text{ mW/A}$  betragen. Die ersten Messresultate gekühlter Leiter stammen von Matthews [32], wobei wegen der störenden Kryostatverluste sowie der Joule'schen Wärmeerzeugung im Kühlbad (durch ein eingetauchtes Leiterstück) weder die minimalen Verluste noch die optimalen Dimensionen klar bestimmt werden können. Deiness [34] weist auf die Wichtigkeit des Restwiderstandes und der Abweichung von Wiedemann-Franz Gesetz (siehe Kap. 4.2.) hin, ohne diese qualitativ zu erfassen. Dabei scheint Ni die günstigsten Resultate zu geben, und eine Wärmeübertragungsfläche zwischen Leiter und verdampftem Kühlmittel von  $\geq 20 \text{ cm}^2/W_{el}$  den idealen Fall genügend genau anzunähern. Nigohossian [41] führte eine Anzahl von numerischen Berechnungen durch und bestimmte experimentell Stoffwerte für verschiedene Qualitäten von Cu, Al und Messing sowie rostfreien Stahl, konnte jedoch die Abhängigkeiten nicht genau erfassen. Bérard [42] berechnete die Verluste von ungekühlten und idealgekühlten Cu und Ni

Zuführungen in ein  $H_2$  Kühlbad, wobei er von einer einleuchtenden Definition der optimalen Verhältnisse ausgeht.

Anstelle eines idealen Wärmeaustausches berücksichtigten Fournet und Mailfert [31] durch ein konstantes Verhältnis der örtlichen Ableitungen  $\frac{d\Theta}{dx} \frac{G}{dx} / \frac{dT}{dx}$  von Gas- und Leitertemperatur einen realen Wärmeübertragungsmechanismus. Keilin und Klimenko [36] führten einen teilweise idealen Wärmeübergang ein und gaben für gemittelte Stoffwerte eine geschlossene Lösung an. Erstmals wurden auch zusammengesetzte Drähte (combined leads), die auf der Badseite den Strom durch Supraleiter führen, berücksichtigt, wobei die geschlossenen Lösungen sehr kompliziert und wegen einiger Annahmen eher fragwürdig werden. In den Experimenten gelingt es nicht, den Einfluss der Kryostatverluste sauber zu eliminieren. Eine umfassende Arbeit von Donadieu und Dammann [37] mit segmentweisen konstanten Stoffwerten und einem Wärmeübertragungsmechanismus, der mit Hilfe des Produkts Querschnittsfläche mal Umfang ( $F \cdot u$ ) dargestellt wird, führt zum gleichen Grenzwert der Verluste wie bei Fournet und Mailfert [30]. Die Kryostatverluste werden in der Theorie berücksichtigt und für einen genügenden Wärmeübergang wird

$$F \cdot u / \rho \cdot J^2 \cong 185 \text{ cm}^2 / W_{el}$$

angegeben.

Pippard [33] benutzte den Wärmeaustauscher einer Kälteanlage um die Zuleitungen zu kühlen und vergleicht die dadurch erforderliche Leistung mit derjenigen, die durch thermisch isolierte Drähte (Kontakt zwischen Refrigerator und Leiter nur bei  $T_0$ ) entsteht. Die entropiemässig a priori günstigere erste Lösung ergibt für das gewählte Beispiel eine Verbesserung von 22 % gegenüber der isolierten Version. Inai [39] berechnete numerisch, ohne auf das Verhalten elektrischer Zuleitungen einzugehen (keine optimalen Verhältnisse), für eine gegebene Geometrie und verschiedene Ströme und Wärmeübergangszahlen die Gas- und Leitertemperatur, wobei am warmen Ende wahlweise Wärme konvektiv zu- oder abgeführt wird.

Die neueste Publikation von Lock [40] befasst sich andeutungsweise mit dem prinzipiellen Verhalten von elektrischen Zuleitungen und berücksichtigt auch die Abweichungen von Wiedemann-Franz'schen Gesetz. Der ideale Wärmeaustausch und die empirische Beziehung für die thermische Leitfähigkeit schränken jedoch die Gültigkeit dieser Ergebnisse ein. Guesewell und Haebel [43] dimensionierten die Zuleitungen des Magneten der "Large European Bubble Chamber" des CERN mit  $2 \cdot 6000$  A mit einer Verlustoptimierung bezüglich der Refrigeratorleistung und der spezifischen Sicherheitsanforderungen. Köhler u.a. [44] weisen auf einige spezielle mathematische Probleme hin und berechneten die minimalen Verluste für verschiedene Werte des Wärmeübertragungsparameters  $\alpha F_u / J^2$ , ohne jedoch auf die Dimensionierung einzugehen. Lange u.a. [45] berechneten mit Hilfe eines Analogrechners die Verluste einer speziellen Geometrie mit variablem Leiterquerschnitt, wobei der Einfluss der Kryostatverluste auch berücksichtigt wurde.

Diese Aufnahme des "Ist-Zustandes" zeigt deutlich, dass eine qualitative und auch quantitative Unsicherheit über wichtige Fragen dieses Problems besteht. Die Aussagen über die minimalen Verluste von McFee [25] sind nicht mit denjenigen von Donadieu und Dammann [37] in Einklang zu bringen. Die Verfälschung der theoretischen Ergebnisse durch die Annahmen für den Wärmeübergang und die Stoffwerte sind nicht einmal qualitativ klargestellt. Ausser der Quantität  $Jl/F$  [A/cm] ist keine Kenngrösse des Problems bekannt. Ferner ist der Problembereich der nur zeitweise stromführenden und der zusammengesetzten Leiter völlig ungenügend behandelt und gelöst, und eine zusammenfassende Uebersicht, die alle bisher beobachteten Abweichungen von der Theorie und Phänomene zusammenhängend erklären kann, fehlt trotz der zahlreichen Publikationen bis heute.

Die vorliegende Arbeit soll diese Lücken durch die Bearbeitung folgender, ausschliesslich theoretischer Probleme schliessen:

1. Diskussion des prinzipiellen Verhaltens elektrischer Zuleitungen anhand eines möglichst exakten, jedoch noch geschlossen lösbaeren Modells und Bestimmung der entscheidenden Einflussgrössen.
2. Numerische Lösung des exakten Differentialgleichungssystems mit Modellen, die möglichst wenige Messwerte zur Auswertung benötigen.
3. Vergleich der Ergebnisse mit den Resultaten anderer Publikationen.
4. Ueberprüfung einiger spezieller Ergebnisse der Theorie durch Experimente.

Der Einfluss folgender Grössen soll sowohl quantitativ wie auch qualitativ erfasst werden:

1. Stoffwerte
  - elektr. Widerstand  $\rho(T)$  des Leiters
  - Restwiderstand  $\rho_0$
  - thermische Leitfähigkeit  $\lambda(T)$
  - spezifische Wärme  $c(T)$
2. Anordnung
  - Wärmeübergang  $\alpha(T)$
  - Kühlintensität  $\beta'$
  - Kryostatverluste  $Q_0^*$
  - Leiterquerschnitt  $F$
  - Warmendtemperatur  $T_h$
  - Kaltendtemperatur  $T_0$
  - Stoffwerte des Kühlmediums ( $\lambda_{G'}, \mu_{G'}, r, c_p$ )
  - Stromstärke  $J$
  - Zykluszeiten  $\tau_\lambda$  resp.  $\tau_J$

Ein zusammenfassender, kurzer Ueberblick über den Inhalt dieser Arbeit wurde schon gegeben [46]. Dabei wurde vorallem auf diejenigen Aspekte hingewiesen, welche durch die Ergebnisse dieser Arbeit unter neuen Gesichtspunkten erscheinen.

## 2. DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG DES PROBLEMS

Abb. 1-2 zeigt ein Leiterelement mit den dazugehörigen Wärmeströmen.

Es bedeuten:

$$\begin{aligned} Q_{x+dx}^* - Q_x^* &= \frac{\partial}{\partial x} (\lambda F \frac{\partial T}{\partial x}) dx \\ &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} F \lambda dx + F \frac{d\lambda}{dT} (\frac{\partial T}{\partial x})^2 dx + \frac{dF}{dT} (\frac{\partial T}{\partial x})^2 \lambda dx \end{aligned}$$

$$\delta Q_p^* = -\frac{c}{v} F \frac{dT}{dt} dx + J^2 \rho \frac{dx}{F}$$

$$\delta Q_a^* = a d\theta (T - \Theta_G)$$

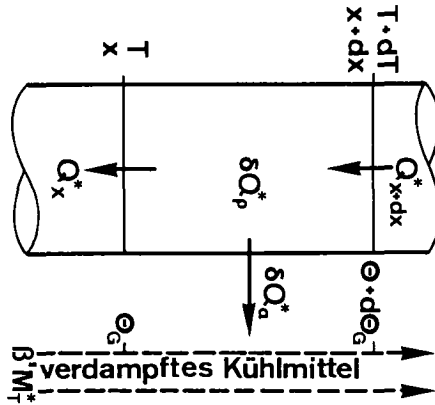


Abb. 1-2. Leiterelement mit den dazugehörigen Wärmeströmen

Unter der Berücksichtigung der speziellen Geometrie elektrischer Zuleitungen ist es gerechtfertigt, das Problem eindimensional zu betrachten.

Die Energiebilanz des Elementes liefert folgende Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{-1}{F} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 \left( F \frac{d\lambda}{dT} + \lambda \frac{dF}{dT} \right) + \frac{u}{F} \frac{\alpha}{\lambda} (T - \theta_G) - J^2 \frac{\rho}{\lambda F^2} + \frac{c}{\lambda v} \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

1-2.

Durch den ersten Term wird berücksichtigt, dass die Ableitung des Wärmestromes  $\frac{\partial}{\partial x} (\lambda F \frac{dT}{dx})$  nicht nur durch  $\lambda F \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  wiedergegeben werden darf, sondern dass die Anwendung der Produktregel exakt eingehalten werden muss. Das dadurch entstehende Glied zweiten Grades nimmt in den Bereichen, in denen die Wärmeleitfähigkeit eine ausgeprägte Funktion der Temperatur ist, relativ hohe Werte an und beeinflusst das Resultat entscheidend. Dies kann anschaulich anhand des stationären, stromlosen und thermisch isolierten Falles erläutert werden. Ohne den ersten Term ergibt sich für diesen Fall ein lineares Temperaturprofil, welches sicher im Bereiche tiefer Temperaturen nicht anwendbar ist. Das zweite Glied des ersten Terms berücksichtigt den Einfluss der Querschnittsveränderung.

Um die Gleichung später bequemer über der Temperatur integrieren zu können, wird angenommen, dass die Querschnittsfläche als Funktion der Temperatur bekannt sei. In der Praxis wird sie jedoch oft in Abhängigkeit der Längskordinate  $x$  vorliegen, was aber keine prinzipiellen Schwierigkeiten bereitet.

Der Gaskühlungsterm 2 beschreibt den Wärmeübergang von der Leiteroberfläche an das Kühlmedium mit der örtlichen Temperatur  $\theta_G$ . Der Widerstandsterm 3 umfasst den Wärmestrom, der durch die Joule'sche Erwärmung des Elementes entsteht. Der letzte Term berücksichtigt zeitliche Temperaturveränderungen.

Die Temperatur des Kühlmediums wird durch eine zweite Differentialgleichung beschrieben:

$$\frac{d\theta_G}{dx} = u \frac{\alpha (T - \theta_G)}{\beta' M_T^* c_p} \quad 2-2.$$

Dieses System von gekoppelten partiellen Differentialgleichungen ist nicht linear und von höherer Ordnung. Eine geschlossene Lösung kann nur unter vereinfachenden Annahmen erfolgen. Mit folgenden dimensionslosen Größen:

$$t \equiv \frac{T}{\theta_D} \quad \kappa \equiv \frac{x}{D}, \quad f_\lambda \equiv \frac{\lambda(T)}{\lambda_\infty}, \quad f_p \equiv \frac{p(T)}{p_\theta}, \quad f_a \equiv \frac{\alpha(T) D}{\lambda_\infty},$$

$$\psi \equiv \frac{\theta}{\theta_D} \quad 3 \div 8-2.$$

und den Abkürzungen:  $t' \equiv \frac{dt}{d\kappa}$ ,  $t'' \equiv \frac{d^2 t}{d\kappa^2}$ ,  $\psi' \equiv \frac{d\psi}{d\kappa}$ ,  $f_\lambda' \equiv \frac{df_\lambda}{dt}$

kann das Differentialgleichungssystem ohne den instationären Term und für eine konstante Querschnittsfläche F auf folgende Gleichungen reduziert werden:

$$t'' = -t' \frac{1}{f_\lambda(t)} f_\lambda'(t) + P_A \frac{f_a(\psi)}{f_\lambda(t)} (t - \psi(t)) - P_J \frac{f_p(t)}{f_\lambda(t)} \quad 9-2.$$

$$\psi' = P_M f_a(\psi) (t - \psi) \quad 10-2.$$

Es bedeuten  $P_A \equiv \frac{uD}{F}$ ,  $P_M \equiv \frac{u \cdot \lambda_\infty}{\beta' M_T^* c_p}$ ,  $P_J \equiv J^2 \frac{D^2}{F^2} \frac{p_\theta}{\theta_D \lambda_\infty}$

11 ÷ 13-2.

Als Referenztemperatur wird die für die Berechnung der spezifischen Wärme charakteristische Debye Temperatur  $\theta_D$  des Metalls gewählt.

Zur Lösung dieses Systems, das sich auch durch eine partielle Differentialgleichung dritten Grades darstellen lässt, bieten sich einzig numerische Methoden an, die später diskutiert werden.

Um eine einzige Differentialgleichung zu erhalten, muss für den Wärmeaustauschvorgang zwischen der Leiteroberfläche und dem Gas ein neues Modell gefunden werden. Wie Abb. 11-2 zeigt, kann die Annahme, dass ein Bruchteil  $\beta_0$  des

Gasen in idealem Wärmeaustausch mit dem Leiter stehe und somit für diesen Teilstrom überall  $T = \theta_G$  sei, als vereinfachender Wärmeübertragungsmechanismus betrachtet werden. Keilin und Klimenko [36] verwendeten ein ähnliches Modell. Auf die Fehler, die durch die Annahme entsteht, wird in Kap. 4.4. hingewiesen. Die Berechnung von  $\beta_0$  erfolgt in erster Näherung als

$$\beta_0 = \beta' \frac{\theta_G - T_0}{T - T_0} \approx \text{const.} \quad 14-2.$$

Die numerische Zweckmäßigkeit dieser Definition wird in § 4.6.1. (Abb. II) erläutert. Ihre physikalische Berechtigung kann anhand der experimentellen Ergebnisse in § 5.2. (Abb. II) diskutiert werden.

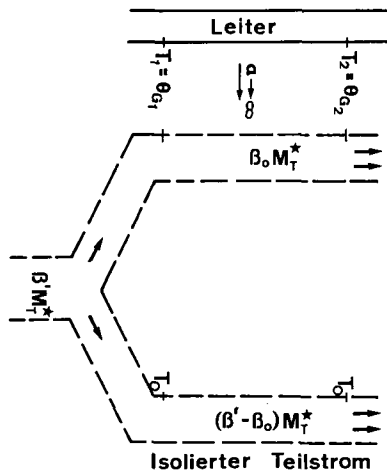


Abb. II-2

Vereinfachendes Modell des Wärmeaustausches zwischen Gas und Leiter. Vom totalen zur Verfügung stehenden Gasstrom  $\beta' M_T^*$  ist der Teilstrom  $\beta_0 M_T^*$  in idealem thermischem Kontakt mit dem Leiter, wogegen der Reststrom  $(\beta' - \beta_0) M_T^*$  als thermisch isoliert zu betrachten ist.



Die entsprechende Differentialgleichung lautet dann:

$$t'' = - t'^2 \frac{1}{f_\lambda} f'_\lambda + P_P \frac{1}{f_\lambda} t' - P_J \frac{f_p}{f_\lambda} \quad 15-2.$$

mit

$$P_P \equiv \beta_o \frac{M_T^* c_D}{\lambda_\infty F} = P_A / P_M \quad 16-2.$$

Die Differentialgleichung für die Temperatur des Gasstromes fällt weg, da seine mittlere Temperatur nun durch folgende Beziehung gegeben ist:

$$\theta_G = T_o + \frac{\beta_o}{\beta'} (T - T_o) \quad 17-2.$$

### 3. LOESUNG UNTER IDEALEN BEDINGUNGEN

#### 3.1. Prinzipielle Betrachtungen

Die grosse Anzahl der Parameter des Problems verleiten beim heutigen Stand der Technik sehr rasch zur direkten numerischen Auswertung. Wie in allen ähnlich komplizierten physikalischen Problemen hat auch in diesem Falle der numerische Lösungsweg den grossen Nachteil, dass er über die Tendenz des Verhaltens nichts aussagen kann. Auch Kennzahlen und kombinierte Einflussgrössen, die für das physikalische Verständnis der Vorgänge von grösster Wichtigkeit sind, können auf diese Weise nicht hergeleitet werden.

Alle diese notwendigen Erkenntnisse lassen sich anhand einer geschlossenen Lösung gewinnen. Eine solche ist aber nur mit vereinfachenden Annahmen für die Stoffwerte durchführbar. Je einfacher diese Ansätze sind, desto weniger repräsentativ ist die Aussage der geschlossenen Lösung für das tatsächliche Verhalten. Daher gilt es diejenigen Annahmen zu wählen, die das effektive Verhalten am besten beschreiben und noch eine, wenn auch recht komplizierte geschlossene Lösung zulassen.

Aus den qualitativen Ergebnissen lassen sich wertvolle und lehrreiche Schlüsse ziehen, die quantitativen Resultate hingegen dürfen nur unter grossen Vorbehalten angewendet werden.

In diesem Kapitel wird dieser Weg beschritten mit dem Ziel, das prinzipielle physikalische Verhalten von Stromzuführungen kennen zu lernen.

### 3.2. Ansätze für die Stoffwerte

Für Temperaturen über 70 K darf in vielen Fällen als gute Näherung eine konstante Wärmeleitfähigkeit angenommen werden, d.h. es darf gesetzt werden  $f_\lambda = 1$ . In gleichem Intervall wird der elektrische Widerstand gut durch eine lineare Funktion der Temperatur [53] entsprechend folgender Beziehung angenähert:

$$f_\rho = 1 + \alpha' (T - \theta_D) = 1 + \alpha' \theta_D (t - 1) \quad 1-3.2.$$

Der Temperaturkoeffizient ist so definiert, dass  $1/\alpha'$  demjenigen Temperaturintervall entspricht, in welchem  $\rho$  um den Betrag  $\rho_\theta$  zunimmt. Figur 1-3.2. zeigt schematisch den Verlauf von  $f_\rho$  für ein reines Metall (Gerade 1) für welches aus physikalischen Gründen  $1/\alpha' \leq \theta_D$  sein muss. Ein temperaturproportionaler Verlauf von  $f_\rho$  (Gerade 2) bedeutet für grobe Abschätzungen eine

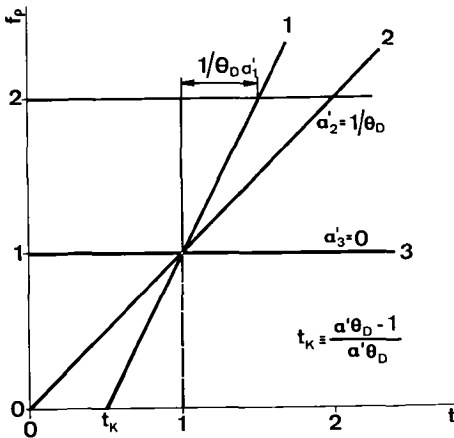


Abb. 1-3.2 Annahmen für den elektrischen Widerstand. 1 exakte Annahme für ein reines Metall (gültig ab  $t > t_k$ ), 2 grobe Annahme für ein reines Metall, 3 Annahme für eine Legierung.

genügend genaue Näherung. Für Legierungen hingegen, die oft einen mehr oder weniger konstanten Widerstand aufweisen, kann  $\alpha' \rightarrow 0$  gesetzt werden.

Unter diesen Bedingungen lautet Gl. 15-2. folgendermassen:

$$t'' = at' - \omega_0^2 t - \omega_0^2 t_K \quad 2-3.2.$$

mit

$$a \equiv \frac{\beta_0 M_T^* c_p D}{2 \lambda_\infty F}, \quad \omega_0 \equiv J \frac{D}{F} \sqrt{\rho_\theta \alpha' / \lambda_\infty}$$

$$t_K \equiv \frac{\alpha' \theta_D - 1}{\alpha' \theta_D} \quad 3,4,5-3.2.$$

Dies entspricht der Differentialgleichung der aufgeschaukelten (mit "positiven Dämpfungsfaktor") periodischen Schwingung der Grundfrequenz  $\omega_0$  und der Längskoordinate  $\kappa$ .

$\omega_0$  besitzt die Form eines elementaren Drahtparameters. Die Grösse

$$\kappa^0 \equiv \omega_0 \kappa = J \frac{l}{F} \sqrt{\rho_\theta \alpha' / \lambda_\infty} \quad 6-3.2.$$

erweist sich, wie später gezeigt wird, als eine wichtige Kennzahl des Problems. Sie soll, in Anlehnung an Donadieu [37], der die Grösse  $J l_{opt}/F$  als Drahtparameter benannte, als modifizierter Drahtparameter bezeichnet werden.

Zur Lösung von Gl. 2 werden zwei Anfangs- oder Randbedingungen benötigt. Die erste Anfangsbedingung ist die Kaltendtemperatur  $t_0$ , die zweite der Temperaturgradient  $t'_0$  am kalten Ende.

$$t_0 = T_0 / \theta_D \quad t'_0 = \frac{D}{\theta_D} \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=0} \quad 7,8-3.2.$$

Zwischen dem Dämpfungsfaktor  $a$ , der physikalisch einen Kühlparameter darstellt, und  $t'_0$  besteht ein Zusammenhang, da durch den Wärmestrom  $Q_{T=T_0}^*$  Kühlflüssigkeit verdampft wird und somit eine Beeinflussung des totalen Kühlgasstromes

$M_T^*$  entsprechend folgender Beziehung entsteht:

$$M_T^* = M_o^* + M^* = M_o^* + \frac{q^* J}{r} = M_o^* + \frac{F}{r} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_{T=T_o} \quad 9-3.2.$$

Mit  $M_o^*$  wird derjenige Gastrom bezeichnet, der durch die Kryostatverluste und Wärmeeinfälle, die nicht mit den Zuleitungen im Zusammenhang stehen, verdampft. Die Verdampfungswärme  $r$  der Kühlflüssigkeit darf nur bei kontinuierlicher Nachfüllung des Kühlmittels mit ihrem effektiven Wert eingesetzt werden. Für Kryostatbetrieb, d.h. bei einer Abnahme des Flüssigkeitsstandes muss  $M^*$  mit der scheinbaren Verdampfungsenthalpie

$$r' = r (1 - v_L/v_G) \quad 10-3.2.$$

berechnet werden, welche die Kompensation des verdampften Flüssigkeitsvolumens durch Gas berücksichtigt. Für Helium als Kühlmedium fällt der Unterschied zwischen  $r$  und  $r'$  ( $v_L/v_G = 0.13$ ) ins Gewicht, für  $H_2$  (0.013) und  $N_2$  (0.005) hingegen nicht. Für die weitere Rechnung wird kontinuierliche Nachfüllung angenommen.

Bei gewissen Anwendungen und vor allem für den rechnerischen Formalismus ist es von Vorteil, die Kryostatverluste  $M_o^*$  durch die Definition einer neuen Kühlintensität  $\beta$  auf die thermischen Verluste zu beziehen. Der Zusammenhang zwischen  $\beta$  und  $\beta_o$  soll folgende Form haben:

$$\beta \equiv \beta_o \frac{M_T^*}{M^*} = \beta_o \left( 1 + \frac{Q^*}{q^* J} \right) \quad 11-3.2.$$

Es ist deshalb realistisch, auch Werte von  $\beta > 1$  in Betracht zu ziehen.

Die letztlich interessierende Grösse sind die spezifischen Verluste  $q^* [W/A]$ , welche durch die Zuleitungen verursacht werden. Zwischen  $q^*$ ,  $t_o'$  und  $a$  besteht folgende Beziehung:

$$q^* = t'_o \frac{F}{D} \frac{\lambda_\infty \theta_D}{J} = 2 \alpha \frac{F}{D} \frac{r}{c_p \beta} \frac{\lambda_\infty}{J} \quad 12-3.2.$$

Durch eine Festlegung von  $t'_o$  sind also  $q^*$  und  $\alpha$  ebenfalls bestimmt.

### 3.3. Lösung mit angenommenen Anfangsbedingungen

Mit der Annahme der Anfangsbedingungen  $t'_o$  und  $t'_o$  für  $x = 0$  gibt es drei Lösungsbereiche für Gl. 2-3.2.

a)  $\alpha < \omega_o$  (geringer Kühleffekt)

Für diesen Fall ergibt sich eine phasenverschobene Sinusschwingung mit exponentiell wachsender Amplitude:

$$t-t_K = \frac{1}{\omega_1} \sqrt{t'^2_o - 2\alpha t'_o \Delta t + \omega_o^2 \Delta t^2} e^{\alpha \kappa} \sin(\kappa_o + \omega_1 \kappa) \quad 1-3.3.$$

mit  $\omega_1 \equiv \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2}$ ,  $\kappa_o \equiv \text{arc ctg} \left( \frac{t'_o - \alpha \Delta t}{\omega_1 \Delta t} \right)$ ,  $\Delta t \equiv t'_o - t_K$  2,3,4-3.3.

Die Phasenverschiebung  $\kappa_o$  muss sich in den Grenzen  $0 \leq \kappa_o \leq \pi$  bewegen, d.h. vom vieldeutigen arc ctg muss die erste positive Periode eingesetzt werden.

Williams [28] leitete unter etwas andern Annahmen eine ähnliche Gleichung ab, die er jedoch für den ganzen Anwendungsbereich als gültig betrachtete.

b)  $\omega_o = \alpha$

Dieser Fall tritt ein für

$$q^* = 2 \frac{r}{c_p} \sqrt{\rho \theta \alpha' \lambda_\infty} \quad 5-3.3.$$

Die Lösung für das Temperaturprofil wird nun eine Exponentialfunktion folgender Form:

$$t-t_K = e^{\alpha \kappa} \cdot (\Delta t + \kappa (t'_o - \alpha \Delta t)) \quad 6-3.3.$$

c)  $a > \omega_0$  (starke Kühlung)

Für diesen Fall ist die Lösung eine Differenz von zwei Exponentialfunktionen mit folgender Form

$$t-t_K = \frac{1}{2\omega_2} (t'_0 - \Delta t(a-\omega_2))e^{(a+\omega_2)K} - \frac{1}{2\omega_2} (t'_0 - \Delta t(a+\omega_2))e^{(a-\omega_2)K} \quad 7-3.3.$$

mit  $\omega_2 \equiv \sqrt{a^2 - \omega_0^2}$  8-3.3.

Die von Keilin und Klimenko [36] für den ganzen Bereich angegebene geschlossene Lösung weist einen ähnlichen Aufbau wie Gl. 7 auf.

Alle Berechnungen für die Abbildungen wurden für eine Standardleiterkonfiguration mit folgenden Daten berechnet:  $\theta_D = 335$  K,  $\rho_\theta = 2 \cdot 10^{-6}$   $\Omega$ cm,  $\lambda_\infty = 4$  W/cm K,  $c_p = 6$  J/gK,  $r = 21$  J/g,  $J = 30$  A,  $D = 1$  mm,  $F = 0.78$  mm<sup>2</sup>,  $1/a' = 190$  K,  $t_0 = 0.44$ . Dies entspricht einer Leitung aus handelsüblichem Kupfer, die heliumgekühlt ist. Die gewählte Kaltendtemperatur von  $T_0 = t_0 \cdot \theta_D = 147$  K ist jedoch wesentlich höher als sie bei He wäre. Bei dieser Temperatur erhält aber die Widerstandsfunktion einen Wert von  $f_p = 0.01$ , was einem spezifischen Widerstand von  $\rho_{T_0} = 2 \cdot 10^{-8}$   $\Omega$ cm entspricht. Dieser Wert liegt in der Größenordnung des Restwiderstandes von handelsüblichem Kupfer, wie es auch bei den in Kap. 5 beschriebenen Experimenten verwendet wurde. Eine tiefere Kaltendtemperatur ergäbe negative Werte für den Widerstand. Die für diesen Fall physikalisch nicht mehr sinnvolle Heliumkühlung stellt das qualitative Verhalten der Zuleitungen trotzdem sehr gut dar.

Abb. 1-3.3 zeigt, wie sich das Temperaturprofil und der Wärmestrom längs einer Zuleitung bei vorgegebenen spezifischen Verlusten durch eine Veränderung der Kühlintensität  $\beta$  verschieben.  $q^*$  wurde so gewählt, dass für  $\beta = 0.5$   $a = \omega_0$  wird, d.h. für die Kurven  $\beta < 0.5$  wurde Gl. 1 angewendet, die Kurve  $\beta = 0.5$  ist die Lösung von Gl. 6 und die Kurven  $\beta > 0.5$  entsprechen Gl. 7.

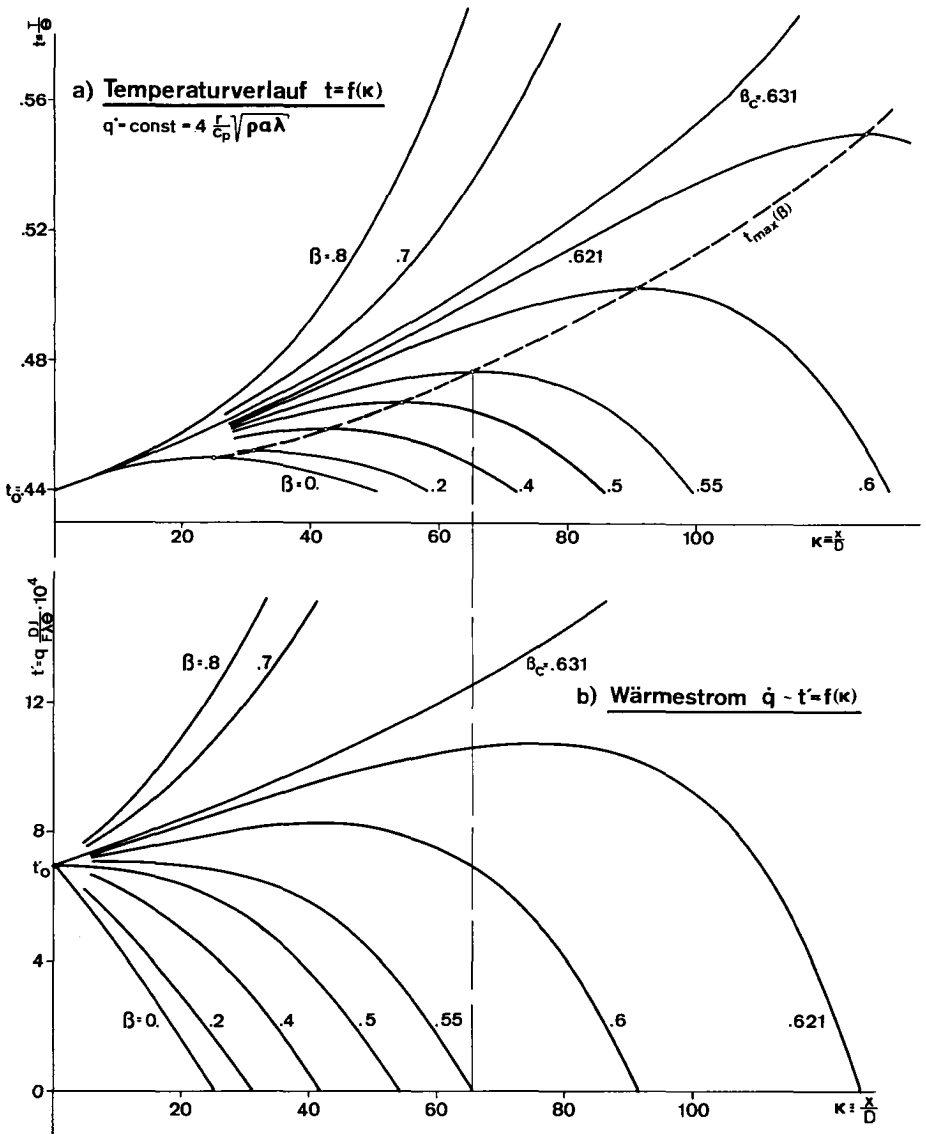


Abb. 1-3.3. a) Temperaturprofile mit konstanten Anfangsbedingungen  $t_0$  und  $t_0'$  und veränderlicher Kühlintensität  $\beta$  für den Standardleiter.  $t_0'$  wurde so gewählt, dass für  $\beta = 0.5$   $\alpha = \omega_0$  wird.  
 b) Wärmeströme, die zu den obigen Temperaturprofilen gehören.



Die ebenfalls eingezeichneten Wärmeströme  $\dot{q}$  lassen erkennen, dass für  $\alpha < \omega_0$ , d.h.  $\beta < 0.5$ , eine stetige Abnahme des Temperaturgradienten bei zunehmender Entfernung vom kalten Ende eintritt. Für  $\alpha = \omega_0$  stellt sich in der Umgebung von  $\kappa \rightarrow 0$  ein konstanter Wärmestrom ein. Im exponentiellen Fall treten im Draht höhere Wärmeströme auf als an seinem kalten Ende, was sich durch den intensiven Kühleffekt durch das ausströmende He-Gas erklären lässt.

Anstelle von  $\kappa$  als Längskoordinate könnten die Temperaturprofile und Wärmeströme über dem Drahtparameter  $\kappa^0$  (Gl. 6-3.2.) als Abszisse aufgetragen werden, wodurch die Darstellung eine erhöhte Aussagekraft erhält.

Es ist ersichtlich, dass die Profile mit  $\beta < \beta_c$  eine maximale Temperatur  $t_{\max}(\beta)$  und einen Wärmestrom der null wird, aufweisen. Für  $\beta \geq \beta_c$  tritt dieses Maximum nicht mehr auf und der Wärmestrom, der für  $\beta = \beta_c$  eine Steigung von  $\alpha \cdot t'_0$  aufweist, nimmt mit zunehmender Temperatur stetig zu.

Die kritische Kühlintensität  $\beta_c$  kann aus Gl. 7 berechnet werden, da diese nur dann ein Maximum durchläuft, wenn der Faktor  $(t'_0 - \Delta t(\alpha - \omega_2))$  der stärkeren Exponentialfunktion negativ ist. Durch Einsetzen von Gl. 12-3.2. und der Definitionsgleichungen von  $\alpha$ ,  $\Delta t$  und  $\omega_2$  folgt dann:

$$\beta_c = \frac{r}{c_p \theta_D t} \left( 1 + p_\theta \alpha' \lambda_\infty \frac{\theta_0^2 \Delta t^2}{q^{*2}} \right) \quad 9-3.3.$$

Das Temperaturprofil für  $\beta \gg \beta_c$  entspricht einer reinen Exponentialfunktion. Physikalisch bedeutet das, dass bei dieser Kühlintensität die Wärmeleitung im Draht nur noch eine untergeordnete Rolle spielt. Wird diese, mit der Ausnahme der Vorgänge am kalten Ende (Berechnung von  $q^*$ ), ganz vernachlässigt so darf  $\delta Q_p^* = \delta Q_a^*$  gesetzt werden, wodurch sich ein Temperaturprofil folgender Form ergibt:

$$t - t_K = t_0 e^{K_2 \kappa} \quad 10-3.3.$$

mit  $K_2 \equiv J \frac{D}{F} \frac{r}{\beta c_p} \frac{P_\theta \alpha'}{q^*}$  11-3.3.

Diese Lösung kann sich jedoch nur bei einer bestimmten Kryostatverlustrate (Wert von  $\beta$ ) einstellen, die so gross sein muss, dass  $\alpha \gg \omega_0$  wird.

Die in Abb. 1 aufgezeichneten Temperaturprofile und Wärmeströme überdecken nur ein Temperaturintervall von 147 K bis 187 K. Dieses Intervall hat keine technische Bedeutung. Es ist jedoch der Zweck von Abb. 1 den Einfluss der Kühlintensität  $\beta$  für gegebene thermische Verluste im Bereich der Lösungen der drei Gleichungen 1,6 und 7 zu diskutieren. Würde das Diagramm bis auf Warmendtemperaturen von 300 K erweitert, so könnte der Einfluss von  $\beta$  nur im Bereich  $\beta > 0,625$  dargestellt werden, da die Kurven für  $\beta < 0,6$  zeichnerisch zusammenfallen.

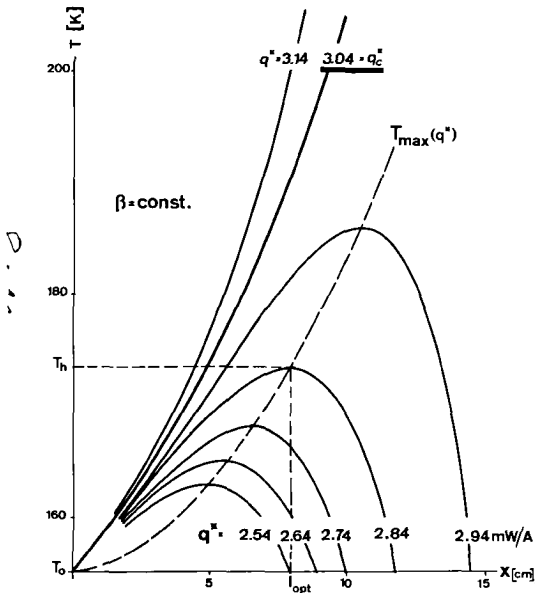


Abb. 1-3.4. Temperaturfeld des Standardleiters in Abhängigkeit der spezifischen Verluste zur Veranschaulichung des Optimalkriteriums.

### 3.4. Optimale Dimensionen eines Leiters

Abb. 1-3.4. zeigt die nach den Gl. 1, 6 und 7 aus Kap. 3.3. berechneten Temperaturprofile des Standardleiters. Die Kühlintensität  $\beta = 0.5$  und die Kaltendtemperatur  $T_o$  wurden als konstant angenommen. Als Parameter treten die spezifischen Verluste  $q^*$  auf, die proportional der zweiten Anfangsbedingung  $t'_o$  der Differentialgleichung sind. Aehnlich der kritischen Kühlintensität  $\beta_c$  kann für diesen Fall durch Umformung von Gl. 9-3.3. eine kritische Verlustrate  $q_c^*$  berechnet werden.

$$q_c^* = -q_o^* + \sqrt{q_o^{*2} + \frac{\theta_D \Delta t^2 \rho_\theta \alpha' \lambda_\infty}{\gamma' - 1}} \quad 1-3.4.$$

mit  $q_o^* \equiv \frac{Q_o^*}{J} \frac{\gamma'}{2(\gamma' - 1)}$  2-3.4.

$$\gamma' \equiv \Delta t \beta \theta_D r/c_p \quad 3-3.4.$$

$q_c^* = q_c^*$  stellt eine Grenze dar, unter welcher alle Temperaturprofile bei einer maximalen Temperatur  $T_{max}(q^*)$  eine horizontale Tangente erreichen.

Aus dieser Erkenntnis kann nun das Optimalkriterium formuliert werden:

Derjenige Leiter, dessen Temperaturgradient auf der Verankerungstemperatur  $T_h$  gleich null ist, erfüllt die Forderung nach minimalen spezifischen Verlusten.

Seine Länge  $l_{opt}$  resp. sein Drahtparameter  $\kappa_{opt}^o$  entspricht den optimalen Dimensionen unter den gewählten Voraussetzungen, da sowohl eine Verlängerung als auch eine Verkürzung eine Vergrößerung der spezifischen Verluste zur Folge hat.

Ein optimaler Leiter muss also auf seiner Verankerungstemperatur weder beheizt (zu kurzer Leiter) noch gekühlt (zu langer Leiter) werden.

Da sich dieses Optimalkriterium auf Vorgänge in der Umgebung der Verankerungstemperatur  $T_h$  bezieht, darf es als allgemein gültig betrachtet werden, denn die getroffenen Annahmen stellen die Stoffwerte in diesem Temperaturbereich gut dar.

Der geometrische Ort von  $T_{max}(q^*)$ , die sog. Optimalkurve, verläuft immer weniger steil als das Temperaturprofil für  $q^* = q_c^*$ . Folgt man der Optimalkurve nach rechts, so nähert sich  $q^*$  asymptotisch dem Maximalwert  $q_c^*$ . Das bedeutet, dass für höhere Werte von  $T_h$  die spezifischen Verluste praktisch unabhängig von der Verankerungstemperatur werden. Für das Beispiel des Standardleiters in Abb. I-3.4. ist dies daraus ersichtlich, dass die Verluste im Temperaturintervall  $186 \text{ K} < T_h < \infty$  nur noch um 3 % zunehmen, wogegen dieselbe Zunahme für  $T_h = 170 \text{ K}$  in einem Intervall von nur 5 K erfolgt.

Abb. II-3.4. zeigt die Optimalfunktionen des Standardleiters für zwei Verankerungstemperaturen. Daraus ist ersichtlich, dass die spezifischen Verluste bei zu kurzen Leitern empfindlich zunehmen. Bei zu langen Drähten hingegen erfolgt nur eine allmähliche Zunahme, die maximal  $q_c^*$  erreichen kann. Diese Abweichungen vom optimalen Wert werden bei zunehmendem Wert von  $t_h$  weniger ausgeprägt.

Für Leiter mit einer sehr hohen Verankerungstemperatur ist für  $\kappa^0 > \kappa_{opt}^0$  praktisch keine Zunahme von  $q^*$  mehr zu bemerken. Aber auch in diesem Falle ist eine optimale Dimensionierung von grosser Wichtigkeit, da bei zunehmender Drahtlänge die maximale Temperatur  $t_{max}$  sehr schnell ansteigt und die Gefahr des Durchbrennens (burnout) oder sonstiger thermischer Beschädigungen besteht. Die am warmen Ende aufzuwendende Kühl- resp. Heizleistung  $\dot{q}_{T_h}$  vergrössert sich ebenfalls sehr ausgeprägt bei zunehmender Verankerungstemperatur.

Zusammenfassend kann aus diesen Betrachtungen geschlossen werden, dass eine optimale Dimensionierung bei hohen  $t_h$  nicht nur wegen der Erreichung minimaler Verluste sondern auch zur Vermeidung des Durchbrennens und der aufwendigen Thermostatierung des warmen Endes erforderlich ist.

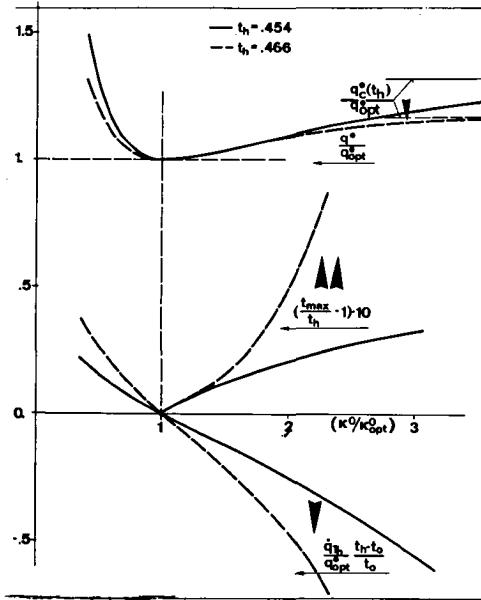


Abb. II-3.4. Verlauf der thermischen Verluste  $q^*$ , der Maximaltemperatur im Leiter  $t_{\max}$  und des Wärmestromes am warmen Ende  $\dot{q}_h$  bei einer Abweichung von den optimalen Dimensionen des Standardleiters. Die Beschriftung der Kurven bezieht sich auf den Ordinatenmassstab. Als Parameter wurden zwei Werte der Warmendtemperatur gewählt. Die Richtung, in der sich die Kurven bei zunehmender Temperatur am warmen Ende verschieben, ist durch Pfeile angedeutet.

### 3.5. Die Lösung des Randwertproblems

In der Praxis wird die Aufgabe der optimalen Leiterdimensionierung meistens in der Form eines Randwertproblems auftreten, indem die Kaltendtemperatur  $T_o$ , die Verankerungstemperatur  $T_h$ , das Leitermaterial und seine Querschnittsgeometrie gegeben sind und der optimale Drahtparameter und die dazugehörigen minimalen spezifischen Verluste gesucht sind. Es ist jedoch analytisch nicht möglich den expliziten Ausdruck für  $\left(\frac{dq^*}{d\kappa^o t_h}\right) = 0$  abzuleiten.

Ausgehend vom Anfangswertproblem kann durch die Berechnungen von  $\left(\frac{dq^*}{dt_h}\right)_{\kappa^o} = 0$  ein Nomogramm erstellt werden, welches eine graphische Lösung der Randwertaufgabe erlaubt. Zu diesem Zwecke müssen die Optimalkurven  $t_{\max}(\beta)$  gemäss Abb. 1-3.3. und  $t_{\max}(q^*)$  entsprechend Abb. 1-3.4. für verschiedene Werte von  $\beta$  und  $q^*$  berechnet werden. Der dazu benötigte optimale Drahtparameter kann durch die Nullsetzung der Ableitungen der Temperaturprofile mit den folgenden Formeln berechnet werden.

a) für  $0 \leq a < \omega_o$  (Gl. 1-3.3.)

$$\kappa_{\text{opt}}^o = \frac{\omega_o}{\omega_1} \left( \pi - \kappa_o - \arctg \frac{\omega_1}{a} \right) \quad 1-3.5.$$

b) für  $a = \omega_o$  (Gl. 6-3.3.)

$$\kappa_{\text{opt}}^o = \frac{t'_o}{a \Delta t - t'_o} \quad 2-3.5.$$

c) für  $a > \omega_o$  und  $\beta < \beta_c$  (Gl. 7-3.3.)

$$\kappa_{\text{opt}}^o = \frac{\omega_o}{2\omega_2} \ln \left( \frac{t'_o (a - \omega_2) - \omega_o^2 \Delta t}{t'_o (a + \omega_2) - \omega_o^2 \Delta t} \right) \quad 3-3.5.$$

d) für  $a > \omega_o$  und  $\beta \geq \beta_c$  gibt es, wie in Kap. 3.3. gezeigt wurde, keine optimale Lösung mehr, da das Argument des Logarithmus in Gl. 3 negativ wird.

Die zum jeweiligen Drahtparameter gehörende Verankerungstemperatur  $T_h$  kann durch Einsetzen in die entsprechenden Gleichungen des Temperaturprofils berechnet werden. Auf diese Weise ergibt sich ein Nomogramm, das auf Abb. 1-3.5. wiedergegeben ist.

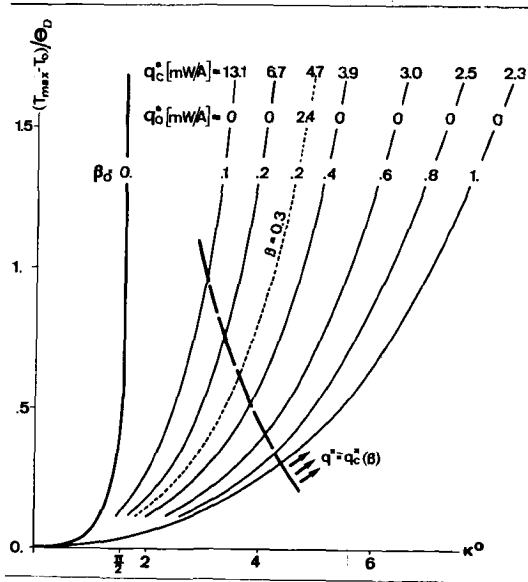


Abb. 1-3.5. Optimalkurven  $T_{max}(\kappa^0)$   $\beta_0 = \text{const.}$  des Standardleiters für verschiedene Werte von  $\beta_0$ . Oberhalb der gestrichelten Grenzkurve sind die thermischen Verluste entlang einer Linie  $\beta_0 = \text{const.}$  konstant und betragen  $q^* = q_c^*(\beta)$ . Für Kryostatverluste  $q_0^* > 0$  ist  $\beta \neq \beta_0$ , was am Beispiel von  $q_0^* = 2.4 \text{ mW/A}$  und  $\beta_0 = 0.2$  dargestellt ist. Diese Kurve entspricht einem Wert der Kühlintensität von  $\beta = 0.3$ .

Bei der numerischen Auswertung zeigt sich, dass die Optimalkurven  $T_{max}(\kappa^0)$  für  $\beta_0 = \text{const.}$  und für  $q^* = \text{const.}$  für Werte von  $t_h - t_0$ , die über der gestrichelten Linie liegen, praktisch zusammenfallen. Auch für kleinere Werte von  $t_h - t_0$  ist die Abweichung im gewählten Massstab so gering, dass nur erstere aufgetragen wurden. Das bedeutet, dass die Verluste entlang einer  $\beta_0 = \text{const.}$ -Linie den konstanten Wert  $q_c^*$  gemäss Gl. 1-3.4. annehmen. Für niedrigere Temperaturdifferenzen  $(T_h - T_0)$  schneiden sich diese beiden Scharen, da die  $q^* = \text{const.}$ -Linien ihren Ursprung auf der Kurve  $\beta_0 = 0$  haben, wogegen die  $\beta = \text{const.}$ -Linien durch den Nullpunkt des Diagrammes gehen.

Der Einfluss der Kryostatverluste  $Q_o^*$  hat, wie schon in Gl. 11-3.2. gezeigt wurde, denselben Einfluss, wie eine Verbesserung der Kühlintensität  $\beta$ . Dies wird in Abb. 1-3.5. durch den Vergleich der beiden Kurven ( $\beta_o = 0,2, q_o^* = 0$ ) und ( $\beta_o = 0,2, q_o^* = 2,4$ ) gezeigt. Während für die erste Kurve  $\beta = \beta_o$  ist, beträgt die Kühlintensität der zweiten Kurve nach Gl. 11-3.2.  $\beta = 0,3$ .

Als wichtigste Erkenntnisse aus diesem Nomogramm können folgende zwei Punkte zusammengefasst werden:

1. Eine Verbesserung der Kühlintensität hat eine ausgesprochene Zunahme des optimalen Drahtparameters bei gleichzeitiger Abnahme der spezifischen Verluste zur Folge.
2. Ueber einer gewissen Grenze bedingt eine weitere Erhöhung der Warmendtemperatur keine Zunahme der spezifischen Verluste mehr. Der optimale Drahtparameter nimmt jedoch weiter zu.

Wie die Ergebnisse der exakten Berechnungen in Kap. 4.6. zeigen werden, besitzen diese beiden Aussagen, obwohl sie anhand eines einfachen Modelles abgeleitet wurden, allgemeine Gültigkeit.

Die beschriebene Darstellung gilt jedoch mit diesen Werten nur für die Annahme von  $\gamma'$  und  $(c_p/r)$  des Standardleiters. Durch die Definition einer reduzierten Temperaturdifferenz  $t^o$  und verallgemeinerter spezifischer Verluste  $q^o$  in der Form

$$t^o \equiv (T_h - T_o) \beta c_p / r \quad 4-3.5.$$

$$q^o \equiv q^* \frac{\beta c_p / r}{\sqrt{\rho_\theta a \lambda_\infty}} \quad 5-3.5.$$

gelingt es, ein allgemeingültiges Nomogramm zur Lösung des Randwertproblems herzustellen. Wie Abb. 11-3.5. zeigt, tritt in dieser Darstellung als einziger Parameter der Wert von  $\gamma'$  auf, der schon anhand von Gl. 3-3.4. definiert wurde.



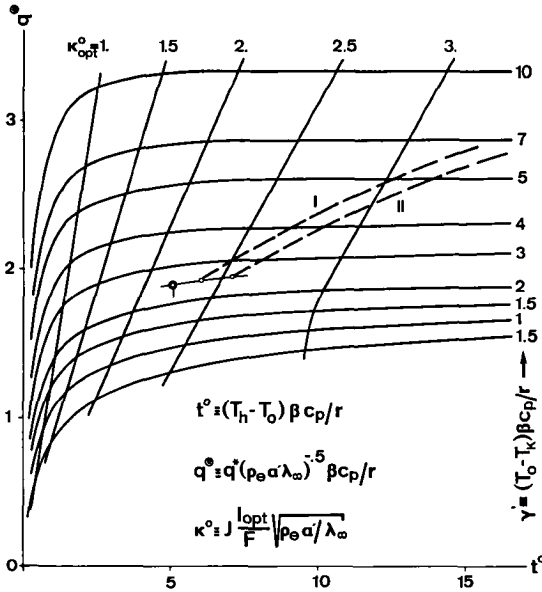


Abb. 11-3.5. Allgemeingültiges Nomogramm zur Lösung des Randwertproblems. Die gestrichelten Betriebscharakteristiken I und II beziehen sich auf das Beispiel der thermischen Stabilisierung in Kap. 3.6.

Aus dem Verlauf der Kurven  $\gamma' = \text{const.}$  ist zu ersehen, dass  $q_Y^{\circ}$  für grössere Werte von  $t^{\circ}$  einen konstanten Wert annimmt. Für  $\gamma' \leq 2$  strebt  $q_Y^{\circ}$  den Wert 2 an.

Für  $\gamma' > 2$  kann dieser asymptotische Wert von  $q^{\circ}$  durch Einsetzen der neuen Variablen  $q^{\circ}$ ,  $t^{\circ}$  und  $\kappa^{\circ}$  in Gl. 7-3.3. berechnet werden.

$$q_{\gamma' > 2}^{\circ} \rightarrow \frac{\gamma'}{\sqrt{\gamma' - 1}} \quad 6-3.5.$$

Je höher der Wert von  $\gamma'$  ist, desto schneller nähert  $q^{\circ}$  den Wert  $\gamma' / \sqrt{\gamma' - 1}$  bei zunehmendem  $t^{\circ}$  an.

In dieser Darstellung erscheinen die Linien für  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ} = \text{const.}$  als lineare Funktion von  $t^{\circ}$ . Wie jedoch schon für  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ} = 3$  ersichtlich ist, biegen diese Kurven bei zunehmenden Werten von  $t^{\circ}$  und  $\gamma'$  in die Vertikale. Das bedeutet, dass  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ}$  im Bereich  $t^{\circ} > 25$  und  $\gamma' > 10$  nur noch eine Funktion von  $t^{\circ}$  (und nichtmehr von  $\gamma'$ ) ist.

Aus diesem Nomogramm können mehrere wichtige Schlüsse gezogen werden:

1. Legierungen, die näherungsweise einen temperaturunabhängigen elektrischen Widerstand haben können gemäss Abb. 1-3.2. durch  $\alpha' \rightarrow 0$  dargestellt werden. In erster Näherung darf  $(T_o - T_K) \rightarrow 1/\alpha'$  gesetzt werden, womit sich die Verluste nach Einsetzen von Gl. 3-3.4. und Gl. 5 in Gl. 6 folgendermassen anschreiben lassen:

$$q^*_{\rho} = \text{const.} = \sqrt{\frac{\rho \lambda}{\beta c_p / r}} \quad 7-3.5.$$

Für  $\beta = 1$  entspricht diese Beziehung dem in Kap. 1.2. erwähnten Ausdruck für die minimalen Verluste nach Fournet und Mailfert [30], der später auch von Donadieu und Dammann [37] erwähnt wird. Ihre Gültigkeit ist jedoch in der beschriebenen Art und Weise einzuschränken.

2. Metalle mit einem Widerstandsverhältnis  $\rho_{\theta} / \rho_o \leq 50$  lassen sich näherungsweise gut durch  $\rho \sim T$  und  $\lambda = \lambda_{\infty}$  beschreiben. In diesem Falle wird  $1/\alpha' = \theta_D$  und  $T_K = 0$ . Für  $\gamma' \leq 2$ , d.h. für

$$\beta \leq \beta^* \equiv 2r/c_p T_o \quad 8-3.5.$$

lautet somit die Beziehung für die minimalen Verluste für  $t^{\circ} > 25$   $q^* = 2$  oder:

$$q^*_{\rho \sim T} = \frac{2r}{\beta c_p} \sqrt{\frac{\rho_{\theta} \lambda_{\infty}}{\theta_D}} = \frac{2r}{\beta c_p} \sqrt{L_{\theta}} \quad 11-3.5.$$

und der Drahtparameter nimmt den Wert  $\pi/2$  an.

In Abb. III-3.5. ist der prinzipielle Verlauf der Verluste in Abhängigkeit von  $\beta$  unter Berücksichtigung hoher Kryostatverluste für die 3 hauptsächlich zur Diskussion stehenden Kühlmedien He, H<sub>2</sub> und N<sub>2</sub> entsprechend den in Tabelle 1 zusammengestellten Werten in doppelt logarithmischem Masstab aufgezeichnet. Physikalisch können diese drei Bereiche folgendermassen gedeutet werden: Für den thermisch isolierten Leiter spielen die Stoffwerte des Kühlmediums keine Rolle. Entsprechend Gl. II-3.5. werden die Verluste proportional der Temperaturdifferenz  $T_h - T_o$ . Bei geringen Kühlintensitäten ist die Wärmekapazität  $\beta M^* c_p$

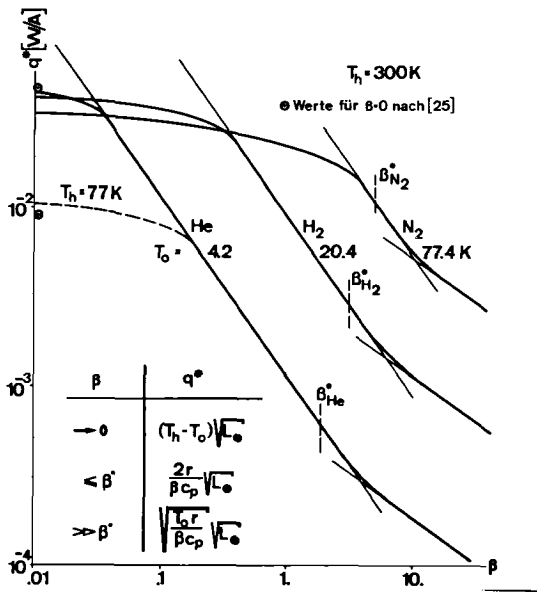


Abb. III-3.5. Einfluss der Kühlintensität auf die Verluste in verschiedenen Kühlmedien für  $\lambda = \text{const.}$  und  $\rho \sim T$

so klein, dass sie das Verhalten eines Leiters nur unmerklich beeinflussen kann. Sobald diese jedoch eine Grössenordnung erreicht, die mit der Joule'schen Wärmeproduktion vergleichbar wird, bewirkt sie eine merkliche Abnahme der Verluste, was durch den steilabfallenden Mittelbereich dargestellt wird. Wird

Tabelle 1 Stoffwerte der üblichen Tieftemperaturkühlflüssigkeiten

Gas	$T_0$	$c_p$	$r$	$c_p/r$	$\beta^*$	$\frac{2}{c_p/r} \sqrt{L_\theta}$	$\sqrt{\frac{T_0}{c_p/r}} \sqrt{L_\theta}$
N <sub>2</sub>	77.3	1.04	199.6	$5.21 \cdot 10^{-3}$	4.94	$55.4 \cdot 10^{-3}$	$17.6 \cdot 10^{-3}$
H <sub>2</sub>	20.4	14.21	445.8	$3.19 \cdot 10^{-2}$	3.07	$9.08 \cdot 10^{-3}$	$3.67 \cdot 10^{-3}$
He	4.2	5.2	20.9	$2.49 \cdot 10^{-1}$	1.92	$1.17 \cdot 10^{-3}$	$5.98 \cdot 10^{-4}$
	K	J/gK	J/g	K <sup>-1</sup>	-	W/A	W/A

die gesamte Joule'sche Wärme vom Kühlgas aufgenommen, so wirkt sich eine zusätzliche Kühlung nur noch auf den Längsleitungsvorgang aus, was eine wesentlich langsamere Abnahme der Verluste bei gleichzeitig empfindlicher Zunahme des Drahtparameters zur Folge hat (3. Bereich).

Die drei erwähnten Bereiche werden auf diese Weise gut erkennbar und es ist auch klar ersichtlich, in welchen Größenordnungen sich der Aufwand für eine Erhöhung von  $\beta$  lohnt. Bei He ist es sinnvoll, einen idealen Wärmeaustausch ohne zusätzliche Kryostatverluste ( $\beta' = 1, M_0^* = 0$ ) anzustreben, da dieser ganze Bereich, auch für Werte von  $T_h = 77$  K, auf dem steil abfallenden Ast der Charakteristik liegt. Bei H<sub>2</sub> bringt dieselbe Massnahme gegenüber den Verlusten des isolierten Leiters nur eine geringe, bei N<sub>2</sub> überhaupt keine Verbesserung, da der Steilabfall erst bei höheren Werten von  $\beta$  einsetzt.

### 3.6. Optimale Bedingungen periodisch stromführender Leiter

In der Praxis der Tieftemperaturtechnik gibt es viele Beispiele von elektrischen Zuleitungen, die nur zeitweise Strom führen. Bei Experimenten der adiabaten Entmagnetisierung z.B. muss der Hauptmagnet während der Phase der Magnetisierung der paramagnetischen Salzpille mit Strom von einer externen Quelle versorgt werden. Während der anschliessenden Entmagnetisierungsphase und der Aufwärmzeit der Pille wird der Strom ausgeschaltet und bleibt für längere Zeit unterbrochen. Dadurch stellt sich im Leiter ein anderes Temperaturprofil ein und die Verluste in der stromlosen Phase sind durch die Wärmeleitung im Leiter für optimale Bedingungen während der Stromphase dimensioniert, so ergeben sich relativ hohe Leitungsverluste während der stromlosen Phase, da das Verhältnis  $l/F$  vergleichsweise kleine Werte hat. Die Leitungsverluste, die im Allgemeinen bei optimalen Dimensionen etwas weniger als die Hälfte der totalen Verluste  $q^* \cdot J$  während der Betriebsphase betragen, können durch eine Vergrößerung von  $l/F$  reduziert werden. Wie mit Abb. II-3.4. gezeigt wurde, erhöhen sich damit die spezifischen Verluste während des Betriebes. Es ist daher naheliegend, mit den Zykluszeiten  $\tau_\lambda$  (= Dauer der stromlosen Phase) und  $\tau_J$  (= Dauer der strombelasteten Phase) eine zu minimalisierende Zielfunktion aufzustellen. Da die zu betrachtenden Schaltperioden gross gegenüber der thermischen Ausgleichszeit  $\tau_r = \rho \cdot c \cdot D^2/\lambda$  (Grössenordnung Sekunde) sind, können die transitischen Vorgänge zwischen den beiden Gleichgewichtszuständen vernachlässigt werden. Auf den ersten Blick sieht die Zielfunktion  $\delta$  mit diesen Annahmen folgendermassen aus:

$$\delta = \tau_\lambda Q_\lambda^* \left(\frac{l}{F}\right) + \tau_J \cdot q^* \left(\frac{l}{F}\right) \cdot J \rightarrow \text{Min.} \quad 1-3.6.$$

Die Leitungsverluste  $Q_\lambda^*$ , bei deren Berechnung die Kühlwirkung des verdampften Kältemittels ebenfalls berücksichtigt werden muss, die also  $\leq (T_h - T_o) \frac{F}{l} \bar{\lambda}$  sind, stellen den mit wachsendem  $l/F$  abnehmenden Term der Zielfunktion dar. Um ein Minimum bestimmen zu können, muss  $q^* \left(\frac{l}{F}\right)$  mit  $l/F$  zunehmen. Dies

trifft jedoch nur bei sehr niedrigen Werten von  $T_h$  zu. Im technisch interessanten Bereich ist  $q^* \cong q_C^*$  und wird somit unabhängig von  $(\frac{1}{F})$ . Sofern die Auswertung der obigen Zielfunktion überhaupt Resultate ergibt, ist der berechnete Drahtparameter soviel grösser als der für den Strombetrieb optimale, dass die zu erwartenden Maximaltemperaturen  $T_{max}$  unweigerlich zu burnout führen. Diese erste Lösungsmöglichkeit ist also unbrauchbar.

Es gibt jedoch zwei weitere Wege, die das eingangs beschriebene Problem auf ganz unterschiedliche Weise zu lösen vermögen. Sie seien thermische und dynamische Stabilisierung genannt.

Die thermische Stabilisierung, die zuerst behandelt werden soll, ist eine praktische Erweiterung der zuvor beschriebenen Methode. Wie Abb. 1-3.6. schematisch zeigt, ist eine Vergrößerung des Drahtparameters über den für den Strombetrieb optimalen Wert  $\kappa_{opt}^o$  (Profil 1) unter gleichzeitiger Nichtüberschreitung einer maximalen Temperatur  $t_{Grenz}$  nur durch die Vergrößerung der Kühlintensität

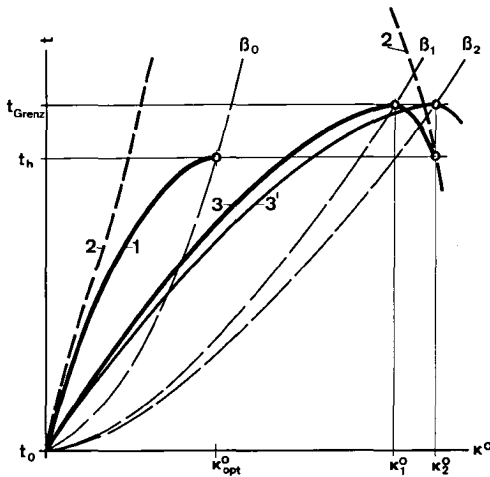


Abb. 1-3.6. Schematische Temperaturprofile der thermischen Stabilisierung  
 Profil 1 gehört zu  $\tau_\lambda = 0$ . Profil 2 stellt sich für den zyklusoptimalen Drahtparameter  $\kappa_2^o$  ein ( $\beta = \beta_0$ ). Für  $\beta = \beta_1$  stellt das gesuchte zyklusoptimale Profil 3 dar, welches  $t_{Grenz}$  nicht überschreitet. Profil 3' ist der Berechnung zugänglich, da  $\beta_2$  durch den Schnittpunkt von  $t_{Grenz}$  und  $\kappa_2^o$  bestimmt wird.

möglich ( $\beta_0 \rightarrow \beta_1$ ). Dies kann durch eine zusätzliche Wärmequelle im Kühlbad, die nur während der Stromphase betrieben wird, erreicht werden. Ein im Stromkreis in Serie geschalteter ohm'scher Widerstand wäre eine Realisierungsmöglichkeit. Durch diese Massnahme werden zwar die eigentlichen spezifischen Verluste  $q^*$  verringert, hingegen fallen die zusätzlichen Verluste durch die Wärmequelle derart ins Gewicht, dass die totalen Verluste ( $q^* + q_0^*$ ) während der Betriebsphase mit zunehmendem Wert von  $\frac{\kappa^0}{\kappa_{opt}^0}$  viel stärker anwachsen als die Leitungsverluste bei derselben Tendenz abnehmen. Diese Methode, die qualitativ schon von London [51] in einer Bemerkung vorgeschlagen wurde, ergibt eine neue Zielfunktion, die unter Benützung der eingeführten Grundgrössen folgendermassen lautet:

$$\delta = \tau_\lambda \frac{1}{\kappa^0} \ln(1 + t^\circ \beta_0) + \tau_J \left( \frac{\beta_0}{\beta} \cdot q^*(\kappa^0) + \left( \frac{\beta}{\beta_0} - 1 \right) q_0^*(\beta_0) \right)$$

2-3.6.

In dieser Beziehung sind  $t^\circ \beta_0$  und  $q_0^*(\beta_0)$  Werte, die sich auf den optimalen Drahtparameter  $\kappa_{opt}^0$  beziehen.  $\beta$  und  $q^*$  sind Funktionen von  $\kappa^0$ . Der effektive Wert von  $\beta$ , der in die Rechnung einbezogen werden müsste, ist in Abb. 1-3.6. mit  $\beta_1$  angeschrieben. Die Abhängigkeit  $\beta_1(\kappa^0)$  ist jedoch nicht bekannt, da bei einem gegebenen Wert von  $\kappa^0 = \kappa_2^0$  der Wert von  $\kappa_1^0$ , der zusammen mit  $T_{Grenz}$  für die Bestimmung von  $\beta_1$  erforderlich ist, nicht vorausgesagt werden kann. In erster Näherung kann deshalb  $\beta_1$  durch  $\beta_2$  ( $T_{Grenz} \cdot \kappa_2^0$ ) ersetzt werden. Für  $T_h = T_{Grenz}$  (keine Ueberhitzung zugelassen) ist die Rechnung genau. Bei  $T_{Grenz} > T_h$  wirkt sich der entstehende Fehler so aus, dass die effektiv auftretende Maximaltemperatur  $T_{Grenz\ eff.} < T_{Grenz}$  wird. Das ergibt eine Sicherheitsreserve und erlaubt gleichzeitig,  $T_{Grenz}$  grosszügig anzusetzen. Die Abhängigkeit von  $\beta$  und  $q^*$  von  $\kappa^0$  kann aus der Betriebscharakteristik in  $t^\circ - q^*$  Diagramm (Abb. 11-3.5.) herausgelesen werden. Der eingezeichnete Betriebszustand ( $t^\circ = 5$ ,  $\gamma' = 2.5$ ) ergibt die Werte von  $q_0^*(\beta_0) = 1.89$ ,  $\kappa_0^0 = 2.18$ . Die zwei Betriebscharakteristiken gehören zu

verschiedenen zugelassenen Ueberhitzungswerten  $(T_{\text{Grenz}} - T_o) / (T_h - T_o) = 1.2$  (I) resp. 1.4 (II). Abb. II-3.6. zeigt die resultierenden Optimalwerte für  $\kappa^o$  und die dazugehörenden, über eine Zyklusdauer gemittelten, totalen Verluste  $\bar{q}^e$  in Abhängigkeit des Leitungsphasenanteils für die beiden Betriebscharakteristiken I und II. Als Vergleich sind die mittleren Verluste ohne Zyklusoptimierung dünn gestrichelt angegeben.

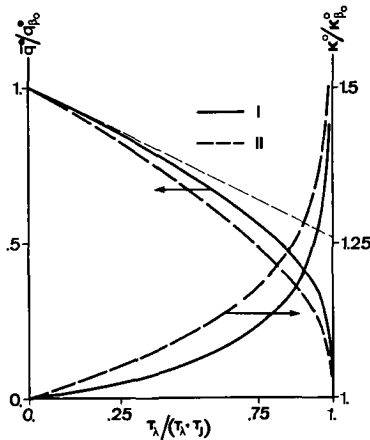


Abb. II-3.6. Mittlere Verluste und zyklusoptimaler Drahtparameter in Abhängigkeit der relativen Zyklusdauer für die zwei Betriebscharakteristiken I und II aus Abb. II-3.5.

Die Abnahme der Verluste im zyklusoptimalen Fall erfolgt nicht  $\sim \tau_j$ , was für den Idealfall anzustreben wäre. Es zeigt sich, dass das Verfahren der thermischen Stabilisierung nur für relativ kurze Dauern von  $\tau_j$  günstige Resultate verspricht. In diesen Fällen werden auch die Drahtparameter entsprechend grösser. Eine Erhöhung von  $T_{\text{Grenz}}$  bringt nur eine unwesentliche Verminderung der Verluste bei gleichzeitiger Zunahme des Drahtparameters.



Die dynamische Stabilisierung basiert auf einem ganz andern Prinzip als die thermische. Es gibt daher auch keine direkte Vergleichsmöglichkeit der beiden Methoden. Die Grundidee besteht darin, dass jedem Leiterelement ein thermischer Speicher  $\Delta m \cdot c$  angefügt wird, welcher seinerseits nicht vom Strom durchflossen wird (also keine Joule'sche Wärme erzeugt). Während der stromführenden Phase wird ein Teil der entstehenden Wärme gespeichert, wodurch sich die Temperatur des Speichers und somit auch das Temperaturprofil des Leiters verändert. Das verdampfte Kältemittel reduziert die Temperaturen bis am Ende der stromlosen Phase wieder auf ihren Ausgangswert.

Die exakte analytische Erfassung dieses Vorganges ergibt ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen zweiten Grades, das einer numerischen Lösungsmethode schwer zugänglich ist. Durch Vernachlässigung des Längsleitungs Vorganges im Leiter und der Temperaturdifferenzen im thermischen Speicher ergibt sich folgendes, numerisch lösbares Gleichungssystem, bestehend aus Aufwärmungs- und Abkühlungsgleichung:

$$\begin{aligned} \Delta m \cdot c (T_{\lambda} - T_J) &= J^2 \rho \frac{\Delta x}{F} \tau_J - \beta_J \bar{q}^* \cdot J \frac{c_p}{r} \left( \frac{dT}{dx} \right) \Delta x \cdot \tau_J \\ &= \beta_{\lambda} \bar{Q}_{\lambda}^* \frac{c_p}{r} \left( \frac{dT}{dx} \right) \Delta x \tau_{\lambda} \end{aligned} \quad 3-3.6.$$

$(T_{\lambda} - T_J)$  bedeutet die örtliche maximale Temperaturschwankung des Speichers, die eine vorgeschriebene Funktion der Längskoordinate ist.  $\left( \frac{dT}{dx} \right)$  ist der zeitliche Mittelwert des Temperaturgradienten in der Mitte des betrachteten Leiterelementes  $\Delta x$ .  $\left( \frac{dT}{dx} \right) \Delta x$  stellt somit die mittlere Erwärmung des in idealem Wärmekontakt mit dem Leiter stehenden Gasmengenstrom  $\beta_0 M_T^* = \beta_J M^* = \beta_J q^* J \frac{c_p}{r}$  dar. Um dieses System zu lösen, muss eine Annahme für die beiden extremen Temperaturprofile  $T_{\lambda}(x)$  am Ende der Leitungsphase und  $T_J(x)$  am Ende der Stromphase getroffen werden. Dadurch sind auch die Extremwerte der Verluste, nämlich  $Q_{\lambda}^* \min.$  am Ende der Leitungsphase und  $q_{\max}^* \cdot J$  am Ende der Stromphase gegeben. In erster Näherung kann für den Aufwärm- wie

den Abkühlvorgang der arithmetische Mittelwert der Extremwerte in die Gleichungen eingesetzt werden.

Für dieses Problem ist es nicht mehr sinnvoll, mit den in Kap. 3.2. getroffenen Ansätzen für  $\rho$  und  $\lambda$  zu arbeiten. Es muss insofern eine Abweichung von den für dieses Kapitel getroffenen Annahmen gemacht werden, als dass bekannte Messergebnisse für die Stoffwerte  $\rho(T)$  [61],  $\lambda(T)$  [61] und  $c(T)$  [62] für Cu mit einem Restwiderstand von  $\rho_0 = 10^{-8} \Omega\text{cm}$  in die Rechnung einbezogen werden.

Für die in beiden Betriebszuständen durch die Veränderung der Kryostatverluste frei wählbaren Kühlintensitäten kann

$$\beta_J = k_J \cdot \beta_0 \quad \text{resp.} \quad \beta_\lambda = k_\lambda \cdot \beta_0 \quad 4-3.6.$$

gesetzt werden. Für die Berechnung muss ein Wert von  $k_J$  angenommen werden und der Wert von  $k_\lambda$  ergibt sich dann aus der Abkühlgleichung.

Mit der speziellen Annahme, dass die Temperaturschwankung des Speichers, ähnlich wie die Temperaturdifferenz optimal ausgelegter Wärmeaustauscher, proportional seiner Temperatur sei, dass also

$$T_J - T_\lambda = k \frac{T_\lambda - T_0}{T_{h\lambda} - T_0} \quad 5-3.6.$$

gelte, wobei  $k$  [K] die maximale Temperaturschwankung am warmen Ende ( $T_{hJ} - T_{h\lambda}$ ) darstellt, muss für die mittleren Wärmeströme folgende Grösse eingesetzt werden:

$$\bar{q}^* \cdot J \cong \bar{Q}_\lambda^* = Q_{\lambda \min}^* + \frac{k}{2} \frac{F}{l} \lambda_0 \quad 6-3.6.$$

Somit lautet die Aufwärmgleichung folgendermassen:

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} \frac{1}{T_J} = \frac{J^2 \rho \frac{1}{F} - k_J \beta_o \frac{c_p}{r} \overline{\left(\frac{dT}{dx}\right)} \left(Q_{\lambda \min}^* + \frac{k}{2} \frac{F \lambda_o}{T}\right)}{c k (T_{\lambda} - T_o) / (T_{h\lambda} - T_o)} = f(x) \quad 7-3.6.$$

Die Stoffwerte müssen für die Temperatur  $(T_J + T_{\lambda})/2$  eingesetzt werden. Die Auflösung der Abkühlgleichung ergibt folgende Beziehung:

$$k_{\lambda} = \frac{T_J}{T_{\lambda}} \left( J^2 \frac{\rho}{\left(\frac{dT}{dx}\right) \beta_o F \frac{c_p}{r} \left(Q_{\lambda \min}^* + \frac{k}{2} \lambda_o\right)} - k_J \right) \geq 1 \quad 8-3.6.$$

Um die erforderliche Kühlintensität realisieren zu können, muss  $k_{\lambda}$  konstant sein. Dies trifft nur für  $\rho \sim c_p \overline{dT/dx}$  zu. Für  $T > 50$  K kann der Widerstand als lineare Funktion der Temperatur angenommen werden. Deshalb muss das Temperaturprofil in diesem Bereich einer Exponentialfunktion entsprechen, was für den gekühlten Leiter auch genau zutrifft.

In Abb. III-3.7. ist ein Rechenbeispiel für die dynamische Stabilisierung aufgeführt. Mit den beschriebenen Stoffwerten wurde Gl. 7 für verschiedene Werte der Kühlintensität  $k_J = \beta_J / \beta_o$  für das aufgezeichnete mittlere Temperaturprofil mit  $k = 50$  K ausgewertet. Die Wärmekapazität des Leiters selbst ist noch in  $\Delta m$  enthalten und muss bei einer Dimensionierung der Speicher von dem aufgetragenen Wert abgezogen werden. Die verschiedenen Kurven zeigen deutlich, dass im Gebiete der tiefen Temperaturen die Stabilisierungsmassen wegen der sehr geringen spezifischen Wärme so gross sein müssten, dass eine praktische Ausführung unmöglich wird. Durch die Anwendung eines Speicher-materials höherer spezifischer Wärme, d.h. tieferer Debye Temperatur (z.B. Blei  $\theta_D = 85$  K) gelingt es, dieses Problem zu lösen. Da der Betrag der Joule'schen Wärme wegen des geringen elektrischen Widerstandes relativ klein ist, werden allfällige Fehlbeträge in der Speicherkapazität durch die in der Rechnung nicht berücksichtigte Längswärmeleitung ausgeglichen. Genau derselbe

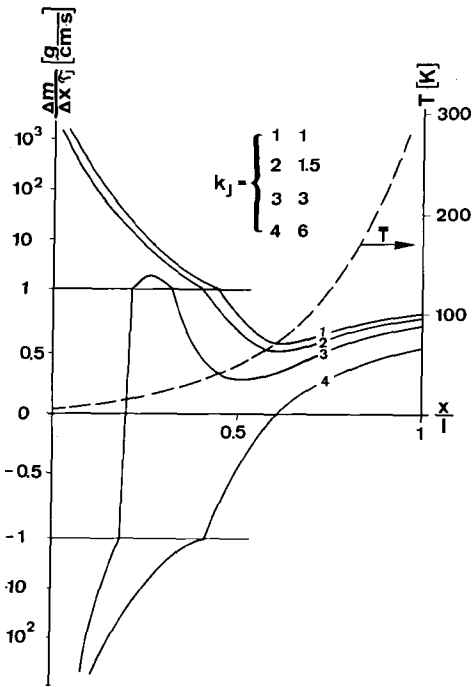


Abb. III-3.6. Beispiel der dynamischen Stabilisierung mit folgenden Ausgangswerten:  $l = 200 \text{ cm}$ ,  $J = 2000 \text{ A}$ ,  $\beta_0 = 0.7$ ,  $F = .5 \text{ cm}^2$ ,  $T_0 = 4.2 \text{ (He)}$ ,  $T_h = 300 \text{ K}$ ,  $k = 50 \text{ K}$ , Material: Cu, Für das angenommene mittlere Temperaturprofil  $\bar{T}$  wurden die Stabilisierungsmassen für verschiedene Werte von  $k_J$  nach Gl. 7-3.6. berechnet. Wegen des Nulldurchganges und der hohen Werte für  $x \rightarrow 0$  mussten zwei Massstabsbereiche gewählt werden.

Mechanismus tritt ein für jene Werte von  $k_J$ , die bei tiefen Temperaturen negative "Speicher" verlangen, bei denen also die Wärmekapazität des Leiters selbst schon mehr als ausreichend ist. Die Speicherdichte  $\Delta m / \Delta x$  durchläuft ein Minimum, das durch die starke Zunahme der spezifischen Wärme gegenüber dem elektrischen Widerstand zu erklären ist. Der Anstieg auf einen sehr hohen positiven, resp. der Abfall auf einen negativen Wert von  $\Delta m / \Delta x$  im Bereich tiefer Temperaturen ist durch die spezifischen Annahmen für die Temperaturprofile bedingt. Ein Wert von  $k_J = 2.1$  ergäbe eine mit dem angenommenen Temperaturprofil realisierbare Lösung.

Ein eigentliches Optimalkriterium für die Dimensionierung kann für den Fall der dynamischen Stabilisierung nicht formuliert werden, da der Realisierbarkeit von thermischen Speichern praktische Grenzen gesetzt sind. Eine Minimierung der Verluste bei einem gegebenen Drahtparameter anhand von Gl. 8 ergibt, dass es günstig ist, für  $\tau_\lambda > \tau_J$  einen Wert von  $k_\lambda = 1$ , für  $\tau_\lambda < \tau_J$  einen Wert von  $k_J = 1$  anzustreben.

Die Methode der dynamischen Stabilisierung eignet sich nicht nur für die Dimensionierung periodisch stromführender Leiter. Sie kann, wie auch die thermische Stabilisierung, zur Beherrschung verschiedener Stromstärken ( $J_1 \neq J_2 \neq 0$ ) benutzt werden. Ausserdem bietet die Methode beim kontinuierlichen Strombetrieb eine Sicherheit gegen burnout [43] für alle Fälle, bei denen mit einem Ausfall der Kühlung oder mit Ueberschreitungen des Nennstromes (Entladestrom eines Magneten) gerechnet werden muss. Gegenüber des sonst üblichen Vorgehens der Unterdimensionierung des Drahtparameters bietet diese Konstruktionsart den Vorteil, dass die spezifischen Verluste, abgesehen vom Abkühlvorgang, nicht vergrössert werden.

Zum Anwendungsbereich der beiden Stabilisierungsmethoden kann gesagt werden, dass sich die dynamische ausschliesslich für kürzere Perioden eignet. Hingegen ist sie, abgesehen von den Extrembereichen, für alle Werte des Verhältnisses  $\tau_\lambda / \tau_j$  erfolgreich anwendbar. Als Nachteil muss gewertet werden, dass sie der exakten Berechnung nicht zugänglich ist, also in jenen Fällen nicht angewendet werden sollte, die eine präzise Berechnung ohne vorhergehende Experimente verlangen. Die thermische Stabilisierung hingegen kann analytisch gut erfasst werden, wodurch eine exakte Dimensionierung möglich wird. Für einen Prozess erfolgreich angewendet werden kann sie hingegen nur bei relativ kurzen Stromzeiten und langen Perioden.

### 3.7. Eine mögliche Instabilität

Aus Abb. 1-3.5. ist ersichtlich, dass die Steigung der Optimalkurven  $\frac{d}{dx} (T_{\max}(\kappa^\circ)_\beta)$  immer positiv ist. In einem solchen Temperaturfeld können sich die möglichen Temperaturprofile eines Leiters mit gegebener Geometrie ( $\beta = \text{const.}$ ) nicht schneiden, da jeder Punkt nur einen möglichen Temperaturverlauf angehören kann. Unter den getroffenen Annahmen ist also eine Instabilität ausgeschlossen.

Die numerischen Berechnungen des exakteren Modells im folgenden Kapitel ergeben, dass die Steigung der Optimalkurve, speziell im Bereiche tieferer Temperaturen, negativ werden kann. Daraus muss geschlossen werden, dass das Temperaturfeld nicht mehr eindeutig definiert ist. Es gibt Bereiche, in welchen sich verschiedene Temperaturverläufe überschneiden, d.h. ein Leiter gegebener Länge und festgehaltener Verankerungstemperatur kann verschiedene Temperaturprofile, die natürlich auch mit unterschiedlichen spezifischen Verlusten verbunden sind, einnehmen. Es ist sogar denkbar, dass durch den optimalen Punkt eines bestimmten Leiters ein weiterer möglicher Temperaturverlauf mit wesentlich höheren Verlusten geht.

Mit den Voraussetzungen für dieses Kapitel kann diese Erscheinung nicht erklärt werden. Nimmt man jedoch für die Berechnung zwei Wärmeleitfähigkeiten  $\lambda_1 > \lambda_2$  an und eine bestimmte Intervallgrenze  $t^*$ , die so definiert ist, dass für  $t < t^*$   $\lambda = \lambda_1$  und  $t > t^*$   $\lambda = \lambda_2$  ist, so ergibt sich eine Optimalkurve, wie sie in Abb. 1-3.7. aufgezeichnet ist. Für  $t < t^*$  folgt diese der Optimalkurve für  $\lambda = \lambda_1$ , für  $t \gg t^*$  derjenigen für  $\lambda = \lambda_2$ . Im Zwischenbereich ergeben sich negative Steigungen. Die eingezeichneten Temperaturverläufe 1, 2, 3 geben mögliche Schnittpunkte an.

Nach diesen Ausführungen ist es einleuchtend, dass für zwei gegebene Temperaturen  $T_o$  und  $T_h$  und einen festen Drahtparameter  $\kappa_{opt}^o$  zwei verschiedene Temperaturprofile unter speziellen Umständen möglich sind. Am Beispiel von Abb. 1-3.7. wären dies das zum optimalen Drahtparameter gehörende Minimalverlustprofil 1 und das Profil 3, das mit wesentlich höheren Verlusten und einer entsprechend erhöhten Maximaltemperatur verbunden ist. Wie in Kap. 5.3. beschrieben wird, kann gezeigt werden, dass diese beiden Profile tatsächlich bestehen. Es stellt sich nun die wichtige Frage, unter welchen Umständen sich welches Profil einstellt und wie stabil dieses ist, d.h. ob überhaupt von einer Instabilität gesprochen werden darf, oder ob einfach ein bistabiler Zustand vorliege. Randbemerkungen in der Literatur [35] und neueste Ergebnisse von Messungen an leicht unterdimensionierten Hochstromzuleitungen sehr hoher

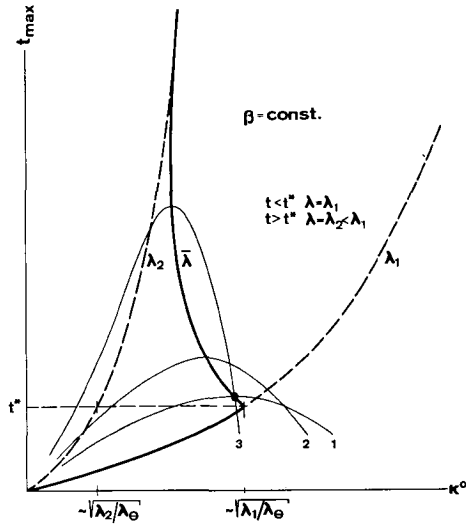


Abb. 1-3.7. Optimalkurve für ein Zweigruppenmodell der thermischen Leitfähigkeit. Im Bereich der negativen Steigungen von  $t_{\max}(\bar{\lambda})$  ist das Temperaturfeld eines Leiters nicht mehr eindeutig definiert, wie durch die möglichen, sich schneidenden Temperaturprofile 1,2,3 angedeutet ist.

Reinheit [67] weisen darauf hin, dass es Bereiche gibt, die zur Instabilität neigen. Es soll hier der Versuch unternommen werden, die physikalischen Gründe dafür zusammenzustellen.

Zu diesem Zwecke muss die Differentialgleichung 1-2. unter Berücksichtigung des instationären vierten Terms gelöst werden. Dies ist jedoch nicht ohne weiteres möglich und zudem ist es fraglich, ob eine Instabilität auf diese Weise nachgewiesen werden könnte. Eine sprunghafte Instabilität kann aber offenbar nicht bestehen, da die Wärmeleitzahl  $c/\lambda v$  im ganzen Temperaturbereich einen endlichen Wert aufweist. Eine Methode, die sich in der Technik zur Abschätzung instationärer Wärmeleitungsvorgänge sehr bewährt hat ist das graphische Lösungsverfahren nach Schmidt [66], das entsprechend einem

Vorschlag von Traupel [68] auch für Fälle mit kontinuierlichen Wärmequellen angewendet werden kann. Wie Bachmann [69] zeigte, ist dieses Problem für konstante Stoffwerte numerisch lösbar. Im betrachteten Temperaturbereich sind jedoch die Stoffwerte  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $c$  alles andere als konstant. Deshalb ist eine graphische oder numerische Lösung sehr aufwendig und zudem mit grossen Fehlern behaftet. Einige qualitative Hinweise erlaubt dieses Verfahren aber trotzdem.

Der normalerweise konstante örtliche Integrationsschritt gehorcht für ein gegebenes Zeitintervall  $\Delta T$  folgender Beziehung:

$$\Delta x = \sqrt{2 \Delta T \cdot v} \cdot \sqrt{\lambda / c} \quad 1-3.7.$$

Wie Abb. II-3.7. für zwei Werte des Restwiderstandes am Beispiel von Cu mit den in Kap. 3.6. benützten, gemessenen Stoffwerten zeigt, ist  $\Delta x$  für  $T < 50$  K eine ausgeprägte Funktion der Temperatur und des Restwiderstandes.

Die für den Abschnitt  $\Delta x$  pro Zeiteinheit  $\Delta T$  sich ergebende Temperaturerhöhung setzt sich, ohne Berücksichtigung des Leitungsvorganges, aus der Differenz zwischen Joule'scher Wärmeproduktion und Abkühlwirkung des Gases entsprechend folgender Beziehung zusammen:

$$\Delta T = \Delta T v \frac{J^2}{F^2} \frac{\rho}{c} - \Delta T \beta q^* \frac{J}{F} \frac{c_p}{r} \frac{v}{c} \left( \frac{dT}{dx} \right) \quad 2-3.7.$$

Aus Abb. III-3.7. ist ersichtlich, dass diese Funktion für  $\beta = 0$  über mehrere Grössenordnungen variiert und in der Umgebung von  $T \approx 50$  K ein Minimum durchläuft. Der Bereich  $T < 50$  K ist durch die starke Abnahme der spezifischen Wärme im Nenner dominiert, wogegen das restwiderstandsunabhängige Anwachsen von  $\Delta T$  für  $T > 50$  K durch die Zunahme des elektrischen Widerstandes erklärt werden kann.



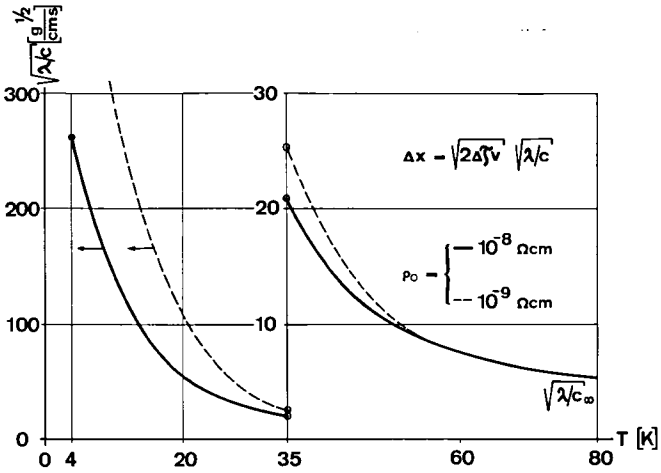


Abb. II-3.7. Oertlicher Integrationsschnitt zur graphischen Lösung der instationären Wärmeleitungsgleichung als Funktion der Temperatur. Stoffwerte nach [61,62] von Cu

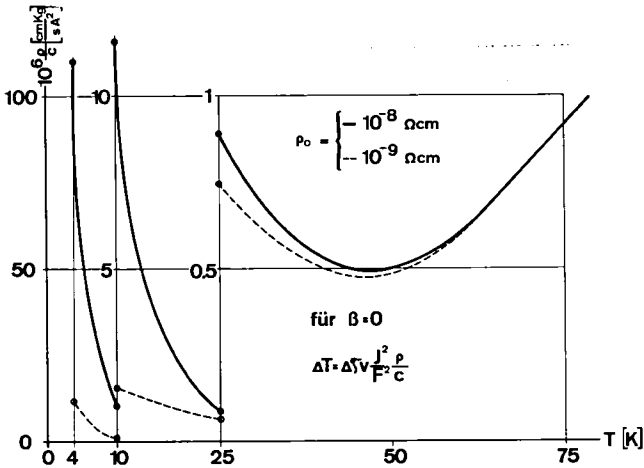


Abb. III-3.7. Oertliche Temperaturerhöhung zur graphischen Lösung der instationären Wärmeleitungsgleichung für den ungekühlten Leiter. Stoffwerte nach [61,62] von Cu

Aufgrund dieses Minimums, das wie ein Trichter für den Längswärmestrom wirkt, ist es nun denkbar, dass durch eine Störung (Stromzunahme, Ausfall der Kühlung) ein "Temperaturbuckel" von der tiefen Temperatur her in den Leiter hineinwächst, der durch die Zunahme des elektrischen Widerstandes bei gleichzeitiger Abnahme der thermischen Leitfähigkeit soweit anwächst, bis das neue Gleichgewicht zwischen Längsleitung und Wärmeproduktion gefunden wird. Eine Störung in der umgekehrten Richtung kann den Abbau dieses Höckers verursachen. Die Grösse und Art der Störung und das Temperaturverhalten von  $\Delta x$  und  $\Delta T$  müssen ganz spezielle Bedingungen erfüllen, damit die geschilderte Situation eintreten kann.

Die Experimente, die in Kap. 5.2. beschrieben werden, sollen weitere Auskunft über dieses Problem erteilen.

### 3.8. Zusammengesetzte Zuleitungen (composite leads)

Zusammengesetzte Zuleitungen enthalten neben dem normalen Leitermaterial (Cu, Al, Be) auch noch einen Supraleiter. Unter einer gewissen Temperatur  $T_c^1$ , die für  $J = 0$  gleich der Sprungtemperatur des verwendeten Supraleiters ist, fliesst der Strom verlustlos. Um zu verhindern, dass sich der Draht an der Uebergangsstelle aufwärmt und auf diese Weise die Supraleitfähigkeit zerstört, muss die Kontinuität des Wärmestromes gesichert werden. Dies erreicht man dadurch, dass man den Normalleiter als Wärmebrücke in möglichst gutem Kontakt mit dem verdampfenden Gas ebenfalls bis ins Kühlbad weiter führt. Die in Frage kommenden Supraleiter eignen sich hiefür im Allgemeinen nur schlecht, da ihre Wärmeleitfähigkeit im betrachteten Temperaturintervall um Grössenordnungen schlechter ist als diejenige der Normalleiter.

Eine einfache Bilanzbetrachtung, wie sie Abb. 1-3.8. darstellt, ergibt folgende Beziehung für die Reduktion der Verluste:

$$\frac{q^*}{q_s^*} = \gamma \left( 1 + \beta \frac{c_p}{r} (T_c - T_0) \right) \quad 1-3.8.$$

Abb. 1-3.8. Bilanzgebiet eines zusammengesetzten Leiters zur Ableitung von Gl. 1-3.8. Der Strom  $J$  fließt verlustlos durch den Supraleiter, wogegen der Wärmestrom durch die gekühlte Wärmebrücke geleitet wird.

Der Reduktionsfaktor  $\gamma \leq 1$  hängt von den Verlusten ohne Supraleiter  $q^*$  und der Sprungtemperatur  $T_c$  ab. Die obige Beziehung bestätigt auch die grobe Ueberlegung, dass zusammengesetzte Leiter, die schlecht gekühlt sind ( $\beta \ll 1$ ) gegenüber der konventionellen Bauweise keine Vorteile bringen.

Der Drahtparameter  $\kappa^0$ , der definitionsgemäss mit der Querschnittsfläche des Wärmebrücke auch für zusammengesetzte Leiter angewendet werden kann, nimmt gegenüber der konventionellen Bauart etwas ab. Es muss also eine Neu-dimensionierung vorgenommen werden.

Theoretisch stellt sich bei zusammengesetzten Leitern ein Problem. Um eine maximale Reduktion der Verluste zu bewirken ist es erforderlich, dass der elektrische Strom nicht erst bei einer Temperatur  $T < T_c$  in den Supraleiter übergeht. Es ist denkbar, dass dieser Uebergang mit einem zusätzlichen Widerstand verbunden ist, vor allem dann, wenn mangelhafte Kontaktstellen zwischen Normal- und Supraleiter bestehen. Die genauen Berechnungen in Kap. 4.6.5. geben Auskunft über den Einfluss eines Uebergangswiderstandes  $\rho_c$  in einem Temperaturintervall  $(T_c - T'_c)$ .

### 3.9. Variabler Querschnitt des Leiters

Gemäss den Ausführungen in den Kap. 3.2. und 3.3. kann nicht nur der optimale Drahtparameter, sondern auch die Funktion  $\kappa^{\circ}(T)$  berechnet werden. Um die Dimensionierung einzuhalten muss diese Funktion, die das Verhältnis  $l/F$  enthält, an jeder Stelle genau erfüllt werden. Eine Variation des Querschnittes bedingt eine entsprechende Veränderung der Länge im betrachteten Abschnitt. Auf die Verluste wirkt es sich nicht aus, ob eine lange dicke oder eine kurze dünne Zuleitung verwendet wurde. Mathematisch können diese Aussagen durch eine Umschreibung der Differentialgleichung 1-2. auf die Variable  $\kappa^{\circ}$  anstelle von  $x$  bewiesen werden. Der Wärmestrom, ausgedrückt durch  $\kappa^{\circ}$ , wird unabhängig von  $F$ , wodurch bei der Ableitung des Wärmestromes nach Längskoordinate das Glied  $dF/dx$  nicht mehr erscheint.

Diese Annahmen stimmen allerdings nur, wenn das in Kap. 3.1. aufgestellte Wärmeübergangskriterium eingehalten werden kann. Da im Bereiche höherer Temperaturen die Wärmestromdichten und somit auch die Temperaturgradienten gross werden, sind die für den realen Wärmeaustausch zur Verfügung stehenden Uebertragungsflächen für die Einhaltung des Kriteriums oft zu klein. Durch eine Querschnittsvergrösserung um den Faktor  $c$  mit entsprechender Verlängerung ergibt sich bei ähnlicher Geometrie eine Zunahme der Wärmeübertragungsfläche, die proportional  $c^{3/2}$  ist. In den meisten Fällen wird jedoch die Aehnlichkeit der Geometrie nicht eingehalten, wodurch eine Flächenvergrösserung  $\sim c^2$  möglich wird.

Eine Zuleitung mit grösserem Querschnitt bei höheren Temperaturen ist ausserdem weniger empfindlich gegen Ueberlastungen, da die entstehenden Temperaturgradienten kleiner werden und gleichzeitig die thermisch grössere Masse die Zeit für den Uebergang ähnlich wie bei der dynamischen Stabilisierung verlängert.

## 4. LOESUNG UNTER REALEN BEDINGUNGEN

### 4.1. Das Verhalten der Stoffwerte von reinen Metallen

Die Annahme für die Stoffwerte in Kap. 3.2. stimmt mit dem tatsächlichen Verhalten nur in sehr begrenzten Temperaturintervallen überein. Vor allem im Bereiche tiefer Temperaturen ist eine weitgehendere Analyse des Transportmechanismus von Wärme und elektrischer Energie notwendig, um genauere Annahmen für den spezifischen Widerstand  $\rho$  und die thermische Leitfähigkeit  $\lambda$  treffen zu können.

Die Elektronentheorie der Metalle gibt nähere Auskunft über diesen Problemkreis [54]. Deshalb seien hier kurz die wesentlichsten Grundlagen zusammengetragen. Die elektrische Ladung wird durch ein Metall, welches sich in einem elektrischen Feld befindet, durch die freien Elektronen, das sogenannte Elektronengas transportiert. In Au, Ag, Cu, Na besteht dieses Elektronengas aus ungefähr einem freien Elektron pro Gitteratom. Für die Teilnahme am Leitungsprozess werden von der Quantenphysik gewisse Anforderungen an das Energieniveau der Elektronen gestellt, so dass nur ein bestimmter Bruchteil der freien Elektronen einen eigentlichen Beitrag leisten. Könnten sich diese Elektronen ungestört durch das Gitter bewegen, so käme das einem Widerstand von  $\rho = 0$  gleich. Die Bewegung der Elektronen wird aber durch zwei, von einander weitgehend unabhängigen Mechanismen gehemmt. Sie wird an den Phononen, den thermischen Schwingungen der Gitteratome, sowie an den chemischen und physikalischen Kristallverunreinigungen gestreut. Der erste Widerstandsanteil  $\rho_{th}$  ist temperaturabhängig und wird null für  $T \rightarrow 0$ . Aus experimentellen Erfahrungen und theoretischen Ueberlegungen [52] ist bekannt, dass  $\rho_{th}$  für Temperaturen, die grösser als eine charakteristische Temperatur  $\theta_R$  sind, linear mit der absoluten Temperatur  $T$  oder dem Verhältnis  $T/\theta_R$  verläuft. Für  $T \ll \theta_R$  wurde eine Abhängigkeit von  $(T/\theta_R)^5$  festgestellt. Die Grüneisen-temperatur  $\theta_R$  entspricht für die Grosszahl der Metalle der Debye Temperatur

$\theta_D$ <sup>7)</sup>, die in der Theorie der spezifischen Wärme eines Metalles auftritt und für alle Metalle bekannt ist. Grüneisen und Bloch [55] entwickelten eine Beziehung, die den obigen Tatsachen Rechnung trägt und in welcher die reduzierte Temperatur  $T/\theta_D$  als einzige Variable vorkommt.

$$\rho_{th} = 4.225 \cdot \rho_{\theta} \left(\frac{T}{\theta_D}\right)^5 \cdot \Gamma_5(\theta_D/T) \quad 1-4.1.$$

$$\text{mit } \Gamma_n(x) \equiv \int_0^x \frac{z^n dz}{(e^z - 1)(1 - e^{-z})} \quad 1b-4.1.$$

Diese Grüneisen-Bloch Beziehung in der  $\rho_{\theta}$  für den Widerstand bei  $T = \theta_D$  steht, wurde vielfach verifiziert und gilt für diejenigen Metalle, die hier in Frage kommen, als die zutreffendste. Sie ist aber nicht in der Lage, Phänomene in Legierungen und speziellen Metallen (z.B. Widerstandsminimum) darzustellen.

Der temperaturunabhängige Anteil des Widerstandes  $\rho_0$ , verhindert, dass der elektrische Widerstand bei tiefen Temperaturen null wird. Der sogenannte Restwiderstand ist ein Mass für die Reinheit des Metalles, wobei sich diese Reinheit sowohl auf chemische, wie auch physikalische Verunreinigungen, d.h. auf den "unreinen" Gitteraufbau, wie er z.B. durch Kaltverformungen entsteht, bezieht. Das Verhältnis ( $\rho_0 / \rho_{273}$ ) wird oft zur Charakterisierung reiner Metalle benützt und kann Werte von  $10^{-2}$  für kommerzielles Elektrolytkupfer bis  $5 \cdot 10^{-5}$  für hochreines Indium annehmen [56]. Der Restwiderstand ist eine Materialkonstante, die ohne grossen experimentellen Aufwand durch Potentialmessungen an einer in flüssiges Helium eingetauchten Probe bestimmt werden kann.

Der totale Widerstand setzt sich gemäss der Aussage der Mattiess'schen Regel additiv aus dem thermischen und dem Restwiderstand zusammen:

---

7) Eine Ausnahme ist Beryllium mit  $\theta_D = 1160$  K und  $\theta_R = 625$  K.

$$\rho = \rho_o + \rho_{th} \quad 2-4.1.$$

Der Wärmetransportmechanismus von Metallen setzt sich aus zwei Komponenten zusammen. Die Phononenleitfähigkeit  $\lambda_{ph}$ , der einzige Wärmetransportvorgang von elektrischen Isolatoren, wird durch die Elektronenleitfähigkeit  $\lambda_e$  stark in den Hintergrund gedrängt. Erstere ist bei reinen Metallen sogar vernachlässigbar klein, da sie bei ausgeprägter Elektronenleitfähigkeit durch die wirkungsvolle Streuung der Phononen an den Elektronen noch verringert wird. Wie schon bei der Berechnung von  $\rho$  erwähnt wurde, nehmen auch beim thermischen Leitungsmechanismus nur eine begrenzte Zahl der freien Elektronen teil.

Die Berechnung von  $\lambda_e$  kann entsprechend dem Vorgehen der kinetischen Gastheorie geschehen, die aussagt, dass  $\lambda_e \sim C_e \Lambda \bar{w}$  sei. Es bedeuten  $C_e$  die spezifische Wärme der Elektronen pro Raumeinheit, die proportional der absoluten Temperatur ist,  $\Lambda$  die mittlere freie Weglänge, die von den physikalischen und chemischen Verunreinigungen sowie von den temperaturabhängigen Streuungen an den Phononen abhängt und  $\bar{w}$  die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen. Aus dieser Betrachtung können die prinzipiellen Bereiche im Verhalten von  $\lambda_e$  erklärt werden.

Bei sehr tiefen Temperaturen sind  $\Lambda$  und  $\bar{w}$  konstant, was eine lineare Zunahme von  $\lambda_e$  ergibt, deren Steigung über die Grösse von  $\Lambda$  von der Reinheit des Metalles abhängt. Dieser Anteil des thermischen Widerstandes  $\frac{1}{\lambda_e} \sim \frac{1}{T}$  entspricht dem Restwiderstand  $\rho_o$  des elektrischen Transportmechanismus. Für Temperaturen von  $T \approx \theta_D/10$  macht sich der Einfluss der Phononen auf  $\Lambda$  bemerkbar, und zwar entsprechend der Zunahme der spezifischen Wärme des Gitters mit einem Faktor von  $T^{-3}$ . Zusammen mit  $C_e \sim T$  ergibt das eine Abhängigkeit in diesem Bereich von  $1/\lambda_e \sim T^2$ . Für Temperaturen  $T > \theta_D$  nähert  $\lambda$  einen konstanten Wert an oder nimmt gegen höhere Temperaturen noch ganz wenig zu.

Analog der Matthiess'schen Regel für den elektrischen Widerstand kann auch für den thermischen Widerstand ein additives Gesetz postuliert werden.

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_{th}} \quad 3-4.1.$$

Beide Summanden sind jedoch temperaturabhängig und einzeln nur schwer experimentell bestimmbar. Wilson [57] gibt eine Beziehung für  $\frac{1}{\lambda_{th}}$ , die allen oben aufgeführten Tatsachen Rechnung trägt und die als die exakteste universelle Gleichung betrachtet wird.

$$\frac{1}{\lambda_{th}} = \frac{1}{\lambda_{\infty}} \frac{6}{\pi^2} \zeta' \left(\frac{T}{\theta_D}\right)^2 \left( \Gamma_5 \left(\frac{\theta_D}{T}\right) + \frac{1}{\zeta} \left(\frac{T}{\theta_D}\right)^2 \left(\frac{2\pi^2}{3} \Gamma_5 \left(\frac{\theta_D}{T}\right) - \frac{1}{3} \Gamma_7 \left(\frac{\theta_D}{T}\right)\right) \right) \equiv \frac{1}{\lambda_{\infty}} F_2(t) \quad 4-4.1.$$

Neben der reduzierten Temperatur tritt der Faktor  $\zeta'$  als weitere Variable auf. Damit wird der Beitrag der Phononenleitfähigkeit  $\lambda_{ph}$  berücksichtigt. Für  $\lambda_{ph} = 0$  wird  $\zeta' = 0$ , wogegen bei  $\zeta' = 0.5$  alle Phononenmechanismen als wirksam betrachtet werden.  $\zeta'$  kann aus Widerstandsmessungen bestimmt werden [58] oder aus Gl. 4 mit einem bekannten Wert von  $\rho_{th}(T)$  berechnet werden.

Die Funktionen  $\Gamma_5(1/t)$  und  $\Gamma_7(1/t)$  sind durch Gl. 1b definiert. Ihre Werte können durch eine Integration von  $T = \infty$  ( $1/t = 0$ ) bis  $T$  berechnet werden. Die Resultate dieser nach der numerischen Integrationsmethode von Runge-Kutta [59] durchgeführten schrittweisen Integration sind in Tabelle 2 zusammengestellt.



Tabelle 2 Werte der Funktionen  $\Gamma_5(z)$  und  $\Gamma_7(z)$  im interessierenden Bereich  $0 \leq \frac{1}{z} = \frac{T}{\theta_D} \leq 1.2$  entsprechend Gl. 1b-4.1.

$\frac{1}{z} = \frac{T}{\theta_D}$	$\Gamma_5(z)$	$\Gamma_7(z)$	$\frac{1}{z} = \frac{T}{\theta_D}$	$\Gamma_5(z)$	$\Gamma_7(z)$
0	124.43	5082.1	0.20	50.263	705.57
0.05	124.42	5077.3	0.22	40.209	477.18
0.06	124.33	5050.1	0.24	32.682	334.95
0.07	123.87	4943.7	0.26	26.629	237.68
0.08	122.54	4713.4	0.28	21.453	166.43
0.09	120.36	4413.0	0.30	17.642	121.05
0.10	116.38	3972.1	0.35	10.932	56.247
0.11	110.94	3481.4	0.40	7.0363	28.070
0.12	104.32	2986.5	0.45	4.6913	14.923
0.13	98.003	2584.7	0.50	3.2291	8.3695
0.14	90.250	2159.3	0.60	1.6598	3.0150
0.15	82.408	1788.5	0.70	0.93152	1.2485
0.16	75.823	1514.9	0.80	0.56028	0.57706
0.17	68.470	1244.1	0.90	0.35579	0.28913
0.18	61.590	1020.1	1.00	0.23623	0.15506
0.19	56.120	860.20			

#### 4.2. Die Gültigkeit des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes

Da in reinen Metallen der elektrische und der thermische Leitungsmechanismus fast ausschliesslich von den freien Elektronen abhängt, ist es naheliegend, nach einer Gesetzmässigkeit zu suchen, die den Zusammenhang beider Vorgänge erfasst. Das Wiedemann-Franz'sche Gesetz erklärt auf Grund eines einfachen Leitungsmodelles die Verknüpfung von  $\rho$ ,  $\lambda$  und T in folgender Weise:

$$\frac{\rho \cdot \lambda}{T} = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k_B}{e} \right)^2 \equiv L_0 = 2.445 \cdot 10^{-8} \text{ W}\Omega/\text{K}^2 \quad 1-4.2.$$

$k_B$  steht für die Boltzmannkonstante;  $e$  für die Elementarladung und  $L_0$  wird Lorenz-Konstante <sup>8)</sup> genannt.

Bevor aber dieses Gesetz angewendet wird, muss sein Gültigkeitsbereich genau abgegrenzt werden. Die Auswertung zahlreicher Messungen hat ergeben, dass die Beziehung bei sehr tiefen Temperaturen allgemeine Gültigkeit hat, d.h. dass sie den Zusammenhang zwischen  $\rho_0$  und  $\lambda_e = \lambda_0$  genau beschreibt. Dasselbe gilt für den Bereich hoher Temperaturen. Im Zwischenbereich wird eine ausgeprägte Temperaturabhängigkeit von  $\rho \cdot \lambda / T = L(T)$  festgestellt. Dies rührt daher, dass die Relaxationszeiten  $\tau_r = \Lambda / \bar{w}$  für den thermischen und elektrischen Leitungsvorgang nicht identisch sind. Das Verhältnis  $L/L_0 = f(T)$  ist immer kleiner eins und für eine feste Temperatur stark von  $\rho_0$  abhängig. Die Gleichungen 1- und 4-4.1. enthalten diese Abhängigkeit, wodurch die theoretische Funktion  $L/L_0$  berechnet werden kann.

Die einfachen Annahmen in Kap. 3 zur Lösung der Differentialgleichung bedeuten nichts anderes als eine Festsetzung der Temperaturabhängigkeit von  $L$  nach der Form

$$L = \rho_\theta \cdot \alpha' \cdot \lambda_\infty - \frac{\rho_\theta \lambda_\infty}{T} (\alpha' \theta_D^{-1}) \quad 2-4.2.$$

Im Bereiche tiefer Temperaturen stimmen diese Ergebnisse mit den tatsächlichen Verläufen gar nicht mehr überein, für höhere Temperaturen kann mit einer geschickten Wahl von  $\rho_\theta$ ,  $\alpha'$  und  $\lambda_\infty$  von einer mittleren Lorenzkonstanten gesprochen werden, die über ein gewisses Intervall mit der effektiven mittleren Lorenzkonstante des Metalls übereinstimmt.

---

8) In der Literatur begegnet man oft der Bezeichnung Lorenzzahl. Da  $L$  aber eine theoretisch ableitbare, dimensionsbehaftete Naturkonstante, wie etwa die Boltzmannkonstante  $k_B$  ist, soll sie auch als solche bezeichnet werden.

#### 4.3. Annahmen für die Widerstands- und Leitfähigkeitsfunktion

Nach den Ausführungen der zwei vorhergehenden Kapitel scheint es sinnvoll, ein Leitermaterial durch seinen Restwiderstand  $\rho_o$ , seinen Zimmertemperaturwiderstand  $\rho_{273}$  und seine Leitfähigkeit  $\lambda_{273}$  zu charakterisieren. Somit nimmt die Widerstandsfunktion  $f_\rho(t)$  folgende Form an:

$$f_\rho \equiv \frac{\rho}{\rho_\theta} = \frac{\rho_o}{\rho_\theta} + \left(1 - \frac{\rho_o}{\rho_\theta}\right) 4.225 t^5 \cdot \Gamma_5(1/t) \quad 1-4.3.$$

$\rho_\theta$  kann durch Auflösung dieser Gleichung mit den Werten  $\rho = \rho_{273}$  und  $t = 273/\theta_D$  berechnet werden.

Unter Benützung des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes ergeben sich für  $\lambda_o$  und  $\lambda_\infty$  folgende Ausdrücke:

$$\lambda_o = t \frac{L_o \theta_D}{\rho_o} \quad 2-4.3.$$

$$\lambda_\infty = .947 \frac{L_o \theta_D}{\rho_\theta - \rho_o} \quad 3-4.3.$$

Unter Benützung von Gl. 2, 3 und 4-4-1. ergibt sich für  $f_\lambda$  folgende Beziehung

$$f_\lambda \equiv \frac{\lambda}{\lambda_\infty} = \left(\frac{\lambda_\infty}{\lambda_o} + \frac{\lambda_\infty}{\lambda_{th}}\right)^{-1} = \left(\frac{.947}{t} \frac{\rho_o}{\rho_\theta - \rho_o} + F_2(t)\right)^{-1} \quad 4-4.3.$$

Der Einfluss verschiedener Werte von  $(\rho_\theta/\rho_o)$  auf  $\lambda_o(t)$   $\rho_\theta/\rho_o = \text{const.}$  und die Abhängigkeit von  $\lambda_{th}(t)$   $\zeta' = \text{const.}$  bei verschiedenen Werten des Phononenbeitrages  $\zeta'$  sind in Abb. 1-4.3. aufgezeichnet. Der sehr stark abfallende Verlauf von  $\lambda_\infty/\lambda_o = f(t)$  ist vor allem im Bereiche tiefer Temperaturen eine deutliche Funktion des Restwiderstandsverhältnisses. Die Abhängigkeit  $F_2(t, \zeta')$  zeigt ein Ueberschwingen über den Wert 1 für Werte von  $\zeta' > 0.75$ , was Werte von  $\lambda$  ergibt, die kleiner als  $\lambda_\infty$  sind. Das dadurch bedingte leichte

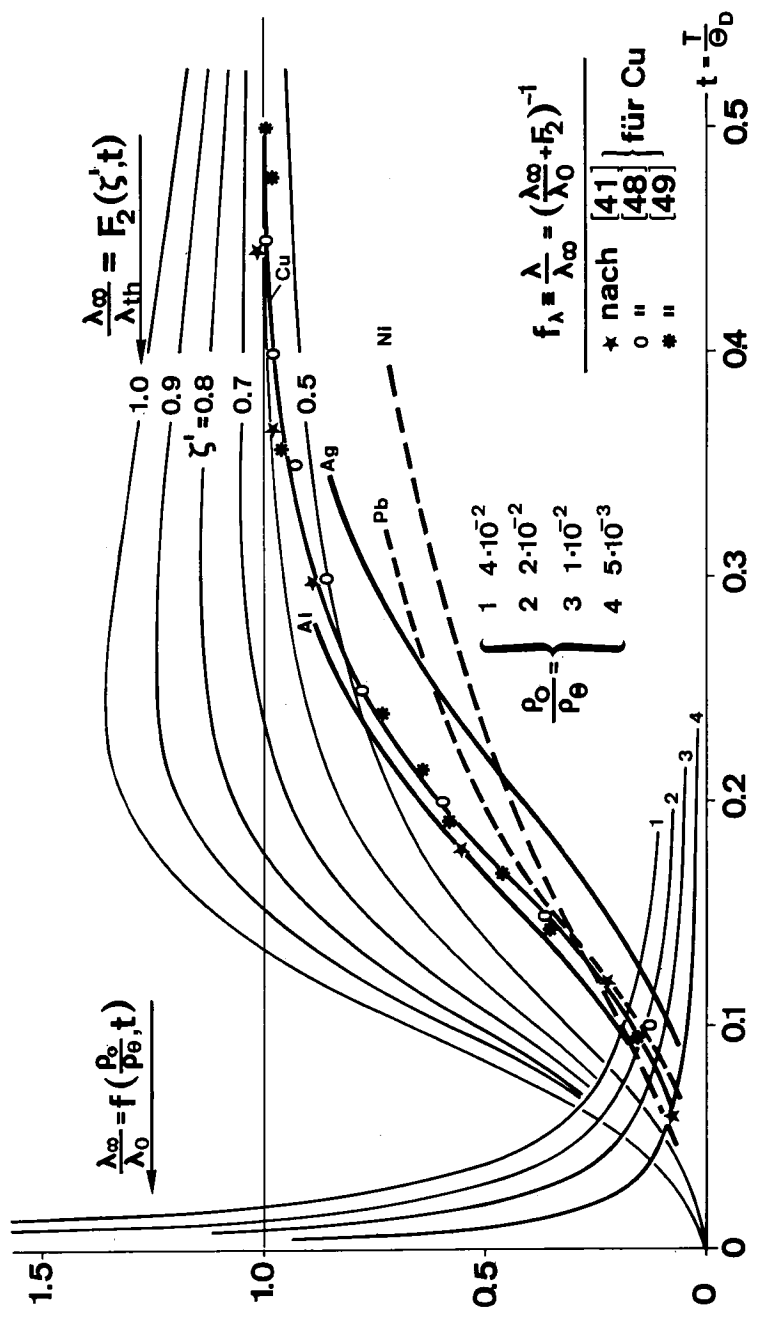


Abb. 1-4.3. Komponenten des thermischen Widerstandes gemäss Gl. 4-4.1. und 2-4.3. im Vergleich mit  $\lambda_{\infty}/\lambda_{th}$  von Cu, Al [49], Ag [49], Ni [50] und Pb [50]

Ansteigen von  $\lambda$  auch noch im Bereiche höherer Temperaturen kann bei einigen Metallen (z.B. Na, Nb) beobachtet werden, ist aber eher eine Seltenheit.

Der Wert von  $\zeta'$  kann durch elektrische Widerstandsmessungen bestimmt werden. In der Literatur sind solche Werte zu finden [54]. Bei diesem Vorgehen darf jedoch der Wert von  $\lambda_{\infty}$  nicht nach Gl. 3 berechnet werden. Es muss ein Wert  $\lambda_T = \lambda_{th}$  mit  $T \gg \theta_D$  bekannt sein und durch die Auflösung von Gl. 4 gelingt es, den richtigen Wert für  $\lambda_{\infty}$  zu berechnen. Steht kein Wert von  $\zeta'$  zur Verfügung, so muss unter genauer Kenntnis des Restwiderstandes Gl. 3-4.1. nach  $\zeta'$  aufgelöst werden, wobei der einzusetzende Wert  $\lambda_T$  bei einer Temperatur von  $T \leq 0.2 \theta_D$  gemessen werden muss und  $\lambda_{\infty}$  gemäss Gl. 3 eingesetzt werden kann.

Auf diese Weise ist es nun möglich den Verlauf von  $f_p$  und  $f_{\lambda}$  aus den drei leicht messbaren Grössen  $\lambda_T$ ,  $\rho_0$  und  $\rho_T$  zu bestimmen.

Um die Anwendbarkeit der getroffenen Annahmen überprüfen zu können, muss ein Vergleich mit einer repräsentativen Anzahl von Messergebnissen gezogen werden. Die Werte von  $\lambda$  von sehr reinen Cu Proben, die in der Literatur [41,48,49] angegeben sind oder selbst gemessen wurden, sind ebenfalls in Abb. 1-4.3. eingezeichnet. Sie stimmen keineswegs mit dem Verlauf von  $1/\lambda_{th}$  für den empfohlenen Wert von  $\zeta' = 0.715$  [54] überein. Die Theorie von Wilson ergibt zu geringe Werte von  $\lambda_{th}$ , wogegen das Wiedemann-Franz Gesetz im Bereiche des Restwiderstandes eine gute Uebereinstimmung des linearen Anstieges von  $\lambda$  mit publizierten Resultaten ergibt. Die beträchtliche Abweichung im Bereiche des Abfalles von  $\lambda_{th}$  kann durch eine Transformation des Abszissenmasstabes von  $F_2$  grossenteils behoben werden. Durch eine Streckung entsprechend der Beziehung

$$\frac{\lambda_{\infty}}{\lambda_{eff}}(t) = F_2 (c_{\lambda} \cdot t) \quad 5-4.3.$$

gelingt es, eine befriedigende Uebereinstimmung zwischen der Theorie und Messungen zu erreichen. Der Transformationsfaktor  $c_\lambda$  muss durch einen Vergleich zwischen dem naheliegendsten Wert von  $F_2(\zeta')$  und Messungen an hochreinen Proben für jedes Metall bestimmt werden. Es zeigt sich, dass  $c_\lambda$  für ein gegebenes Metall nicht ganz konstant ist, sondern leicht von der Temperatur abhängt. Durch die Benützung eines mittleren Wertes entsteht ein Fehler, der bei tiefen Temperaturen zu geringe, bei hohen Temperaturen etwas zu hohe Werte von  $\lambda$  ergibt. In Tabelle 3 sind die geeignetsten Werte von  $c_\lambda$  und  $\zeta'$ , sowie der maximale relative Fehler in positiver und negativer Richtung mit der dazugehörigen Temperatur und weiteren Stoffwerten der betrachteten Metalle zusammengestellt. Durch die geeignete Wahl von  $c_\lambda$  wird der mittlere Fehler vernachlässigbar klein.

Die auf diese Weise zusammengestellte Berechnungsmethode von  $\lambda$  ergibt — vor allem bei sehr reinen Proben — im Bereiche von  $\lambda_{\max}$  die grössten absoluten Fehler. Wie in Kap. 5.1.2. ausgeführt wird, ist es jedoch experimentell recht schwierig, dieses Maximum genau zu bestimmen, so dass vermutet werden muss, dass ein Teil des Fehlers auf das Konto allgemein unsicherer Messwerte gebucht werden darf.

#### 4.4. Der Wärmeaustausch zwischen Gas und Leiter

Der Wärmeaustausch zwischen dem ausströmenden Gas und dem Leiter wurde durch die Annahme in Kap. 2 nur mangelhaft dargestellt. Durch die in Kap. 3.9. beschriebene Querschnittsvariation kann es zwar gelingen das Kriterium der konstanten Kühlintensität im Bereiche der hohen Temperaturen einzuhalten. An der wichtigen Stelle, wo der Wärmestrom ins Kühlbad geleitet wird, hingegen ist es unmöglich, das Kriterium zu verwirklichen, da der Wärmestrom  $Q_a^*$  in der unmittelbaren Umgebung von  $T_0$  der folgenden Gesetzmässigkeit gehorcht:

$$Q_a^* = a \cdot 0 \cdot (T - \theta_G) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{a}{\lambda} \frac{q^* J}{\sqrt{F}} x^2 \quad 1-4.4.$$

Tabelle 3 Stoffwerte der Leitermetalle

Mat.	$\theta_R$ [54]	$\rho_{273}$ [62]	$\rho_{\theta}^*$	$\lambda_{273}$	$\lambda_{\infty}^*$	$\zeta'$	$c_{\lambda}$	$100 (1 - F_2 \frac{\lambda_{th}}{\lambda_{\infty}}) \max$
Cu	335	1.55	1.96	4.01 [49]	4.15	0.68	0.58	- 4.2 (0.08) + 2.1 (0.25)
Al	419	2.50	4.13	2.36 [49]	2.36	0.62	0.68	- 6.2 (0.09) + 4.7 (0.26)
Ag	210	1.47	1.11	4.28 [49]	4.28	0.60	0.54	- 5.3 (0.08) + 6.9 (0.21)
Ni	413	6.14	10.51	0.94 [50]	0.87	0.52	0.60	-12.7 (0.10) +15.1 (0.31)
Pb	90	19.2	6.16	0.35 [50]	0.35	0.55	0.64	-10.8 (0.09) +17.0 (0.28)
Be	625	3.20	9.15	2.09 *	2.17	0.7 **	0.64 **	nicht berechnet, da genaue Angaben fehlen
Na	202	4.28	3.09	1.57 *	1.63	0.75 **	0.58 **	
	K	$10^6 \Omega \text{cm}$	$10^6 \Omega \text{cm}$	W/cmK	W/cmK	-	Gl.5-4.3.	% %

\* berechnet

\*\* geschätzt

Daraus ist ersichtlich, dass auch ein intensiv gekühlter Leiter im Bereich von  $x \rightarrow 0$  als ungekühlter Leiter betrachtet werden muss, da sowohl die Uebertragungsfläche  $0$  wie die Temperaturdifferenz  $(T - \theta_G)$  proportional der Längskoordinate sind. Das bedeutet, dass für  $T_0 = 4.2$  K die thermischen Verluste um den Betrag  $J^2 \frac{\rho_0}{F} \epsilon_x$  grösser sind als der minimale Wärmestrom im Leiter an der Stelle  $x = \epsilon_x$ .

Köhler u.a. [43] haben, allerdings von andern Voraussetzungen ausgehend, auf die Zunahme des Wärmestromes für  $x \rightarrow 0$  hingewiesen und auch entsprechende Messungen gemacht.

Eine weitere, für das optimale Verhalten sehr wichtige Verfälschung hat die Annahme des idealen Wärmeaustausches zwischen Gas und Leiter in der Umgebung der Verankerungstemperatur zur Folge. Der sehr steile Temperaturabfall nach Ueberschreiten von  $\kappa_{opt}^0$ , der für die hohen Werte von  $T_{max}$  bei  $\kappa^0 > \kappa_{opt}^0$  verantwortlich ist, rührt hauptsächlich daher, dass nicht nur die Joule'sche Wärme sondern auch die Abkühlungswärme des Kühlgases durch Längsleitung im Leiter von der Verankerungstemperatur hergeleitet werden muss. In Wirklichkeit ist jedoch, wie in Abb. 1-4.4. dargestellt ist,  $\theta_{Gh} < T_h$ . Deshalb besteht auch für  $\kappa^0 > \kappa_{opt}^0$  noch solange eine kühlende Wirkung des Gases bis  $T = \theta_G$ . Das Intervall  $\Delta\kappa^0$  in welchem die Leitertemperatur nicht unter  $\theta_G$  absinken kann beträgt ungefähr

$$\Delta\kappa^0 \approx \frac{q^*}{P_{T_h}} \beta \frac{c_p}{r} \sqrt{\frac{\rho_{\theta} \cdot a^1}{\lambda_{\infty}}} (T_h - \theta_{Gh}) \quad 2-4.4.$$

Diese Auswirkung der realen Kühlung ist dafür verantwortlich, dass die optimale Dimension vor allem mittelmässig gekühlter Leiter nicht so kritisch ist, wie die einfache Theorie voraussagt, sondern, dass, wie u.a. eine erstaunte Bemerkung von Williams [28] feststellt, burnout erst bei viel höheren Exzesströmen eintritt als erwartet. Für ungekühlte und sehr intensivgekühlte Zuleitungen trifft die Optimalfunktion, wie sie in Abb. 11-3.4. dargestellt ist, jedoch zu.



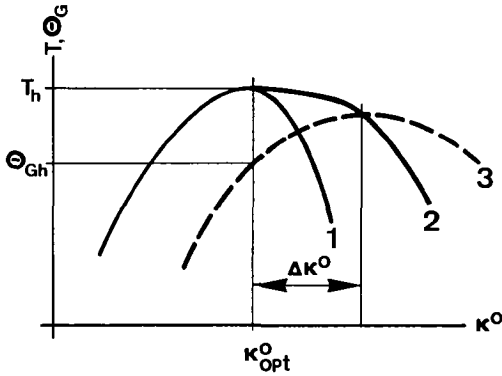


Abb. 1-4.4. Auswirkung der Annahme eines partiell idealen Wärmeaustausches ( $\beta$ ) auf das Temperaturprofil in der Umgebung von  $T_h$ . 1 theoretisches Profil, 2 effektives Profil, 3 Gastemperatur.

Vor allem aus diesen Gründen, aber auch weil der genaue Einfluss des Wärmeaustausches auf die Dimensionierung im Bereiche mittlerer Temperaturen unbekannt ist, ist es wichtig, für die genauen numerischen Berechnungen ein zutreffenderes Modell zu finden. Dies geschieht am besten in Analogie zur herkömmlichen Berechnungsweise des Wärmeaustausches. Die bei ähnlichen Problemstellungen oft verwendete Annahme eines konstanten Wertes der Wärmeübergangszahl  $\alpha$  [39] resp. eines konstanten Produktes  $Fu$  [37] oder gar des konstanten Parameters  $\alpha Fu/J^2$  [43] bringen Fehler in die Rechnung die vermieden werden sollten.

Um die oft recht komplizierten Leitergeometrien systematisch erfassen zu können, müssen einige Kenngrößen eingeführt werden. Für diese wird nachstehend die Definition und der Wert für die in Abb. II-4.4. aufgezeichnete Geometrie abgegeben:

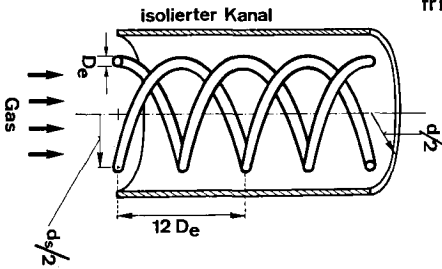
Geometrieparameter

$$\epsilon_1 \equiv \frac{V_D}{V_T} = \frac{D_e}{d} \sqrt{\frac{\pi^2}{36} \cdot \frac{d_s^2}{d^2} + 4 \frac{D_e^2}{d^2}} \quad 3-4.4.$$

Leitungsparameter  $\epsilon_2 \equiv 0/V_D = 4/D_e \quad [\text{cm}^{-1}] \quad 4-4.4.$

Packungsparameter  $\epsilon_3 \equiv V_D/l = \frac{\pi}{2} D_e^2 \sqrt{\frac{\pi^2}{144} \frac{d_s^2}{D_e^2} + 1} \quad [\text{cm}^2] \quad 5-4.4.$

Abb. II-4.4. Leitergeometrie mit zwei Drahtspiralen in einem Leiterkanal in axonometrischer Darstellung zur Illustration der geometrischen Kenngrößen.



Es bedeuten  $V_D$  das Volumen der Drähte,  $V_T$  das totale Kanalvolumen,  $0$  die am Wärmeübergang teilnehmende Drahtoberfläche und  $l$  die Kanallänge. Mit diesen Angaben gelingt es, die für die Rechnung benötigten Größen, nämlich den Bezugsdrahtdurchmesser  $D \equiv 1.13 \sqrt{F}$ , den äquivalenten Kanaldurchmesser  $d$ , sowie den Umfang  $u$  zu berechnen.

$$D = 1.13 \cdot \sqrt{\epsilon_3} \quad 6-4.4.$$

$$d = 1.13 \cdot \sqrt{\epsilon_3 / \epsilon_1} \quad 7-4.4.$$

$$u = \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 \quad 8-4.4.$$

Für die so beschriebene Geometrie ist es möglich, ein Modell für den Wärmeaustausch zwischen Gas und Leiter aufzustellen. Die bekannte Beziehung  $Nu = f(Re, Pr)$  behält ihre Gültigkeit auch bei tiefen Temperaturen. Hoare [6, S. 26] schreibt sie mit folgenden Konstanten an:

$$\text{Nu} = .0225 \cdot \text{Re}^{0.8} \cdot \text{Pr}^{0.4} \quad 9) \quad 9-4.4.$$

Mit den Grössen aus Gl. 6,7,8 können die charakteristischen Längen der Nusselt- und Reynoldszahl hergeleitet werden. Für die Reynoldszahl wird der hydraulische Durchmesser  $D_{hr}$  [70, § 7.5] eingesetzt, da eine gleichmässige Verteilung der Drähte über den Kanalquerschnitt angenommen werden kann.  $D_{hr}$  eignet sich jedoch nicht als charakteristische Länge der Nusseltzahl, da angenommen werden muss, dass durch die Kanalwand keine Wärme ausgetauscht werde. In Analogie zum Doppelrohrwärmeaustauscher [6, S.25] wird ein thermischer Durchmesser  $D_{th}$  in die Nusseltzahl eingesetzt, in welchem nur der Umfang  $u$  der Drähte in Erscheinung tritt (vergl. dazu Hausen [82]).

$$D_{hr} = 4 \frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1} / (3.54 \sqrt{1/\epsilon_1 \cdot \epsilon_3} + \epsilon_2) \quad 10-4.4.$$

$$D_{th} = 4 \frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1} \frac{1}{\epsilon_2} \quad 11-4.4.$$

Um das Temperaturverhalten von Nu, Re und Pr zu erfassen, muss der Verlauf der thermischen Leitfähigkeit und der dynamischen Viskosität der gasförmigen Kühlmedien bekannt sein. Für ein Gas aus starren Molekülen sagt die kinetische Gastheorie eine Proportionalität mit  $T^{0.5}$  voraus. Wie die bekannten Messungen [60] deutlich zeigen, trifft diese Abhängigkeit für keines der betrachteten Gase genau zu. Die Exponenten  $n_\lambda$  und  $n_\eta$  der Temperaturabhängigkeit von  $\lambda_G$  und  $\eta_G$  sind in Tabelle 4 samt ihren Werten bei 273 K zusammengestellt.

---

9) In der Literatur wird diese Formel oft als Colburn-Gleichung bezeichnet.

Tabelle 4 Stoffwerte der gasförmigen Kühlmedien zur Berechnung des Wärmeüberganges

Medium	$\eta_{273}$ [63]	$n_\eta$ [63]	$\lambda_{273}$ [64]	$n_\lambda$ [60]	n
H <sub>e</sub>	185.5	0.66	1.43	0.65	0.13
H <sub>2</sub>	84.1	0.67	1.71	0.90	0.27
N <sub>2</sub>	166.3	0.75	0.24	0.92	0.25
	$\mu^P$	-	mW/cm K	-	Gl.14-4.4.

Obwohl es physikalisch wenig sinnvoll ist, die Gastemperatur  $\theta_G$  auf die Debye Temperatur  $\theta_D$  des Leiters zu beziehen, wird in Ermangelung einer charakteristischen Gastemperatur zur Vereinfachung der Rechnung trotzdem diese schon in Kap. 2 angegebene Reduktion gewählt. Dadurch gehen die Werte von  $\lambda_{G\theta_D}$  und  $\eta_{G\theta_D}$  in die Rechnung ein. Das hat zur Folge, dass eine Abhängigkeit der Resultate von  $\theta_D$  und somit vom Leitermaterial entsteht. Durch die Einführung des Transformationsfaktors  $c_\lambda$  (Gl. 5-4.3.) ist jedoch die Unabhängigkeit vom Leitermaterial schon aufgehoben worden.

Die spezifische Wärme  $c_p$  des Gases wird für den angewendeten Druck ( $\sim 1$  ata) als konstant angenommen. Für He und N<sub>2</sub> trifft dies in guter Näherung zu, wogegen H<sub>2</sub> im Intervall zwischen 60 K und 300 K wegen der Anregung der Rotationsfreiheitsgrade eine Zunahme von 40 % aufweist [70, S.186]. Dies wird in der Rechnung durch einen mittleren Wert von  $c_p$  berücksichtigt.

Mit der etwas willkürlichen Definition  $\alpha_\infty \equiv \lambda_\infty / D$  erhält die Wärmeübergangsfunktion  $f_a$  schliesslich folgende Form:

$$f_a = \frac{0.0192}{\lambda_\infty} (\beta' M_T^*)^{0.8} \left(\frac{c_p}{\eta_{G\theta_D}}\right)^{0.4} \lambda_{G\theta_D}^{0.6} \frac{\epsilon_1}{1-\epsilon_1} \epsilon_2^{0.2} \epsilon_3^{-0.3} \dots$$

$$\left(1 + \frac{1}{\epsilon_2} \sqrt{1/\epsilon_1 \cdot \epsilon_3}\right)^{-0.8} \psi^n \quad 12-4.4.$$

Der Exponent  $n$  der reduzierten Gastemperatur fasst die Temperaturabhängigkeit der Wärmeübergangsfunktion zusammen. Gl. 14 gibt an, wie er berechnet wird und seine Werte für die gebräuchlichen Kühlmedien sind in der letzten Kolonne von Tabelle 4 aufgeführt.

Der Einfluss der Querschnittsgeometrie einer Leiteranordnung auf den Wärmeübergang kann durch eine kombinierte Kühlwirkung, die jedoch nicht gleich der Kühlintensität  $\beta$ , resp.  $\beta_0$  ist, ausgedrückt werden. Diese Kühlwirkung  $\epsilon$  berechnet sich unter der Voraussetzung, dass die pro Volumeneinheit erzeugte Joule'sche Wärme — bei konstanten Stoffwerten und gleicher Stromstärke — proportional dem über die dazugehörige Oberfläche aus Gas abgegebenen Wärmestrom sei. Da  $\epsilon$  jedoch nur von geometrischen Grössen abhängen soll, müssen die Stoffwerte und die Stromstärke in einer weitem, auch dimensionsbehafteten Proportionalitätskonstanten  $c_\epsilon = f(J, \rho, \beta', q^*, c_p, \lambda_G, \eta_G)$  [ $\text{cm}^{-1.2}$ ] berücksichtigt werden. Die Definitionsgleichung von  $\epsilon$  lautet somit:

$$\begin{aligned} \epsilon &\equiv c_\epsilon \cdot Q_a^* / Q_j^* = f(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) [\text{cm}^{1.2}] \\ &= \frac{\epsilon_1}{1 - \epsilon_1} (\epsilon_2 \cdot \epsilon_3)^{1.2} \left(1 + \frac{1}{\epsilon_2} \sqrt{1 / \epsilon_1 \cdot \epsilon_3}\right)^{-0.8} \quad 13-4.4. \end{aligned}$$

Im möglichen Variationsbereich  $0 \leq \epsilon \leq \infty$  bedeuten  $\epsilon = 0$  den adiabaten und  $\epsilon = \infty$  den ideal gekühlten Fall. Damit  $\epsilon$  einen möglichst hohen Wert erhält, ist der Umfang  $u = \epsilon_2 \cdot \epsilon_3$  gross zu wählen und gleichzeitig  $\epsilon_1$  gegen eins streben zu lassen. Ein mit einer grossen Anzahl feiner Drähte dicht gepackter Kanal erfüllt diese Forderungen am ehesten.

$\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  und  $\epsilon_3$  können hingegen nicht beliebig vergrössert werden, da der Ansatz für den Wärmeübergang nach Gl. 9 nur für ausgebildete Strömung an koaxialen Rohren genau gilt. Tritt eine so starke Störung der Strömung ein, dass sich die Grenzschichten laufend neu aufbauen müssen, so ist ein anderer Ansatz für den Wärmeübergang erforderlich. Eine Möglichkeit könnte in Analogie zum Kreuzstromwärmeaustauscher gesehen werden. Sobald aber solche

Modelle verwendet werden, darf der entstehende Druckabfall, der sich auch auf die Badtemperatur und die Verdampfungswärme des Kühlmediums auswirkt, nicht mehr vernachlässigt werden.<sup>10)</sup>

Die Temperaturabhängigkeit von  $\epsilon$  mit einem Exponenten

$$0.17 \leq n = 0.6 n_\lambda - 0.4 n_\eta \leq 0.27 \quad 14-4.4.$$

wird für Temperaturen  $T < 0.15 \theta_D$  ausgeprägt. Bei höheren Temperaturen macht sie sich kaum bemerkbar. Diese Tatsache ändert sich auch bei einem andern Modell nicht, da sie ausschliesslich vom Verhalten der Stoffwerte der Kühlmedien abhängt.

#### 4.5. Das Rechenprogramm

##### 4.5.1. Die Voraussetzungen (Input, Output, Kontrollen)

Mit der nun erfolgten Bestimmung der Funktionen  $f_\lambda$ ,  $f_p$  und  $f_a$  ist es abgeschlossen, für das Differentialgleichungssystem 1-, 2-2. irgend eine geschlossene Lösungsmethode zu finden. Wie es in solchen Fällen üblich ist, wurde die elektronische Datenverarbeitung zur Berechnung numerischer Lösungen herangezogen.

Um einigermaßen praxisnahe Resultate zu erhalten, wurden für das Programm folgende Eingangsgrössen bereitgestellt:

---

10) Vorallem bei He mit  $T_K = 5.2$  K und  $p_K = 2.26$  bar besteht eine starke Abhängigkeit  $r(T)$ , die bei einer plötzlichen Ausflusshemmung des Gases einen ungünstigen Einfluss hat, da nach einem Druckanstieg die Verdampfungsrate grösser wird, wodurch der Druck weiter erhöht wird. In kritischen Fällen muss eine Sicherung gegen diese potentielle Explosionsgefahr vorgesehen werden.

1. Material:  $\theta_D, \rho_o, \rho_T, \lambda_T, \zeta', c_\lambda$
2. Geometrie:  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, T_c, \rho_c (T_1, T_2)$
3. Kühleffekt:  $\lambda_{G\theta_D}, \eta_{G\theta_D}, c_p, r, n, T_o$
4. Experiment:  $J, M_o^*, \beta'$

Prinzipiell können diese 22 Parameter innerhalb der Definitionsgrenzen beliebig variiert werden. In der Natur kommen jedoch nur diskrete Kombinationen, die sich auf die Stoffwerte des Metalls und des Kühlmediums beziehen, vor. Einzig für die Parameter  $\beta', M_o^*, J, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  ist eine kontinuierliche Variation sinnvoll. Die Lösung sollte das Verhalten folgender Größen als Funktion der Warmendtemperatur ergeben:  $\kappa^o(T_h), q^*(T_h)$ , Spannungsabfall  $\Delta V(T_h)$  zwischen  $\kappa^o = 0$  und  $\kappa^o = \kappa_{opt}^o, \theta_{Gh}(T_h)$  sowie das Verhältnis  $V(T_h)$  von thermischen Verlusten zu total im Leiter produzierter Joule'scher Wärme.

Um einen Ueberblick über die numerischen Fehler zu erhalten, ist es unerlässlich, ein Kontrollkriterium in das Programm einzubauen. Als geeignete Beziehung bietet sich für diesen Zweck die totale Energiebilanz des Leiters an, die sich folgendermassen anschreiben lässt:

$$\frac{\delta Q^*}{q^* J} = (\Delta V - \beta' c_p (\frac{q^*}{r} + \frac{M_o^*}{J})) (\theta_G - T_o) + \frac{dT}{dx} \frac{F}{J} \lambda \frac{1}{q^*} - 1. \rightarrow 0$$

1-4.5.

In dieser Gleichung stellt  $\delta Q^* = \sum Q_i^*$  einen Fehlbetrag in der totalen Wärmebilanz dar, der durch die Ungenauigkeit der numerischen Berechnungen hervorgerufen wird.

Für  $\kappa^o = \kappa_{opt}^o$  fällt das letzte Glied in der eckigen Klammer weg. Im thermisch isolierten Fall ( $\beta' = 0$ ) wird auch der mittlere Term gleich null und bei einer korrekten Berechnung muss der Spannungsabfall gleich den thermischen Verlusten sein ( $\Delta V = q^*$ ).

Der Spannungsabfall  $\Delta V$  berechnet sich nach folgender Beziehung:

$$\Delta V = \sqrt{\rho_{\theta} \cdot \lambda_{\infty} \cdot \theta_D} \int_0^{\kappa^0} f_p \cdot d\kappa^0 \quad 2-4.5.$$

Um die numerischen Fehler dieser Integration gering zu halten, muss sehr sorgfältig vorgegangen werden. Schon die Berechnung der Funktion  $\kappa^0 = \kappa^0(T)$  bedingt mehrere Integrationsschritte, welche eine numerische Fehlerquelle darstellen. Da die Stützwerte zwischen den Intervallschritten nicht bekannt sind, muss die obige Integration mittels der Trapezregel erfolgen, die für positive Krümmungen der Funktion  $p(\kappa^0)$  zu grosse, für negative hingegen zu kleine Werte ergibt.

#### 4.5.2. Der Lösungsweg

Die numerischen Lösungen der Differentialgleichungen 9/10-2., resp. 15-2. können prinzipiell als Anfangs- oder Randwertproblem gelöst werden. Der mathematisch elegantere Weg des Randwertproblems wird jedoch wegen des Aufbaus der Funktionen  $f_p$ ,  $f_{\lambda}$ ,  $f_a$  und  $f_{\lambda}'$  so kompliziert, dass gemäss Stiefel [59] die zu erwartenden numerischen Fehler so gross werden können, dass die Ergebnisse nur noch bedingt als korrekt angesehen werden dürfen.

Für die Berechnung des Anfangswertproblems bietet sich die Methode der Phasenebene [65] an, d.h. die Berechnung der Funktion  $y \equiv \frac{dt}{dx}(t)$  entsprechend der Beziehung:

$$y' \equiv \frac{dy}{dt} = -y \frac{f_{\lambda}'}{f_{\lambda}} + \left( P_A \frac{f_a}{f_{\lambda}} (t-\psi) - P_J \frac{f_p}{f_{\lambda}} \right) \frac{1}{y} \quad 3-4.5.$$

$$\frac{d\psi}{dt} = P_M f_a (t-\psi) \frac{1}{y} \quad 4-4.5.$$

$$\text{resp. } y' = -y \frac{f_{\lambda}'}{f_{\lambda}} + P_P \frac{1}{f_{\lambda}} - P_J \frac{f_p}{f_{\lambda}} \frac{1}{y} \quad 5-4.5.$$



Um die gesuchte Funktion  $\kappa^{\circ}(t)$  zu erhalten, muss die inverse Funktion in der Phasenebene nochmals integriert werden

$$\kappa^{\circ} = J \frac{D}{F} \sqrt{\rho_{\theta} / \theta_D \cdot \lambda_{\infty}} \int_{t_0}^t \frac{dt}{y} \quad 6-4.5.$$

Die höchste Genauigkeit zur Berechnung von  $y$  ergibt sich mit der relativ aufwendigen 1. Methode von Runge-Kutta [59], wogegen die Integration des Temperaturprofils nach der Trapezregel erfolgen muss, was zu gleichen Fehlern wie bei der Berechnung von  $\Delta V$  führt.

Die schwierigsten Systemprobleme, die sich beim skizzierten Vorgehen ergeben sind die Konvergenz, die Integration von  $\kappa^{\circ}$  für  $y \rightarrow 0$  und die Wahl der Länge des Integrationschrittes, die in der Folge kurz beleuchtet werden.

#### 4.5.3. Das Konvergenzkriterium

Die Aufgabe besteht darin, ohne Kenntnis der Kühlintensität einen Anfangswert  $q^*$  so zu finden, dass das Optimalkriterium,  $\frac{dT}{dx} = 0$ , bei einer gewünschten Warmendtemperatur  $T_h$  eintritt. Da diese Aufgabe nur durch sehr viele Iterationsschritte lösbar ist, sollen Werte von  $q^*$  gesucht werden, deren Optimalkriterium in einem "vernünftigen" Temperaturbereich  $T_{h1} \div T_{h2}$ , der zwischen 60 K und 400 K liegen soll, erfüllt wird.

Da, wie Abb. 1-4.5. zeigt, die Funktion  $q^*(T_h)$  zwei extreme Bereiche aufweist, nämlich einen mit extrem grosser Steigung bei tiefen Temperaturen und den andern mit sehr flachem Verlauf bei höheren Temperaturen, bringt die Anwendung eines einzelnen Kriteriums keinen Erfolg. Im ersten Bereich, der zu Beginn des Rechenvorganges durchlaufen wird, wurde ein Eingabelungskriterium (EK) gewählt, mit welchem ein Wert von  $q^*$  zu finden war, dessen  $T_h$  zwischen 50 K

und 100 K liegt. Als Abbruchkriterium galten entweder  $\frac{dT}{dx} = 0$  oder  $T > 400$  K. Abb. II-4.5. zeigt einen typischen Suchvorgang, der schliesslich beim zehnten Anlauf die gesuchten Anfangswerte für den weiteren Ablauf der Rechnung brachte. Im allgemeinen führt dieses Eingabelungsverfahren nach spätestens 25 Schritten zum gewünschten Wert, andernfalls wird der Rechnungsgang unterbrochen.

Um eine genügende Auskunft über den Verlauf von  $q^*(T_h)$  zu erhalten ist es erforderlich, minimal 6 Werte von  $q^*_{T_h}$  im Intervall  $60 \text{ K} \div 400 \text{ K}$  zu kennen. In diesem Bereich wird die Wahl von  $q^*$  durch das Tangentenkriterium (TK) mit

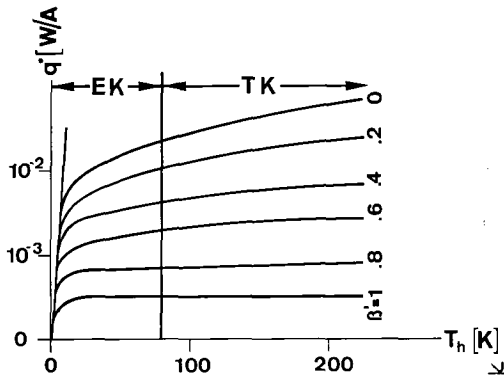


Abb. I-4.5. Schematischer Verlauf der gesuchten Funktion  $q^*(T_h)$  mit der Angabe der Kriterien zur numerischen Lösung EK = Eingabelungskriterium, TK = Tangentenkriterium.

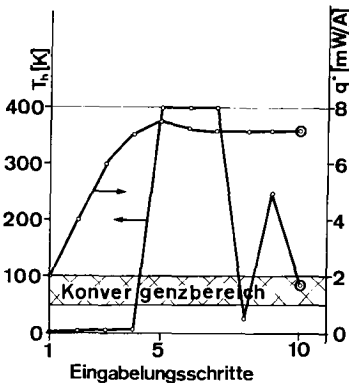


Abb. II-4.5. Suchvorgang mit den Eingabelungskriterium. Von einem festen Wert ( $2 \text{ mW/A}$ ) ausgehend wird  $q^*$  solange verändert, bis  $T_h$  im Konvergenzbereich liegt.

einem vorausgewählten  $\Delta T_h = 25 \text{ K}$  vorgenommen. Fig. III-4.5. stellt einen typischen schrittweisen Rechnungsvorgang für die sich aus dem in Abb. II-4.5. dargestellten Eingabelungsverfahren ergebenden Anfangswerte dar. Die Punkte 0 resp. 1 der Tangentenmethode entsprechen den Schritten 9 resp. 10 des Eingabelungsverfahrens.

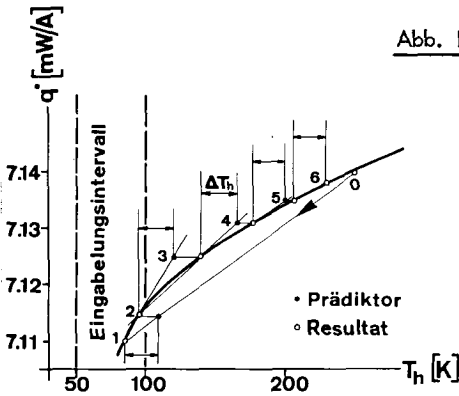


Abb. III-4.5. Rechnungsvorgang nach dem Tangentenkriterium für  $\Delta T_h = 25 \text{ K}$ , der anschliessend an den Ablauf in Abb. II-4.5. folgt (Schritt 0 entspricht Eingabelungsschritt 9, resp. 1  $\rightarrow$  10)

#### 4.5.4. Die Integration des Drahtparameters

Das Abbruchkriterium der schrittweisen Integration wird erreicht, sobald  $y = 0$ , d.h.  $\dot{q} = 0$  wird. Da aber zur Berechnung der Isoklinen in der Phasebene nach Gl. 3-4.5. durch  $y$  dividiert werden muss, entsteht für  $y \rightarrow 0$  eine numerische Instabilität. Diese kann jedoch durch den frühzeitigen Rechnungsabbruch vermieden werden, allerdings ohne dabei den Wert von  $T_{\max} = T_h$  genau zu kennen.

Noch grössere numerische Schwierigkeiten bieten sich bei der anschliessenden Integration des inversen Wertes der Isokline nach der Trapezregel (Gl. 6-4.5.) da für  $y \rightarrow 0$  der eine Trapezschenkel sehr gross wird. Von der Praxis her bekannt ist, dass die Länge des stromführenden Leiters für  $y \rightarrow 0$  nicht unendlich wird sondern ein relativ kurzer Abschnitt ist. Deshalb muss auch ein numerischer Lösungsweg gefunden werden können.

Aus diesem Grunde ist es unerlässlich, über den Verlauf des Wärmestromes in der Umgebung von  $T_{\max}$  mehr zu wissen. Die Analyse der geschlossenen Lösungen, deren Voraussetzungen im betrachteten Bereich von  $T_{\max}$  richtig sind, ergibt kein aussagekräftiges Resultat, da der Grenzwert nicht gebildet werden kann. Das graphische Lösungsverfahren der instationären Wärmeleitungsgleichung nach E. Schmidt [66] weist auf einen brauchbaren Lösungsweg hin. Mit der Intervalllänge  $\Delta x$ , die in diesem Bereich konstant ist und der temperaturabhängigen Wärmeproduktion, welche an der betrachteten Stelle die Temperaturerhöhung  $\Delta T$  zur Folge hat, kann das stationäre Temperaturprofil in der Umgebung von  $T_{\max}$  konstruiert werden. Wie Abb. IV-4.5. zeigt, kann anhand dieser Konstruktion leicht eine Beziehung folgender Art für das Temperaturprofil angeschrieben werden:

$$(T_{\max} - T) \sim (l_{\text{opt}} - x)^m \quad 7-4.5.$$

Wie leicht ersichtlich ist, ergibt sich für  $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T_3 = \dots = \text{const.}$  d.h. für einen temperaturunabhängigen Widerstand ein Exponent  $m = 2$ . Für  $\Delta T_1 > \Delta T_2 > \Delta T_3 \dots$  wird  $m < 2$ . In der Praxis ist letzteres wegen der Abnahme von  $\rho$  und des Wärmestromes an das Kühlgas, immer erfüllt. Auf der linken Bildhälfte ist dieser Verlauf von  $\Delta T(T, \beta')$  für den idealgekühlten Fall aufgetragen. Der nach links positiv aufgetragene Massstab ist gegenüber den auf der rechten Bildhälfte benützten Werten von  $\Delta T$  um den Faktor 5 vergrößert.

Für den Wärmestrom  $\dot{q}$  resp. die Funktion  $y$  in der Phaseebene ergibt sich folgende Abhängigkeit:

$$\dot{q} \sim y \sim (T_{\max} - T)^{(1-1/m)} \quad 8-4.5.$$

Für alle Werte  $m > 0$  ergibt die Integration der Funktion  $1/\dot{q}$  auch für den Nulldurchgang endliche Werte. Das schrittweise numerische Verfahren muss also nach der Unterschreitung eines minimalen positiven Wertes von  $y$  unter-

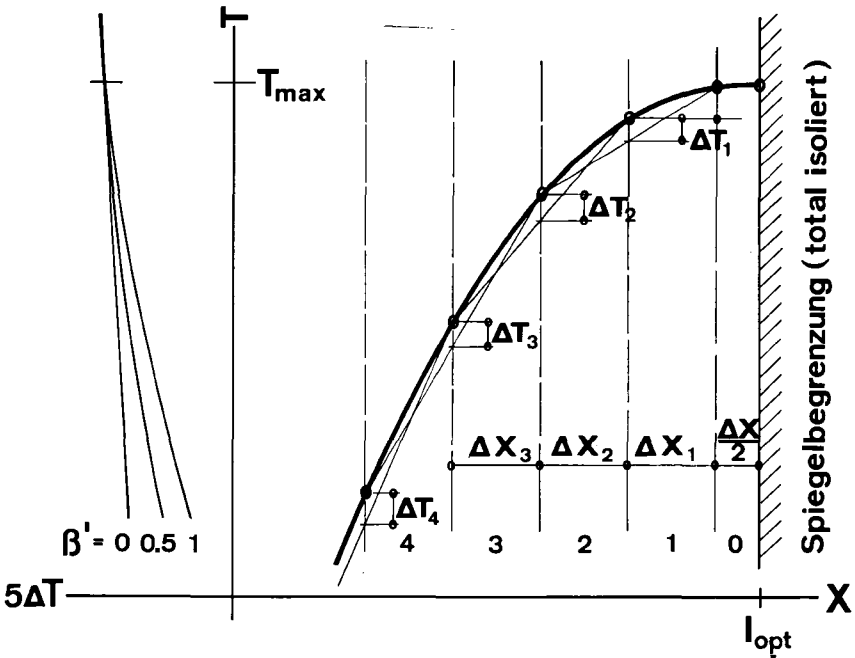


Abb. IV-4.5. Konstruktion des stationären Temperaturprofils in der Umgebung von  $T_{max}$  nach [66]. Die durch die innere Wärmeproduktion entstehende Temperaturerhöhung  $\Delta T(T)$  muss gleich der durch die thermische Leitung an jeder Stelle bedingten Temperaturniedrigung sein.

brochen werden. Durch eine Anzahl (mindestens 3) gesicherter Werte  $y(T)$  lässt sich nach einem minimalen Fehlerkriterium eine Funktion gemäss Gl. 8 legen. Diese ergibt den Wert von  $T_{max}$  und erlaubt eine geschlossene Integration bis zum Nulldurchgang. Längs dem nun geschlossen bekannten Temperaturprofil kann der elektrische Widerstand (zur Bestimmung von  $\Delta V$ ) ebenfalls berechnet werden. Die Bestimmung der Gasaustrittstemperatur  $\theta_{Gh}$  ist mit einer gewissen Unsicherheit verbunden, da sie durch schrittweise Integration bis  $T_{max}$  berechnet werden muss.

Nach Durchlaufen des vorgeschriebenen Bereiches von  $T_h$  wurden im allgemeinen 10 - 14 Integrationen durchgeführt. Um mit den erhaltenen Werten weiterrechnen und Vergleiche anstellen zu können, werden die Funktionen  $q^*(T_h)$ ,  $\kappa^o(T_h)$ ,  $\Delta V(T_h)$  und  $(T_h - \theta_{Gh})(T_h)$  durch ein Polynom 4. Grades dargestellt, dessen Koeffizienten nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate in einer doppelpräzisen Ausgleichsroutine berechnet werden.

#### 4.5.5. Die Wahl der Länge des Integrationsschrittes

Es ist bekannt, dass es bei numerischen Integrationen eine optimale Schrittlänge gibt, die zu minimalen Fehlern des Resultates führt. Zu kleine Schritte bedingen eine grosse Zahl von Operationen, so dass zwar die Funktion genau angenähert werden könnte, die Summe der numerischen Fehler der Einzeloperation aber so gross wird, dass das Resultat falsch wird. Durch zu grosse Integrations-schritte werden die Funktionen schlecht angenähert, wodurch vor allem bei stark gekrümmten Isoklinen Fehler entstehen. Bei der Lösung partieller Differen-tialgleichungen können diese Fehler sogar zu numerischen Instabilitäten führen [59].

Numerische Versuche haben ergeben, dass für den gesamten Bereich von  $T > 40$  K eine Schrittlänge von  $\Delta T_0 = 1$  K resp.  $\Delta t_0 = 1/\theta_D$  genügend ge-naue Resultate ergibt. Bei der Integration der Gleichungen für idealen und keinen Wärmeaustausch genügt diese Annahme auch für  $T < 40$  K. Bei der Berechnung des realen Wärmeaustausches muss diese Schrittlänge jedoch verkürzt werden. Die Fehlerkontrolle gemäss Gl. 1-4.5. steuert die Schrittlänge ent-sprechend der arithmetischen Reihe  $\Delta T_i = \Delta T_0 (0.6 - 0.05 i)$  bis die Zu-nahme des Gesamtfehlers kleiner als 0.5 ‰ wird. Für  $\Delta T_i = 0$ , was bei sehr gutem Wärmeübergang eintreten kann, wird die Berechnung mit dem Hinweis unterbrochen, es seien die Werte für die ideale Kühlung anzuwenden.

#### 4.5.6. Das Blockprogramm

Abb. V-4.5. zeigt ein ganz grobes Schema des Blockprogrammes. Nach dem Einlesen aller Daten gemäss Kap. 4.5.1. erfolgt die Berechnung und Speicherung der Funktion  $f_5(1/t)$  und  $f_7(1/t)$  (Gl. 1b-4.1.) in Abständen von .5 K zwischen 3 K und 400 K. Anschliessend werden die über den Temperaturbereich gemittelten Werte von  $f_p(T)$  und  $f_\lambda(T)$  berechnet und gedruckt. In einem ersten Block erfolgt die Integration der Daten für den idealgekühlten und den ungekühlten

Draht gemäss den Angaben dieses Kapitels. Im zweiten Block wird die Integration für eine oder mehrere Geometrien durchgeführt. Beide Blöcke können für verschiedene Ströme durchlaufen werden, wobei wahlweise auch ein Block übersprungen werden kann.

Das Programm, das am Institut für Verfahrens- und Kältetechnik der ETH Zürich zur Benützung durch Interessenten aufliegt, wurde in FORTRAN-VI geschrieben. Es umfasst neben dem Hauptprogramm 9 Unterprogramme und besteht aus rund 3000 Anweisungen (statements). Der Grossteil der Berechnungen erfolgte vom CDC 6000 Terminal aus an der CDC-6500 Grossrechenanlage der FIDES-Treuhandgesellschaft in Zürich. Das Programm erfordert eine Speicherkapazität von oktal 100'000 Plätzen. Das maschinenorientierte sog. BINARY Programm, das ebenfalls vorliegt, benötigt noch oktal 50'000 Plätze. Ein Rechenvorgang zur Berechnung drei verschiedener Geometrien bei 4 Stromstärken benötigt im Durchschnitt 270 sec. Diese relativ hohe Rechenzeit ist durch die Vielzahl der Operationen und die grosse Anzahl der logischen Entscheidungen zurückzuführen.

Die Standardleiterkonfiguration, auf die sich viele Auswertungen beziehen, wurde aus folgenden Werten berechnet:  $\rho_0 = 10^{-8} \Omega \text{cm}$ ,  $T_c = 0$ ,  $\beta' = 1$ ,  $M_o^* = 0$ ,  $\eta_{G\theta_D} = 2.09 \cdot 10^{-4} \text{ p}$ ,  $\lambda_{G\theta_D} = 1.62 \cdot 10^{-3} \text{ W/cm K}$ ,  $\epsilon_2 = 4 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\epsilon_3 = 0.8 \text{ mm}^2$ . Die Stromstärke wurde, wie auch für alle andern Serien, in der Folge 250 A, 100 A, 50 A variiert.  $\epsilon_1$  durchlief jeweils die Werte 0.8, 0.6, 0.4 und 0.2.

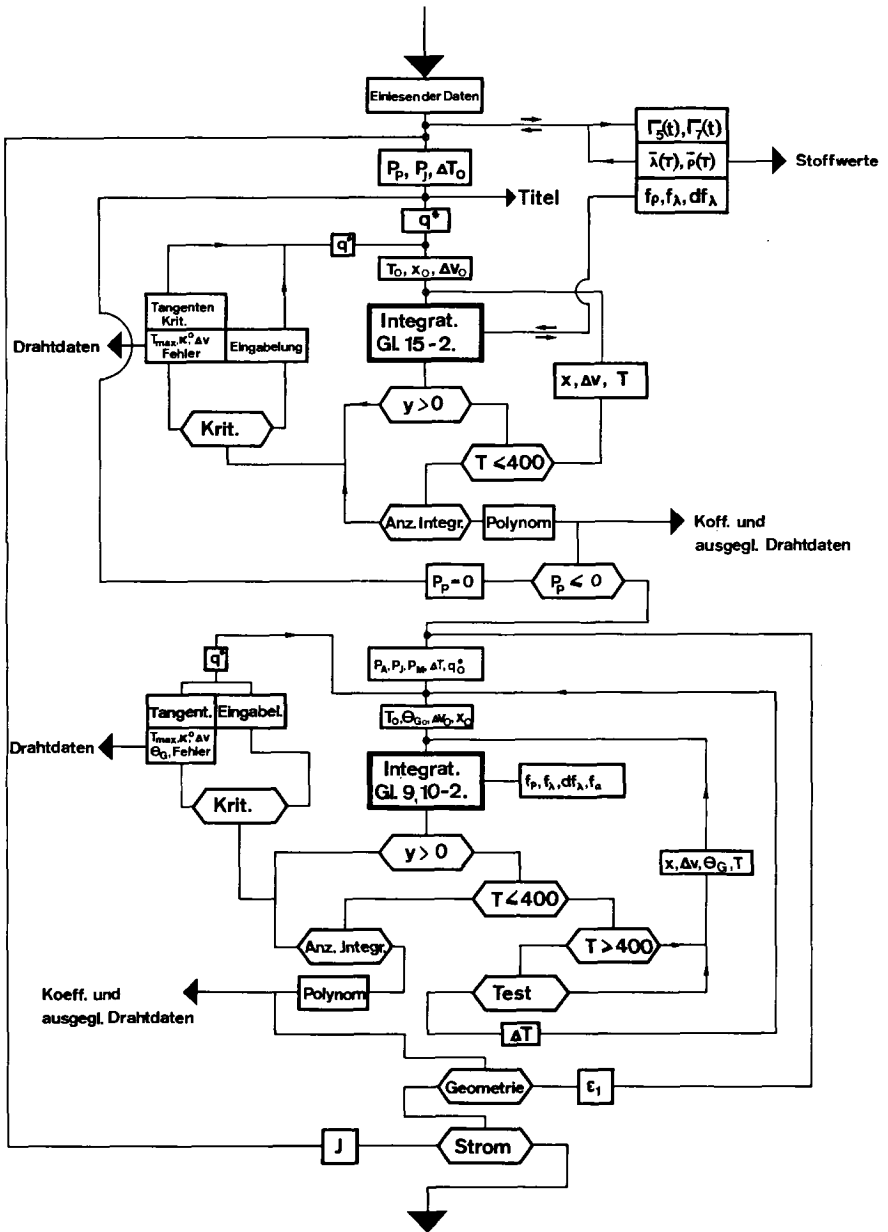


Abb. V-4.5. Blockdarstellung des Programms zur numerischen Lösung der Differentialgleichungen



#### 4.6. Die Resultate der Berechnung

##### 4.6.1. Das Temperaturprofil von Leiter und Gas

Die Temperaturprofile sind die aussagekräftigsten Angaben, die über einen Leiter gemacht werden können. Aus ihnen können alle andern interessierenden Größen ( $q^*$ ,  $\Delta V$ ,  $\kappa^{\circ}$  etc.) abgeleitet werden. Deshalb reagieren sie auch sehr empfindlich auf alle Einflussgrößen. Abb. 1-4.6. stellt den Bereich der Temperaturprofile zwischen 4.2.K und 100 K resp. 300 K für ideal gekühlte und ungekühlte Leiter mit einer Restwiderstandsvariation von  $10^{-7} \Omega\text{cm}$  bis  $10^{-9} \Omega\text{cm}$  für Cu dar. Die Interpretation von Abb. 1 soll am Beispiel des optimalen Drahtparameters  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ}$  erläutert werden. Auf der Abszisse ist der Wert  $\kappa^{\circ}/J$  aufgetragen, der so normiert wurde, dass für alle Zustände gilt  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ} = 0.4 \cdot J$ . Daraus ergibt sich z.B. für das ungekühlte Profil mit  $T_h = 300 \text{ K}$  und  $\rho_o = 10^{-7} \Omega\text{cm}$  ( $J_{\text{opt}} = 3.83$ ) ein optimaler Drahtparameter von  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ} = 1.53$ ; für denselben Fall mit  $T_h = 100 \text{ K}$  gilt  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ} = 0.4 \cdot 4.56 = 1.82$ . Eine solche Zuleitung, die z.B. mit 1000 A betrieben werden soll, muss eine optimale Dimension von  $(l/D)_{\text{opt}} = 1.53 \cdot 10^{-3} \sqrt{\theta_o \lambda_{\infty} / \rho_{\theta}}$  resp.  $1.82 \cdot 10^{-3} \sqrt{\theta_o \lambda_{\infty} / \rho_{\theta}}$  erhalten. Diese Berechnungen können auf jeden Punkt der angegebenen Profile angewendet werden. Es ist augenfällig, dass gut gekühlte Leiter hoher Reinheit einen äusserst starken Temperaturanstieg im obersten Teil aufweisen. Für  $\rho_o = 10^{-9} \Omega\text{cm}$  und  $T_h = 300 \text{ K}$  liegen im autonomen Fall 88 % der Leiterlänge auf einer Temperatur unter 40 K. Für denselben Leiter im adiabaten Fall beträgt dieser Anteil nur 49 %. Daraus ist ersichtlich, wie problematisch es ist, auch nur abschnittsweise mit mittleren Stoffwerten zu rechnen. Im Extremfall des ideal gekühlten Leiters mit  $\rho_o = 10^{-9} \Omega\text{cm}$  und  $T_h = 300 \text{ K}$  beträgt die über das Temperaturintervall  $T_o - T_h$  gemittelte thermische Leitfähigkeit von Cu (9.60 W/cm K) nur ein knappes Drittel der mittleren Leitfähigkeit des Profils (28.7 W/cm K). Für den elektrischen Widerstand gilt dieselbe Ueberlegung. Die Stromstärken, die im optimalen Falle für den gewählten Wert  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ}/J = 0.4 \text{ A}^{-1}$  geleitet werden können, sind ebenfalls eingetragen und

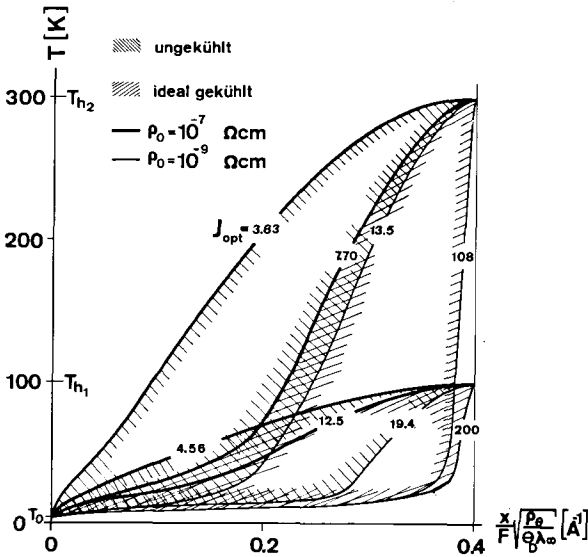


Abb. I-4.6. Bereich der Temperaturprofile idealgekühlter und ungekühlter Leiter verschiedener Reinheit ( $\rho_0$ ) und Cu mit  $T_0 = 4.2$  K und  $T_h = 100$  K resp. 300 K mit den dazugehörigen Strömen.

variieren maximal um den Faktor 28 resp. 44 für  $T_h = 300$  K resp. 100 K. Im gleichen Variationsbereich verändern sich die spezifischen Verluste, wie aus Abb. IV-4.6. zu entnehmen ist, um den Faktor 53 resp. 62.

Da die wirklichen Verhältnisse durch die Annahme einer idealen Kühlung nur als Grenzfall dargestellt werden, zeigt Abb. II-4.6. die Profile von Gas und Leiter, wie sie sich bei einem tatsächlichen Wärmeübergang einstellen. Die Temperaturdifferenz  $\Delta T = T - \theta_G$ , welche die treibende Kraft für den Wärmeaustausch darstellt, durchläuft ein flaches Minimum und ein sehr scharfes Maximum. Wie die nach Formel 14-2. für  $\beta' = 1$  und  $M_0^* = 0$  berechnete Kurve von  $\beta_0$  zeigt, beträgt die Kühlintensität in der Umgebung von  $T_0$  null. Sie steigt auf einen maximalen Wert an, um bei höheren Temperaturen wieder

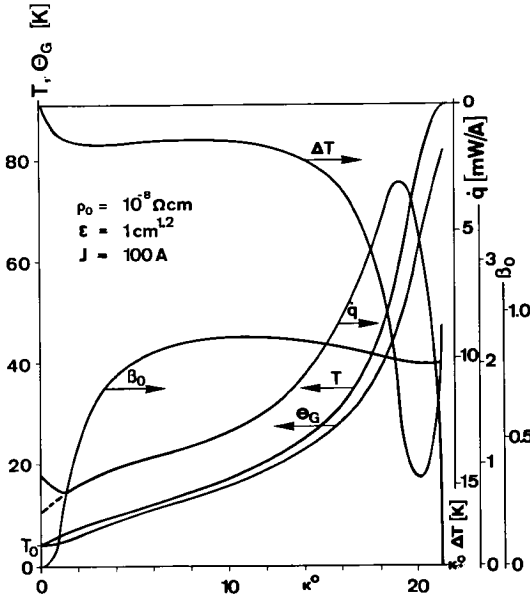


Abb. II-4.6. Temperaturprofil von Leiter und Kühlgas sowie Temperaturdifferenz, Kühlintensität und Wärmestrom unter Berücksichtigung eines realen Wärmeaustausches für die Standardleiteranordnung

leicht abzufallen. Der in Kap. 4.4. vorausgesagte Zustand, dass jeder Leiter in der unmittelbaren Umgebung von  $T_0$  als thermisch isoliert zu betrachten sei, trifft also zu. Dies wird durch den Verlauf des Wärmestromes  $\dot{q}$ , der in diesem Temperaturbereich zuerst abnimmt, wie es von einem ungekühlten Leiter erwartet wird, (Abb. I-3.3.) illustriert. Könnte das vermieden werden und ein Wärmestrom entsprechend der gestrichelten Linie verwirklicht werden, so käme das im vorliegenden Beispiel einer Reduktion der thermischen Verluste um 40 % gleich. Dies kann jedoch nie ganz gelingen; einzig sehr grosse Austauschflächen und Querschnitte in diesem Bereich können diese Zunahme des Wärmestromes für  $x \rightarrow 0$  verringern. Das scharfe Maximum von  $\dot{q}$  beträgt in diesem Falle mehr als das Vierfache der thermischen Verluste.

Die Kurvenverläufe in Fig. II-4.6. lassen sich alle durch die Gesetze der Wärmeübertragung gut erklären und stimmen, wie in Kap. 5.2. gezeigt wird, auch gut mit der Wirklichkeit überein. Die Dimensionslosigkeit der gewählten Darstellung behält ihre Gültigkeit nur bei gleichzeitiger Konstanz von  $J$  und der Kühlwirkung  $\epsilon$  (Gl. 13-4.4.). Der prinzipielle Verlauf von  $\Delta T$ ,  $\dot{q}$  und  $\beta_0$  ist jedoch für alle Fälle realer Kühlung ähnlich. Einzig das Maximum von  $\Delta T$  verschwindet bei zu kleinen Werten der Kühlwirkung  $\epsilon$ .

Diese Darstellung illustriert die Problematik der Annahme eines konstanten Wertes von  $\beta_0$  resp.  $\beta$ , wie ihn die bisherigen Arbeiten [27,28,30,36,40,41] einführten oder der Darstellung des Wärmeüberganges durch einen konstanten Wert von  $dT/d\theta_G$  [31]. Auch die Berechnungen von  $\ln a_i$  [39] mit konstanten Stoffwerten ergeben Profile, die stark von der Wirklichkeit abweichen.

Zusätzliche Kryostatverluste beeinflussen die Profile in Richtung besserer Kühlung, Kryostatbetrieb, d.h. ohne kontinuierliches Nachfüllen des He, hingegen in Richtung schlechterer Kühlung. Eine Erhöhung der Kaltendtemperatur ( $H_2, N_2$ ) oder die Verwendung von Legierungen nähern die Profile an den von der einfachen Theorie vorausgesagten Verlauf an.

#### 4.6.2. Die thermischen Verluste

Abb. III-4.6. stellt die thermischen Verluste des Standardleiters als Funktion von  $T_h$  für  $T_0 = 4.2$ . dar. Der Einfluss der Kühlwirkung  $\epsilon$  und der Stromstärke  $J$ , die als Parameter auftreten, ist so ausgeprägt, dass für  $q^*$  ein logarithmischer Massstab gewählt werden musste. Die Verluste im adiabaten Fall ( $\epsilon = 0$ ) folgen in etwa einer linearen Abhängigkeit von  $T_h$ , wie er von Gl. 11-3.5. vorausgesagt wurde. Für den ideal gekühlten Leiter ( $\epsilon = \infty$ ) verschwindet jedoch diese Abhängigkeit von  $T_h$  im interessierenden Bereich von  $70 \text{ K} \leq T_h \leq 400 \text{ K}$  praktisch vollständig. Der erreichte Minimalwert der thermischen Verluste für  $q_0^* = 0$  von  $0.89 \text{ mW/A}$  liegt über dem Grenzwert

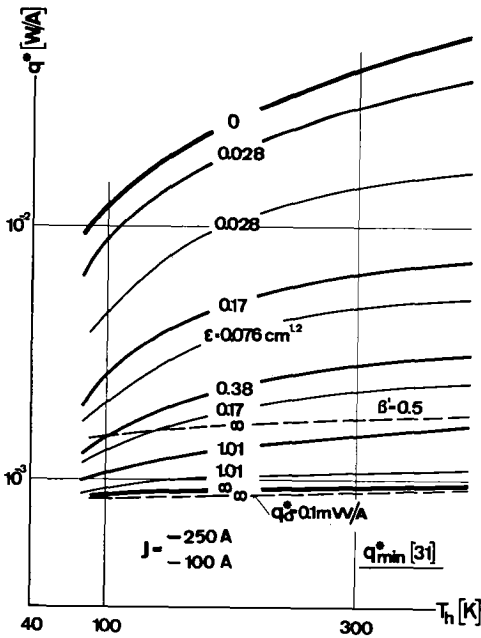


Abb. III-4.6. Thermische Verluste der Standardkonfiguration in Abhängigkeit von  $T_h$  mit der Kühlwirkung  $\epsilon$  (Gl. 13-4.4.) als Parameter. Die Werte beziehen sich nur auf einen Strompfad, müssen also für die Bewertung einer Hin- und Rückleitung verdoppelt werden.

von Fournet und Mailfert [30] (0.64 mW/A) und unter demjenigen von Gl. 9-3.5. für  $\beta = 1$  vorausgesagten Wert (1.06 mW/A). Das Verhältnis von  $q_{\epsilon=0}^*$  und  $q_{\epsilon=\infty}^*$  beträgt 47 resp. 14 für  $T_h = 300$  K resp. 100 K. Daraus ist ersichtlich, dass sich bei  $T_h = 300$  K eine Verbesserung der Kühlwirkung stärker auf die Verluste auswirkt als bei  $T_h = 100$ . Ferner wird die schon in Kap. 3.3. angedeutete Aussage bekräftigt, dass sich eine Reduktion von  $T_h$  für gut gekühlte Leiter bezüglich der thermischen Verluste nicht bezahlt macht. Wie die gestrichelten Kurven für  $q_0^* = 0.1$  mW/A und  $\beta' = 0.5$  darstellen, verringern Kryostatverluste die thermischen Verluste, wogegen eine Kühlgasabzweigung diese erhöht. Der Umstand, dass sich der Verlauf von  $\beta' = 0.5$

mit den Kurven realer Kühlung schneidet, bestätigt erneut, dass die Annahme von  $\beta = \rho$  fehlerhafte Werte ergibt.

Der Einfluss des Restwiderstandes auf  $q^*$  für  $\epsilon = 0$  und  $\epsilon = \infty$  ist für verschiedene Werte von  $T_h$  und  $T_o$  in Abb. IV-4.6. zusammengestellt. Auf den ersten Blick fällt auf, dass diese Abhängigkeit in keinem Fall sehr ausgeprägt ist. Mit der Ausnahme des adiabaten Falles für  $T_o = 4.2$ , dessen Verluste unabhängig von  $\rho_o$  sind, hat eine Verkleinerung von  $\rho_o$  immer eine Abnahme von  $q^*$  zur Folge. Für den dargestellten Fall von Cu mit einem  $\rho_o$  von  $10^{-9} \Omega\text{cm}$  betragen somit die Verluste bei  $T_h = 100 \text{ K}$  0.73 mW/A, was immer noch höher als der Grenzwert [30] ist. Eine Erhöhung von  $T_o$  hat eine Erhöhung der Verluste für  $\epsilon = \infty$  resp. eine Verringerung für  $\epsilon = 0$  zur Folge, was schon von der einfachen Theorie in Abb. III-3.5. vorausgesagt wurde.

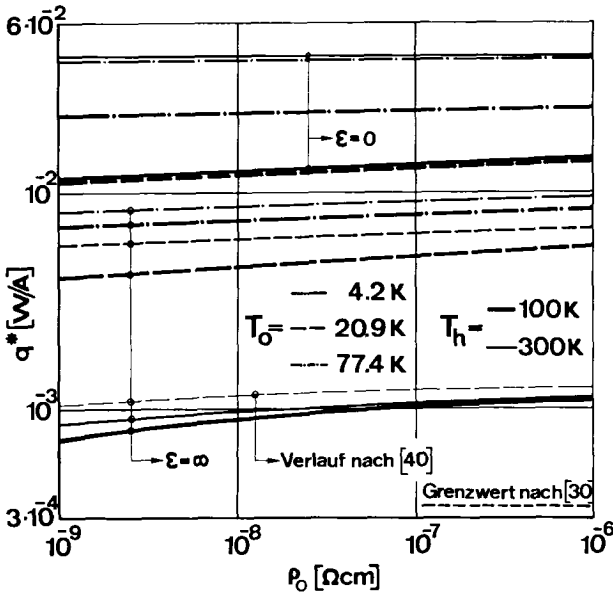


Abb. IV-4.6. Der Einfluss des Restwiderstandes auf die spezifischen Verluste bei den Extremwerten der Kühlwirkung und verschiedenen Warm- und Kalttemperaturen

Die Werte von Lock [40], der als erster dem Einfluss von  $\rho_o$  auf  $q^*$  für einen Fall berechnete, sind zum Vergleich ebenfalls aufgezeichnet. Sie liegen etwas höher, was hauptsächlich auf die unterschiedliche Berechnungsmethode von  $\lambda(T, \rho_o)$  zurückzuführen ist.

Aus Abb. IV-4.6. könnte leicht der Schluss gezogen werden, niedrige Werte von  $\rho_o$  und  $T_h$  seien in jedem Fall anzustreben. Zwar können für diesen Fall minimale Verluste erreicht werden, andere Effekte, die im folgenden Kapitel besprochen werden, schränken diesen Schluss hingegen wieder ein.

Der schon auf Abb. III-4.6. erkennbare Einfluss der Kühlwirkung auf die Verluste ist in Abb. V-4.6. für zwei Ströme und zwei Warmendtemperaturen aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass die minimalen Verluste desto schneller angenähert werden je tiefer  $T_h$  und  $J$  liegen. So bedeutet  $\epsilon = 0.5$  für  $T_h = 100$  K und  $J = 100$  A schon fast ideale Kühlung. Für  $T_h = 300$  K und  $J = 250$  A ist für das gleiche Resultat eine Kühlwirkung  $\epsilon = 7$  erforderlich. Aus dem Einfluss, den die Stromstärke bei gleicher Warmendtemperatur und Kühlwirkung auf die Verluste ausübt, ist ersichtlich, dass diese schlecht in einen Ausdruck für eine kombinierte Kühlwirkung einbezogen werden könnte.

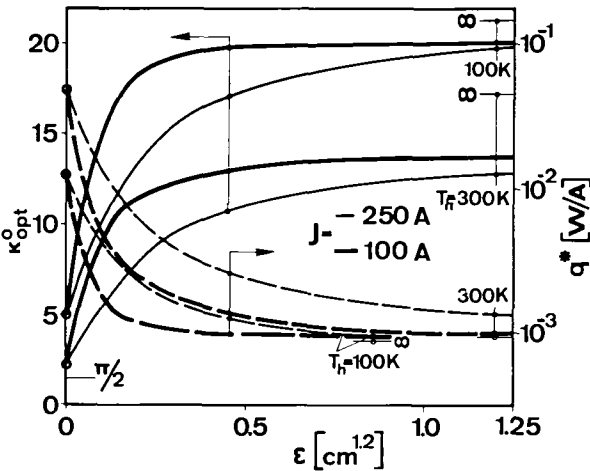


Abb. V-4.6. Abhängigkeit von  $\kappa_{opt}^0$  und  $q^*$  von der Kühlwirkung  $\epsilon$  für verschiedene Ströme und Warmendtemperaturen

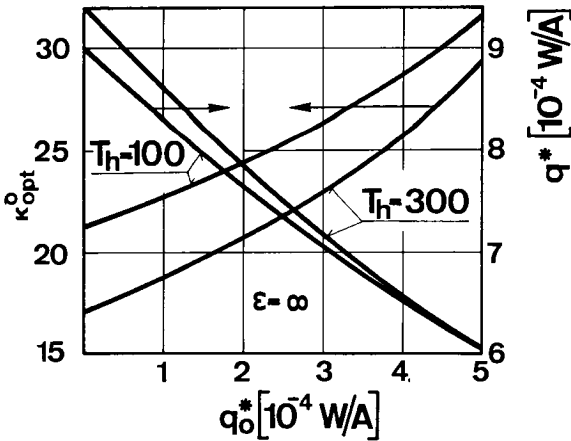


Abb. VI-4.6.

Einfluss der spezifischen Kryostatverluste auf  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ}$  und  $q^*$  für den idealgekühlten Draht und zwei Warendtemperaturen. Die linear aufgetragenen Ordinaten beginnen nicht im Nullpunkt!

In Abb. VI-4.6. ist die Abnahme von  $q^*$  mit zunehmenden spezifischen Kryostatverlusten eingetragen. Diese ist am stärksten für geringe Werte von  $q_o^*$ . Bei vergleichsweise hohen Werten von  $q_o^*$  gegenüber  $q^*(q_o^* = 0)$  nähert  $q^*$  asymptotisch den Wert Null an. Da  $-\left(\frac{dq_o^*}{dq_o^*}\right)$  auch für  $q_o^* = 0$  kleiner als eins ist ergibt sich nie ein Minimum der Totalverluste ( $q^* + q_o^*$ ), sondern diese nehmen stetig zu.

#### 4.6.3. Der Drahtparameter $\kappa^{\circ}$

Für alle berechneten Beispiele wurde neben dem Wert des optimalen Drahtparameters  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ}$  auch die Werte von  $\kappa_T^{\circ}$  für  $T = 15, 20, 40$  K gespeichert. Da der prinzipielle Verlauf des Temperaturprofils schon in Kap. 4.6.1. besprochen wurde, wird an dieser Stelle nur noch auf den Verlauf von  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ}$  hingewiesen.

In Abb. VII-4.6. ist der Verlauf von  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ}$  als Funktion der Warendtemperatur für dieselben Kühlwirkungen wie die spezifischen Verluste in Abb. III-4.6. aufgezeichnet. Die Kurven entsprechen den Optimalkurven in Abb. I-3.5. Um eine Analogie zur Darstellung in Abb. III-4.6. zu ermöglichen und den Rechengang, in dem  $T_h$  als unabhängige Variable auftritt darzustellen, wurden die Achsen gegenüber Abb. I-3.5. vertauscht. Entsprechend der einfachen Theorie muss  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ}$  für hohe Werte von  $T_h$  und  $\epsilon = 0$  den Grenzwert  $\pi/2$  erreichen. Wird  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ}$  unter Berücksichtigung der über das Temperaturintervall



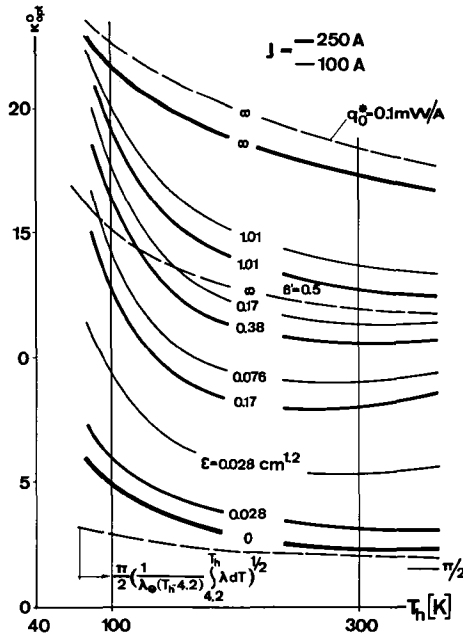


Abb. VII-4.6. Optimaler Drahtparameter der Standardkonfiguration in Abhängigkeit von  $T_h$  mit der Kühlwirkung als Parameter

gemittelten Wärmeleitfähigkeit gleich  $\pi/2$  gesetzt, so ergibt sich der gestrichelte Verlauf, der für  $T_h = 300$  K noch um 30 % über dem Wert 1.57 liegt. Für alle Werte von  $\epsilon$  wird die in Kap. 3.7. beschriebene Beobachtung, dass  $(\frac{dT_h}{d\kappa_{opt}}) \leq 0$  werden kann, festgestellt.

Diese Erscheinung ist für mittlere und kleine Kühlwirkungen besonders ausgeprägt. Daraus kann geschlossen werden, dass in diesem Bereich die Möglichkeit einer Multi- oder Bistabilität des Temperaturprofils gegeben ist. Für mittlere Werte von  $\epsilon$  durchlaufen die Optimalkurven im aufgezeichneten Temperaturintervall ein Minimum, da die Steigung entsprechend der Darstellung von Abb. I-3.7. wieder positiv wird. Auch die Kurve  $\epsilon = \infty$  weist dieses Minimum

auf, jedoch erst bei einer erheblich höheren Warmendtemperatur. Die in Kap. 3.5. mit der einfachen Theorie vorausgesagte Zunahme des optimalen Drahtparameters bei verbesserter Kühlwirkung ist deutlich erkennbar und auch in Abb. V-4.6. quantitativ eingetragen. Daraus ist leicht erkennbar, dass die Annäherung der idealen Kühlung nur durch einen sehr langsam mit  $\epsilon$  ansteigenden Wert von  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ}$  verwirklicht werden kann. Werden 110 % von  $q_{\text{min}}^*$  in Kauf genommen, so beträgt der dazugehörige optimale Drahtparameter für  $T_h = 300 \text{ K}$  nur 78 % von  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ}$  ( $\epsilon = \infty$ ).

Die ebenfalls in Abb. VII-4.6. berücksichtigten Kryostatverluste sind in Abb. VI-4.6. für  $\epsilon = \infty$  umfassender zusammengestellt. Die Zunahme von  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ}$  bei einer Erhöhung von  $q_o^*$  ist deutlich sichtbar. Beim Abschätzen der relativen Zunahme ist aber zu berücksichtigen, dass die Ordinate nicht durch den Nullpunkt geht.

Der Einfluss des Restwiderstandes auf den optimalen Drahtparameter ist in Abb. VIII-4.6. festgehalten. Allgemein kann gesagt werden, dass  $\left(\frac{d\kappa_{\text{opt}}^{\circ}}{d\rho_o}\right)$  immer negativ ist. Die jeweils für  $\epsilon = 0$  und  $\epsilon = \infty$  aufgetragenen Kurven für  $T_h = 300$  resp.  $100 \text{ K}$  kreuzen sich bei einem Wert von  $\rho_o$  zwischen  $5 \cdot 10^{-8} \leq \rho_o \leq 3 \cdot 10^{-7}$ . Dies bedeutet, dass links dieses Kreuzungspunktes der Leiter mit einer Verankerungstemperatur von  $100 \text{ K}$  länger ist als derjenige mit  $T_h = 300 \text{ K}$  bei gleicher Kaltendtemperatur. Dieser in Kap. 3.7. diskutierte Zustand trifft für den gekühlten und ungekühlten Fall zu und auch für alle möglichen Kaltendtemperaturen. Lock [40] hat schon auf diese thermische Instabilität hingewiesen und den Kreuzungspunkt für einen Fall ( $\epsilon = \infty$ ,  $T_h = 300 \text{ K}/70 \text{ K}$ ,  $T_o = 4.2 \text{ K}$ ) berechnet.

Aus Abb. VIII-4.6. ist ebenfalls zu entnehmen, dass die Differenz  $(\kappa_{\text{opt}}^{\circ} \epsilon = \infty - \kappa_{\text{opt}}^{\circ} \epsilon = 0)$  bei zunehmender Kaltendtemperatur kleiner wird. Für  $N_2$  wird diese sogar so klein, dass die beiden Kurven für  $\epsilon = 0$  und  $\epsilon = \infty$  praktisch zusammenfallen.

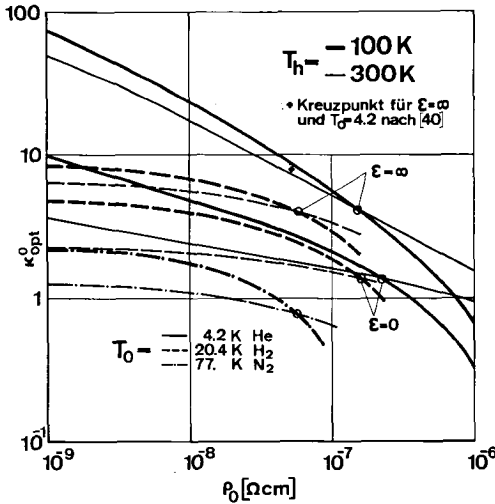


Abb. VIII-4.6. Einfluss des Restwiderstandes auf den optimalen Drahtparameter

#### 4.6.4. Der Spannungsabfall $\Delta V$

Der Spannungsabfall  $\Delta V$  zwischen dem warmen und dem kalten Ende eines Leiters ist ein Mass für die totalen elektrischen Verluste  $\Delta V \cdot J$  einer Zuleitung. Für optimal dimensionierte Zuleitungen verschiedener Warmendtemperaturen ist der Spannungsabfall in erster Näherung proportional  $(T_h - T_o)$ .

Im Gegensatz zur Abhängigkeit der thermischen Verluste und des optimalen Drahtparameters von der Kühlwirkung verläuft die entsprechende Kurve für den Spannungsabfall nicht nur zwischen den Extremwerten für  $\epsilon = 0$  und  $\epsilon = \infty$ . Wie aus Abb. IX-4.6. zu ersehen ist, erfolgt für kleine Werte von  $\epsilon$  ein starker Anstieg von  $\Delta V$  auf einen maximalen Wert  $\Delta V_{max}$ . Eine weitere Verbesserung der Kühlwirkung hat eine Abnahme von  $\Delta V$  zur Folge. Die Lage von  $\Delta V_{max}(\epsilon)$  hängt von der Stromstärke ab, wogegen der Betrag von  $\Delta V_{max}$  eine Funktion des Restwiderstandes ist.

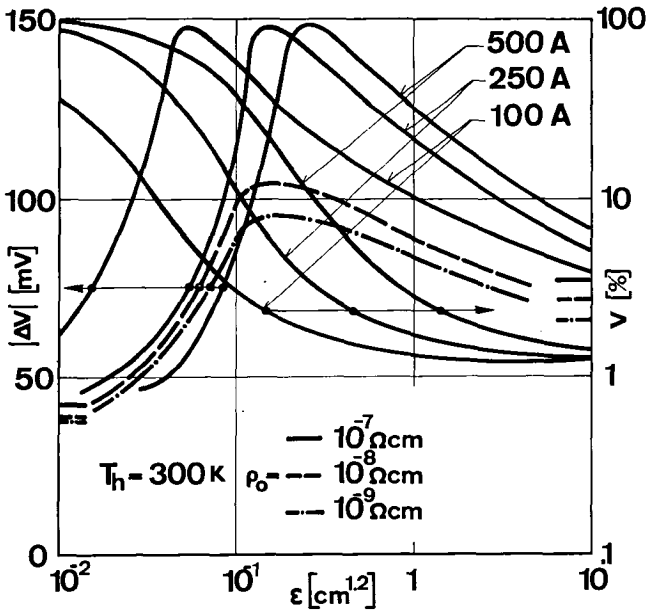


Abb. IX-4.6. Spannungsabfall  $\Delta V$  zwischen dem kalten und warmen Ende eines Leiters als Funktion der Kühlwirkung mit dem Restwiderstand und der Stromstärke als Parameter. Die Lage von  $\Delta V_{\text{max}}$  hängt von der Stromstärke, der Betrag von  $\rho_o$  ab. Der starke Abfall von  $\eta = q^*/\Delta V$  erfolgt im Bereich der starken Zunahme von  $\Delta V$ .

Die kurzen Striche am rechten und linken Diagrammende stellen den asymptotischen Wert der dazugehörigen Kurven ( $J = 250 \text{ A}$ ) für  $\epsilon = \infty$  resp.  $\epsilon = 0$  dar. Die zu den Spannungsabfällen gehörenden optimalen Drahtparameter und thermischen Verluste sind den Abb. III resp. VII-4.6. zu entnehmen.

Dieses Verhalten lässt sich folgendermassen erklären: Der Spannungsabfall ist proportional dem Produkt  $\bar{p} \cdot \kappa_{\text{opt}}^{\circ}$ . Wie aus Abb. V-4.6. zu ersehen ist, erfolgt im Bereiche geringer Kühlwirkungen ein ausgeprägter Anstieg von  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ}$  gegen den asymptotischen Wert  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ} \epsilon = \infty$ . Für höhere Werte von  $\epsilon$  verändert sich  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ}$  nicht mehr sehr stark. Hingegen wird in diesem Bereich

das Temperaturprofil in Richtung tieferer Temperaturen an jeder Stelle verändert. Diese Tendenz ist aus dem Temperaturprofilspektrum in Abb. I-4.6. deutlich am sehr steilen Temperaturanstieg im Bereich  $T > 40 \text{ K}$  und  $\epsilon = \infty$  zu erkennen und wirkt sich in einer Abnahme des mittleren spezifischen Widerstandes aus. Die langsame Abnahme von  $\Delta V$  für  $\epsilon \rightarrow \infty$  gegen den Wert  $\Delta V_{\epsilon = \infty}$  wird durch diese Veränderung des Temperaturprofils verursacht.  $\Delta V_{\text{max}}$  nimmt bei abnehmendem Wert von  $\rho_0$  ebenfalls ab, weil die entsprechenden Profile eine Abnahme der mittleren Temperatur aufweisen, die ausgeprägter ist als die gleichzeitige Zunahme des Drahtparameters.

Der auf den ersten Blick paradox erscheinende Umstand, dass der Spannungsabfall für  $\epsilon < 0.1$  bei zunehmender Stromstärke abnimmt, kann ebenfalls durch die Proportionalität von  $\Delta V \sim \bar{\rho} \cdot \kappa_{\text{opt}}^0$  erklärt werden. Für  $\epsilon < 0.1$  hängt  $\bar{\rho}_{\epsilon = \text{const}}$  nicht stark von der Stromstärke ab. Abb. VII-4.6. zeigt dagegen deutlich, dass der optimale Drahtparameter bei zunehmender Stromstärke abnimmt (Vergleich der dünnen und dicken Linien). Für  $\epsilon = \text{const}$  nimmt daher der Spannungsabfall bei zunehmender Stromstärke ab und die thermischen Verluste nehmen gemäss Abb. III-4.6. gleichzeitig zu. Dieses Erkenntnis, zu der man nicht ohne weiteres stösst, konnte nur dank der gründlichen Analyse dieses komplizierten Problems erarbeitet werden.

Der Quotient der thermischen Verluste und der Joule'schen Energie  $V \equiv q^*/\Delta V$  ist eine interessante, vom Restwiderstand unabhängige Grösse, die ebenfalls in Abb. IX-4.6. eingezeichnet ist. Im ideal gekühlten Fall beträgt  $V = 0.012$ . Das bedeutet, dass eine solche Leiteranordnung 98,8 % der Joule'schen Wärme durch das Kühlgas abführen kann, so dass die thermischen Verluste nur 1,2 % von  $\Delta V \cdot J$  betragen.

Aufbauend auf die einfache Theorie in Kap. 3 ist es naheliegend, einen Zusammenhang zwischen der Kühlwirkung  $\epsilon$  und der Kühlintensität  $\beta_0$  zu suchen. Dieser ist in Abb. X-4.6. mit der Stromstärke und dem Restwiderstand als Parameter dargestellt. Die Berechnung von  $\beta_0$  erfolgte mit Hilfe der

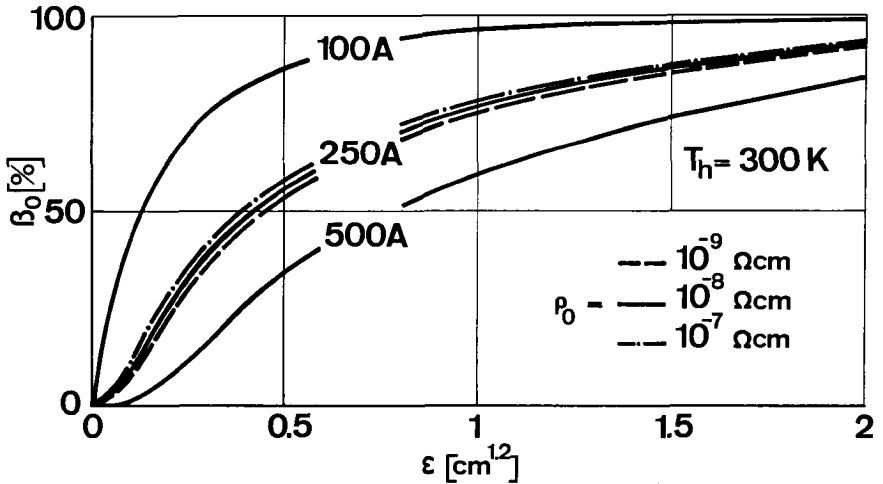


Abb. X-4.6. Zusammenhang zwischen der Kühlwirkung  $\epsilon$  und der Kühlintensität  $\beta_0$ , berechnet mit den Gas- und Leitertemperaturen am warmen Leiterende

Temperaturdifferenz zwischen Gas und Leiter am warmen Ende (Gl. 14-2.).

Bei dieser Betrachtung müssen die in Kap. 4.6.1. besprochenen Einwände gegen einen konstanten Wert von  $\beta_0(T)$  vernachlässigt werden.

Wird in Abb. IX-4.6. der Abszissenmassstab  $\epsilon$  durch  $\beta_0$  ersetzt, so fällt die Abhängigkeit von  $\Delta V$  und  $V$  von der Stromstärke in erster Näherung weg.

Dies gilt sinngemäss für alle andern Darstellungen mit  $\epsilon$  als Koordinate, resp. Parameter. Da jedoch  $\beta_0$  eine von der Dimensionierung her schwer zugängliche Grösse ist, wurde die Anwendung von  $\epsilon$  bevorzugt.

#### 4.6.5. Der Reduktionsfaktor $\gamma$

Die für zusammengesetzte Leiter zu erwartende Reduktion der Verluste kann durch den Reduktionsfaktor  $\gamma = f(\beta_0, T_c, T_h, \rho_0)$  entsprechend der Beziehung 1-3.8. dargestellt werden.  $\gamma \leq 1$  ist der Quotient der thermischen Verluste des normalen Leiters und des Wärmestromes an der Stelle  $\kappa_{T_c}^0$  des zusammengesetzten Leiters.

In Abb. XI-4.6. ist die Abhängigkeit des Reduktionsfaktors von der Kühllintensität (berechnet nach Gl. 14-2.) für verschiedene Werte von  $T_c$  und  $T_h$  aufgetragen. Der für jeden Wert von  $T_c$  eingetragene Verlauf von  $1/(1 + \beta_o (T_c - T_o) c_p / r)$  stellt eine Grenzkurve für  $\gamma$  dar, für welche keine Abnahme der Verluste mehr eintritt ( $q^* = q_s^*$ ). Es ist erkenntlich, dass die Kurven für  $T_h = 300$  K nur unwesentlich über dieser Grenzkurve liegen.

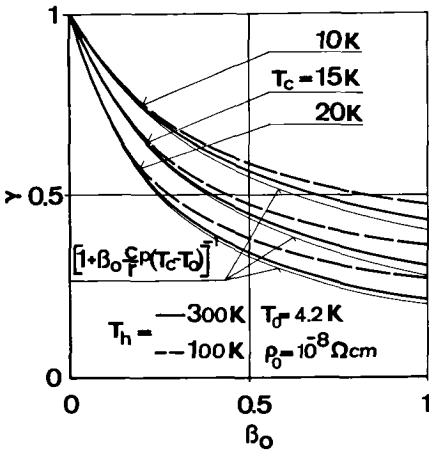
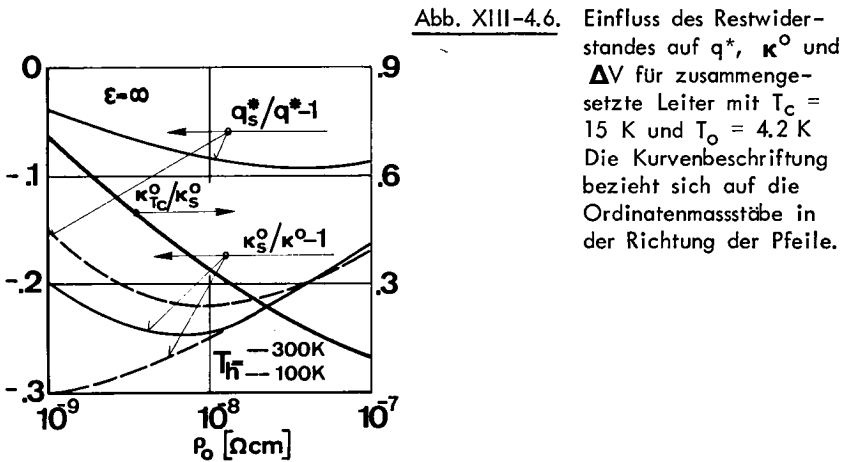
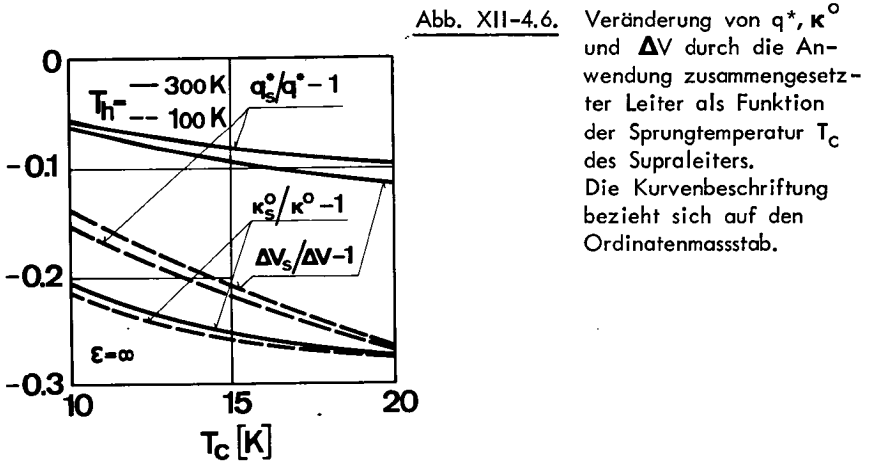


Abb. XI-4.6. Einfluss der Wärmendtemperatur auf den Reduktionsfaktor  $\gamma$  als Funktion der Kühllintensität gemäss Abb. X-4.6.

Die maximal mögliche Reduktion der thermischen Verluste durch die Anwendung zusammengesetzter Leiter sowie die Veränderungen, die dadurch am Drahtparameter und dem Spannungsabfall entstehen sind in Abb. XII-4.6. zusammengestellt. Der Index  $s$  bezieht sich auf den Wert der entsprechenden Grösse bei zusammengesetzten Leitern.

Wie zu erwarten ist, verändert sich  $\Delta V$  in ähnlicher Weise wie  $q^*$ . Die Abnahme ist ausgeprägter für einen höheren Wert von  $T_c$  und beträgt für  $q^*$  bei  $T_h = 100$  K maximal - 27 %. Auf den ersten Blick ist es nicht einleuchtend, warum die Abnahme des Drahtparameters so wenig von  $T_h$  abhängt. Dies rührt jedoch daher, dass die Leiterlängen, die eine Temperatur  $T < T_c$  haben, und die durch die Anwendung eines Supraleiters verkürzt werden bei  $\epsilon = \infty$  nur unbedeutend von  $T_h$  abhängen, wie aus dem Profilspektrum in Abb. I-4.6. zu ersehen ist.



Die Werte in Abb. XII-4.6. gelten für einen Restwiderstand von  $\rho_0 = 10^{-8} \Omega \text{ cm}$ . Der maximale Einfluss des Restwiderstandes auf zusammengesetzte Leiter ist für  $T_C = 15$  K in Abb. XIII-4.6. dargestellt. Es ist ersichtlich, dass vor allem die Abnahme der Verluste ein Minimum aufweist, welches für  $T_h = 100$  K besonders ausgeprägt ist. Der Grund für dieses Verhalten muss im supraleitenden Anteil der Leiterlänge  $\kappa_{T_C}^0$  gesucht werden. Dieser ist ebenfalls in Abb. XIII-4.6.



aufgetragen und beträgt 70 % für  $\rho_0 = 10^{-9} \Omega \text{cm}$ . Dies bedingt einen sehr steilen Temperaturanstieg zwischen  $T_c$  und  $T_{H'}$ , was einem relativ hohen Wärmestrom  $\dot{q}_{T_c}$  im Leiter zur Folge hat. Definitionsgemäss wird dadurch der Reduktionsfaktor und proportional dazu auch die Reduktion der Verluste kleiner.

Der kombinierte Einfluss von hohen Werten von  $T_c$  (20 K) und geringen Werten von  $\rho_0$  ( $10^{-9} \Omega \text{cm}$ ) hat eine doppelt wirksame Erniedrigung der Verluste zur Folge. Aus den Berechnungen für die Abb. XII und XIII-4.6. lässt sich das Minimum der thermischen Verluste des autonomen Betriebes ( $M_0^* = 0$ ,  $\beta' = 1$ ) auf folgenden Wert beziffern:

$$q_{\min}^* = 0.5 \text{ mW/A}$$

Dieser Wert kann erreicht werden mit einem ideal gekühlten zusammengesetzten Leiter aus hochreinem Kupfer ( $\rho_0 = 10^{-9} \Omega \text{cm}$ ) mit folgenden Temperaturen:  $T_0 = 4.2 \text{ K}$ ,  $T_h = 100 \text{ K}$ ,  $T_c = 20 \text{ K}$ . Der dazugehörige optimale Drahtparameter beträgt 51.

Die Realisierung einer solchen Zuleitung ist jedoch nicht sehr einfach. Es müssen vorgängig folgende Probleme gelöst werden:

1. Ein Restwiderstand von  $10^{-9} \Omega \text{cm}$  kann für Cu wohl verwirklicht werden, bedeutet jedoch einen grossen Aufwand für die Beschaffung und die Verarbeitung. Da solche Zuleitungen meist in Zusammenhang mit Magnetfeldern vorkommen, muss damit gerechnet werden, dass ein Teil der Zuleitung mindestens mit Streufeldern in Berührung kommt. Der Magnetowiderstand [54]  $\rho_{H'}$ , der immer eine Vergrösserung des elektrischen und somit auch des thermischen Widerstandes zur Folge hat, gehorcht der Kohler-Regel [72], die folgendermassen lautet:

$$\rho_{H'}/\rho = 1 + f(H/\rho) \quad 1-4.6.$$

Daraus ist ersichtlich, dass die relative Widerstandszunahme für tiefe Temperaturen ( $\rho = \rho_0$ ) desto ausgeprägter wird, je niedriger  $\rho_0$  ist. Deshalb wird es in vielen Fällen schwierig sein, während des Strombetriebes einen effektiven Restwiderstand von  $\rho_0 = 10^{-9} \Omega \text{ cm}$  aufrechtzuerhalten.

2. Die Anwendung einer Warmendtemperatur von  $T_h = 100 \text{ K}$  kann zwar ohne sehr grossen Aufwand durch die Thermostatisierung dieser Stelle mit flüssigem Stickstoff erreicht werden. Hingegen müssen speziell während Stromänderungen Massnahmen getroffen werden, um Instabilitätserscheinungen (siehe Kap. 5.3.) zu vermeiden. Bei zusammengesetzten Leitern ist die Zunahme der Verluste bei einer Veränderung des Temperaturprofils noch ausgeprägter als bei einfachen Leitern, da für eine relativ grosse Leiterlänge durch die Erwärmung eine Widerstandszunahme von null anstelle von  $\rho_0$  auf  $\rho_T$  erfolgt.
3. Wie in Kap. 1.1. ausgeführt wurde, sind zwar Supraleiter mit  $T_c = 20 \text{ K}$  bekannt, jedoch kommerziell schwer erhältlich. Während des Betriebes ist zudem zu erwarten, dass wegen der vorhandenen Magnetfelder (Eigenfeld des Leiters und Streufelder) die effektive Sprungtemperatur, welche vom Magnetfeld abhängt, unter dem Wert von  $T_c$  liegt.

Unter diesen Einschränkungen kann der gegebene Wert von  $q_{\min}^*$  als Minimum betrachtet werden. Der von Fournet und Mailfert [30] vorausgesagte Minimalwert von  $0.64 \text{ mW/A}$  ist zwar mit konventionellen Mitteln schwer realisierbar. Durch die Anwendung zusammengesetzter Leiter ist es jedoch möglich, ihn zu unterschreiten.

Tritt zwischen dem Normalleiter und dem Supraleiter ein Uebergangswiderstand  $\rho_c$  auf, so wird der verbessernde Effekt zusammengesetzter Leiter verkleinert. Ein spezifischer Widerstand von  $\rho_c = 4 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ cm}$  im Intervall zwischen  $14 \text{ K}$  und  $15 \text{ K}$  hat für einen Cu-Leiter mit  $\rho_0 = 10^{-8} \Omega \text{ cm}$  bei idealer Kühlung und  $T_c = 15 \text{ K}$  eine Verlustabnahme von  $17 \%$  resp.  $6,5 \%$  für  $T_h = 100 \text{ K}$  resp.  $T_h = 300 \text{ K}$  zur Folge. Für  $\rho_c = 0$  betragen die entsprechen-

den Werte 22 % resp. 9,5 %. Zur Verwirklichung geringer thermischer Verluste mittels zusammengesetzter Leiter ist dem elektrischen Kontakt zwischen Normal- und Supraleiter grösste Aufmerksamkeit zu schenken. Dieses Problem ist vor allem für den Fall, dass der Normalleiter zur Verwirklichung eines hohen Wertes von  $\epsilon$  aus vielen feinen Drähten besteht, konstruktiv nicht einfach zu lösen.

#### 4.6.6. Der Einfluss des Leitermaterials

Die bisher diskutierten Resultate gelten quantitativ nur für Kupfer. Der Einfluss des Leitermaterials der sieben ausgewählten Metalle auf die Ergebnisse soll in diesem Abschnitt dargelegt werden.

Die Stoffwerte eines Metalles werden durch die Konstanten  $\theta_D$ ,  $c_\lambda$ ,  $\zeta'$ ,  $\rho_0$ ,  $\rho_{273}$  und  $\lambda_{273}$  in der Rechnung berücksichtigt. Für die Berechnung des adiabaten und idealgekühlten Falles beeinflussen ausser den Werten von  $c_\lambda$  und  $\zeta'$  der Quotient  $\rho_\theta / \rho_0$  und  $L_\theta$  das Ergebnis. Davon kann einzig der Restwiderstand variiert werden, so dass für die Vergleiche ein festes Verhältnis  $\rho_\theta / \rho_0 = 200$  angenommen werden kann. Für den realgekühlten Fall spielt ausser  $L_\theta$  auch der Wert der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  eine Rolle, da dieser für eine gegebene Geometrie und einen festen Wärmestrom invers proportional zur Fläche  $0$  ist, die für den Wärmeaustausch mit dem Gas zur Verfügung steht.

Abb. XIV-4.6. zeigt die Verluste des adiabaten Leiters als Funktion von  $T_h / \theta_D$  mit Markierungen für  $T_h = 100$  K, 200 K, 300 K. Die einfache Theorie sagte für diesen Fall Verluste voraus, die proportional  $t_h \cdot \theta_D = T_h$  verlaufen (Gl. 11-3.5.). Diese Voraussage wird in einem Streubereich von  $\pm 4$  % resp.  $\pm 5.5$  % für  $T_h = 300$  K resp. 100 K erfüllt. Die Abweichungen rühren von den unterschiedlichen Werten von  $c_\lambda$ ,  $\zeta'$  und  $L_\theta$  her. Die Drahtparameter der adiabaten Leiter sind nur eine Funktion von  $t_h$  und stimmen innerhalb eines Streubereiches von maximal  $\pm 5$  % mit den für Cu in Abb. VII-4.6. für  $\epsilon = 0$  aufgezeichneten Werten überein.

Die Prognose, dass bei idealer Kühlung sowohl  $q^*$  wie auch  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ}$  von  $t_h$  abhängen wird von Ni, Al und Cu, wie die Abb. XV und XVI-4.6. zeigen, für  $q^*$  mit einer Streuung  $\pm 1\%$  und für  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ}$  mit  $\pm 3\%$  erfüllt. Die Verluste von Ag liegen ebenfalls im erwähnten Streubereich. Na und Pb weisen einen wesentlich tiefer liegenden Verlauf von  $q^*(t_h)$  auf als Ni, Al, Cu und Ag. Be hingegen, das mit einem Differenzbetrag von  $-0.2 \text{ mW/A}$  aufgezeichnet werden musste, verursacht wesentlich höhere Verluste. Die Erklärung für diese

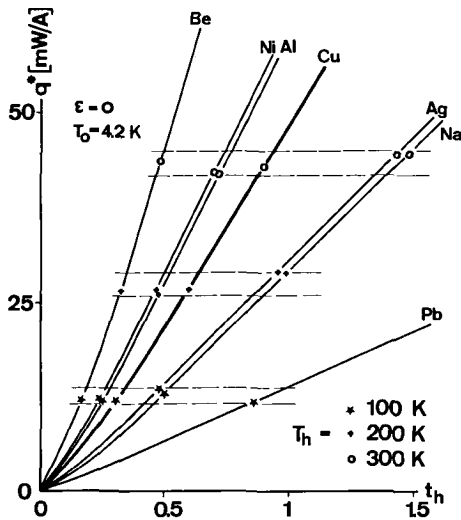


Abb. XIV-4.6. Thermische Verluste verschiedener Leitermaterialien für den adiabaten Betrieb als Funktion von  $t_h$ .

Abweichungen ergibt sich aus dem Umstand, dass  $t_0$  für die verschiedenen Metalle nicht konstant ist, sondern  $4.2 / \theta_D$  beträgt ( $t_{0 \text{ Be}} = 0,672 \cdot 10^{-2}$ ,  $t_{0 \text{ Pb}} = 4,66 \cdot 10^{-2}$ ). Dadurch ist bei gleichbleibendem Wert von  $f_p$  der Wert von  $f_\lambda(t_0)$  unterschiedlich.

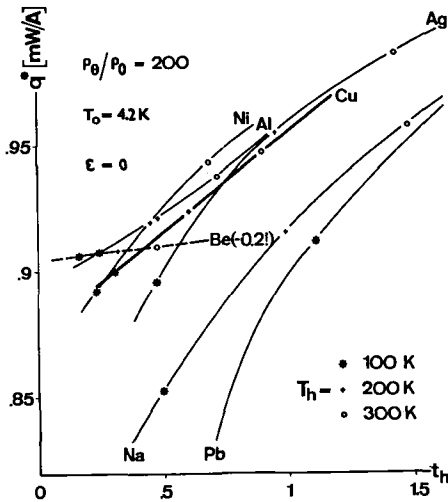


Abb. XV-4.6. Thermische Verluste idealgekühlter Zuleitungen aus verschiedenen Metallen. Für die relativen Unterschiede muss berücksichtigt werden, dass die Ordinate nicht mit null beginnt und dass Be mit einer Differenz von  $-0.2\text{ mW/A}$  aufgetragen wurde.

Die in Abb. XVI-4.6. zusammengestellten Abweichungen des optimalen Drahtparameters, die für Ag, Na und Pb (Differenzbetrag + 10) ausgeprägt negativ und für Be positiv sind, können auf dieselbe Weise erklärt werden. Zwar würden geringere Wärmeströme allein grössere Drahtparameter ergeben. Wie jedoch schon in Gl. 7-1.2. angegeben wurde, geht der Wert  $\lambda_T$  in die Integration ein. Da die mittlere Wärmeleitfähigkeit im Intervall  $t_o$  bis  $t_h$  für  $0,6 \cdot 10^{-2} \leq t_o \leq 5 \cdot 10^{-2}$  mit zunehmendem Wert von  $t_o$  stärker zunimmt als  $q$ , ergeben sich von dieser Seite her für höhere Werte von  $\theta_D$  auch höhere Werte für den optimalen Drahtparameter.

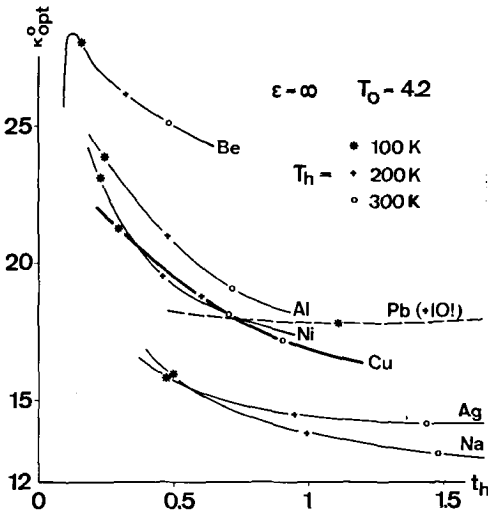


Abb. XVI-4.6. Drahtparameter idealgekühlter Zuleitungen aus verschiedenen Metallen (Ordinate beginnt nicht mit 0 und Pb weist eine Differenz von +10 auf!)

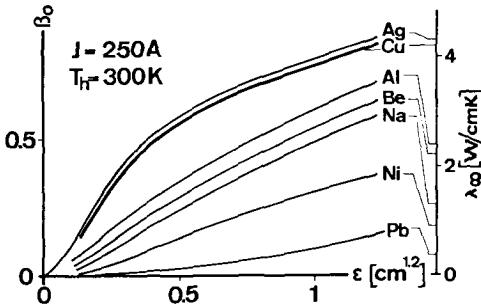


Abb. XVII-4.6. Zusammenhang zwischen der Kühlintensität  $\beta_0$  und der Kühlwirkung  $\epsilon$  für verschiedene Metalle. Die Abhängigkeit von der Stromstärke ist analog derjenigen von Cu in Abb. X-4.6.

Die numerische Auswertung erfolgte für alle Metalle im Intervall  $50 \text{ K} \leq T_h \leq 400 \text{ K}$ . Für Be wurden deshalb auch Werte von  $t_h = 0,1$  berechnet. In diesem Bereich ist deutlich festzustellen, dass der optimale Drahtparameter nach dem Durchlaufen eines spitzen Maximums gegen null abfällt. Dieser Verlauf, der von der einfachen Theorie vorausgesagt wird und mit den Angaben in Kap. 3.7. (Abb. 1-3.7.) übereinstimmt, tritt auch bei allen andern Optimalkurven für  $t_h < 0,15$  ein.

Nachdem nun das Verhalten von  $\kappa_{\text{opt}}^0$  und  $q^*$  für  $\epsilon = 0$  und  $\epsilon = \infty$  im Vergleich mit den Werten von Cu dargestellt wurde, könnte geschlossen werden, dass sich die Abweichungen für einen gegebenen Wert von  $\epsilon$  im gleichen Streubereich bewegen. Wie eingangs dieses Kapitels erwähnt wurde, hängt die Wärmeübertragungsfläche  $0$  bei einem gegebenen Wärmestrom im Leiter von  $\lambda$  ab, wodurch die totale Kühlwirkung stark beeinflusst wird. Eine Vergleichsmöglichkeit bietet der Zusammenhang  $\beta_0 - \epsilon$ , wie er für Cu in Abb. X-4.6. dargestellt ist. Aus Abb. XVII-4.6. ist ersichtlich, dass die Art des Leitermaterials einen starken Einfluss auf den Wert von  $\beta_0(\epsilon)$  ausübt. Je höher  $\lambda_\infty$  ist, desto grösser ist die Kühlintensität  $\beta_0$  einer gegebenen Leitergeometrie. Ein Vergleich eines Leitermaterials mit Cu ist für den Fall der realen Kühlung nur möglich, wenn derjenige Wert von  $\epsilon_{\text{Cu}}$  gewählt wird, der denselben Wert von  $\beta_0$  wie die tatsächliche Kühlwirkung  $\epsilon$  des entsprechenden Metall ergibt. Daraus folgt, dass es konstruktiv am einfachsten ist, mit Ag eine gute Kühlintensität zu erreichen. Eine Pb oder Ni-Zuleitung wirkungsvoll zu kühlen bedarf hingegen eines grossen Aufwandes. Der Druckabfall des ausströmenden Gases hängt jedoch nicht nur von der Kühlwirkung sondern auch von  $F/l_{\text{opt}} \sim J \cdot \lambda_\infty$  ab. Es ist deshalb nicht möglich, vorauszusagen, welches Metall den geringsten Strömungswiderstand für denselben Wert von  $\beta_0$  zur Folge hat.

#### 4.7. Vergleich mit den Ergebnissen der einfachen Theorie

Mit Hilfe des Rechenprogrammes konnte das gestellte Problem quantitativ gelöst werden. Es drängt sich nun ein Vergleich mit den Ergebnissen der einfachen Theorie (Kap. 3) auf. Neben den allgemeinen Erkenntnissen über das prinzipielle Verhalten, die durch die exakte Berechnung bestätigt wurden, stellt das Nomogramm (Abb. II-3.5.) die konzentrierteste quantitative Aussage der einfachen Theorie dar. Ein Versuch, die numerischen Ergebnisse dieses Kapitels mit dem Nomogramm zu vergleichen führt zu keinem aussagekräftigen Resultat. Der Einfluss des Restwiderstandes, der in der einfachen Theorie vernachlässigt wurde, wirkt sich verwirrend aus.

Die wichtigsten Schlüsse, die aus dem Nomogramm gefolgert werden konnten, sind in Abb. III-3.5. zusammengestellt. Sie bieten sich zu einem Vergleich an. Dieser Vergleich wird in Abb. I-4.7. dargestellt. Die Kurven aus Abb. III-3.5. sind dünn eingezeichnet, die errechneten hingegen dick. Alle Kurven sind mit dem dazugehörenden Wert von  $T_h$  und  $T_o$  bezeichnet und die berechneten gehören zudem zu einem bestimmten Wert des Restwiderstandes. Am einfachsten wird diese dreiparametrische Darstellung so gelesen, dass zuerst aus den Markierungen für  $T_h$  (vertikal) und  $T_o$  (horizontal) die zum gesuchten Wertepaar gehörenden Kurven herausgelesen werden. Anhand der Strichart kann der gefragte Restwiderstand ermittelt werden. Letztlich kann der Vergleich dieser Kurve mit den entsprechenden Ergebnissen der einfachen Theorie (dünne Kurven) vorgenommen werden.

Gesamthaft wird das von der einfachen Theorie vorausgesagte Verhalten qualitativ bestätigt. Die zusätzliche Abhängigkeit vom Restwiderstand ist für alle Kurven mit  $T_o = 4.2 \text{ K}$  besonders ausgeprägt. Alle Werte gelten für Cu.

Allgemein kann ausgesagt werden, dass die Abnahme der Verluste im ersten Bereich, vorallem bei He als Kühlmedium, etwas ausgeprägter ist, als die einfache Theorie ergibt. Im Mittelbereich (Steilabfall der Verluste) entspricht



die Steigung der Kurven der Voraussage (-1) innerhalb eines Bereiches von + 17 % für  $\rho_0 = 10^{-9} \Omega \text{ cm}$  und - 24 % für  $\rho_0 = 10^{-7} \Omega \text{ cm}$ . Die Lage der Kurve ist leicht verschoben. Der dritte Bereich (Steigung -0.5) wurde nur für  $T_0 = 4.2 \text{ K}$  und  $\rho_0 = 10^{-8} \Omega \text{ cm}$  berechnet. Es zeigt sich, dass die Steigung eingehalten wird. Das Abbiegen in diesen Bereich erfolgt jedoch bei etwas höheren Verlusten. Trotz der vereinfachenden Annahme  $1/\alpha' = \theta_D$ , die zu den Gl. 8,9,11-3.5. führten, kann gesagt werden, dass das in Abb. III-3.5. zusammengestellte Ergebnis eine brauchbare Näherung für die zu erwartenden Verluste einer Leiteranordnung darstellt.

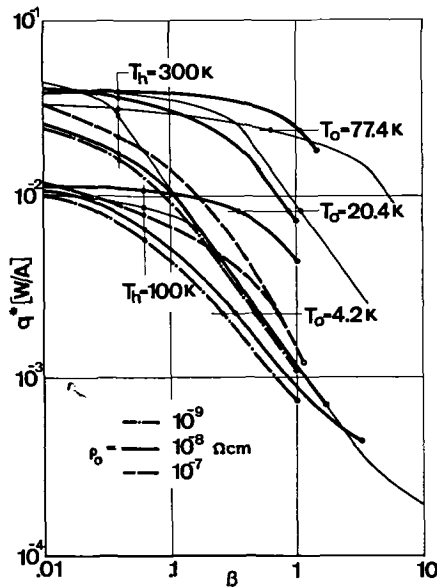


Abb. I-4.7. Vergleich der Verluste von Cu mit den Voraussagen der einfachen Theorie. Die dünn eingezeichneten Linien entsprechen den Aussagen von Abb. III-3.5. (Gl. 8÷11-3.5.). Der Wert von  $\beta$  wurde entsprechend Gl. 14-2. und 11-3.2. berechnet.

Ganz anders verhält es sich mit den optimalen Dimensionen. Diese werden durch die Abweichungen vom Wiedemann-Franz Gesetz so stark verändert, dass sie sich um Größenordnungen von den Ergebnissen der einfachen Theorie unterscheiden. Aus diesem Grunde kann auch das Nomogramm, das den optimalen Drahtparameter ebenfalls enthält, zu keinem brauchbaren Vergleich herangezogen werden.

Zum Abschluss des theoretischen Teils dieser Arbeit können folgende Schlüsse in der Form einfacher Faustregeln angegeben werden:

1. Für eine erste Abschätzung der Verluste genügen die Aussagen der einfachen Theorie (Abb. III-3.5.).
2. Der optimale Drahtparameter kann nur durch eine numerische Lösung der Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Abweichungen vom Gesetz von Wiedemann-Franz berechnet werden.
3. Von den exakten Werten für Cu kann in erster Näherung auf die Verluste und den optimalen Drahtparameter anderer Leitermaterialien geschlossen werden.
4. Die geringsten thermischen Verluste ( $0.5 \text{ mW/A}$ ) für den autonomen, heliumgekühlten Fall ergeben sich an idealgekühlten, zusammengesetzten Leitern hoher Reinheit ( $\rho_{0\text{Cu}} = 10^{-9} \Omega \text{ cm}$ ) mit einem hohen Wert von  $T_c$  (20 K) und einem tiefen Wert von  $T_h$  (100 K).

## 5. DIE VERSUCHE

### 5.1. Die Messeinrichtung

#### 5.1.1. Temperaturmessungen

Um die Uebereinstimmung zwischen Experiment und Theorie überprüfen zu können ist es erforderlich, die Temperaturprofile genau auszumessen. Die zu bestimmenden Temperaturen liegen zwischen 4K und 300 K. Obwohl heute auf dem Markt Geräte erhältlich sind, welche diesen ganzen Bereich mit genügender Genauigkeit bedecken<sup>12)</sup>, wurde aus zwei Gründen nach einem eigenen Verfahren gemessen. Erstens sind die kommerziellen Messfühler so gross, dass sie sich für die räumlich sehr begrenzte Messmöglichkeit an Drähten schlecht eignen und zweitens ist ihr Preis so hoch, dass der Aufwand in keinem Verhältnis zum Ergebnis steht.

Deshalb wurde der Temperaturbereich für alle Messungen in drei Abschnitte aufgeteilt. Im Bereich  $T > 90$  K fanden Cu-Constantan Thermoelemente mit der Referenzlötstelle entweder bei Eis- oder Warmendtemperatur Anwendung. Für Temperaturen zwischen 20 K und 90 K wurden diese an der kalten Seite des Leiters angebracht. Im Bereich  $T < 20$  K kommen nur noch Halbleiterfühler in Frage [78], unter denen die Allen-Bradley Kohlenwiderstände<sup>13)</sup> die bestbekanntesten und meistverwendeten sind.

Die für alle Temperaturmessungen benützten Messapparaturen und die Erarbeitung der dazu gehörenden Eichkurven wird nachstehend kurz beschrieben.

Die im ersten Bereich ( $T > 70$  K) verwendeten Thermoelemente wurden aus kommerziellem Constantan<sup>14)</sup> und verschiedenen Kupfersorten selbst hergestellt.

---

12) Ge/Pt Thermosonde Nr. 692055-3 resp. Modell 146AF, Honeywell AG, Zürich.

13) Importeur für die Schweiz: E.M. Egli, Ingenieurbüro, Zürich.

14) Lieferant: R.+E. Huber AG, Pfäffikon.

Je nach Anforderung wurde entweder der Cu- oder der Konstantan Ast unterbrochen und möglichst direkt an die kompensierten Spannungsmessgeräte angeschlossen.

Für diese Messung standen zwei Einrichtungen zur Verfügung. Die erste besteht aus einem fünfdkadigen Vernier Potentiometer<sup>15)</sup> mit einer maximalen Auflösung von  $1,2 \cdot 10^{-2} \text{ V} \pm 0,5 \cdot 10^{-7} \text{ V}$ . Die Vergleichsspannung wurde an einer thermostatisierten Weston Normalzelle<sup>15)</sup> abgegriffen. Der Nullabgleich erfolgte mit Hilfe eines Galvanometerverstärkers<sup>16)</sup> und eines niederohmigen Galvanometers<sup>16)</sup>. Als Speisung diente eine 2 V Batterie (40 Ah), mit der nach 15 Minuten eine Stromkonstanz von  $20 \text{ mA} \pm 2 \cdot 10^{-6} \text{ mA}$  erreicht werden konnte.

Für schnell auszuführende Messungen standen zwei Nullvoltmeter<sup>17)</sup> mit 18 Bereichen zwischen  $3 \cdot 10^{-6} \text{ V}$  und  $10^{+3} \text{ V}$  als Skalenausschlag zur Verfügung. Diese an sich schon hochohmigen Geräte sind mit einem manuell zu bedienenden Kompensator bis 300 mV ausgerüstet.

Der Verlauf der Thermospannungen von Cu-Konstantan zwischen 70 K und 300 K ist in Standardwerken festgehalten [73], so dass es nicht erforderlich war, diese selbst zu bestimmen. Hingegen wurden Kontrollmessungen zwischen dem Eispunkt (273.15 K) und den normalen Siedepunkt von  $\text{N}_2$  (77.35 K) mit 33 verschiedenen Lötstellen und Cu-Aesten mit unterschiedlichen Restwiderständen ausgeführt. Die Resultate lagen in einem Bereich  $5460 \mu\text{V} \pm 21 \mu\text{V}$ , was einer Messunsicherheit von ungefähr  $\pm 2 \text{ K}$  bei 77 K entspricht. Es konnte vor allem kein Einfluss der Qualität (Restwiderstand) des Kupfers festgestellt werden, was mit den Beobachtungen von *Giauque* [74] übereinstimmt. Die Messeinrichtung für den zweiten Bereich ist dieselbe wie für den ersten, handelt es sich doch auch um die Bestimmung einer elektromotorischen Kraft.

---

15) Hersteller: Cambridge Instruments, G. Glatz, Zürich

16) Hersteller: W.G. Pye Co. Ltd., vertreten durch Unicam Instruments, Basel

17) Modell 419A Hewlett Packard, Zürich

Auch in diesem Temperaturbereich waren keine Eichmessungen erforderlich, da der Verlauf der Thermospannung durch die anerkannten Messungen von Powell, Bunch und Corruccini [76] bekannt ist. Die Kontrollmessungen mit denselben 33 Lötstellen wie im ersten Bereich ergaben Werte von  $720 \mu\text{V} \pm 14 \mu\text{V}$ . Mit dem Auflösungsvermögen der beschriebenen Messeinrichtung gelingt es, Temperaturen bei 20 K ( $58 \mu\text{V}$ ) mit einer Genauigkeit von  $\pm 1.5 \text{ K}$  ( $\pm 10 \mu\text{V}$ ) zu bestimmen.

Für  $T < 20 \text{ K}$  wurde die Temperaturabhängigkeit des ohm'schen Widerstandes von Kohlenwiderständen zur Temperaturbestimmung herangezogen. Wie Clement und Quinell [77] zeigten, kann diese Abhängigkeit durch folgende dimensionsbehaftete Formel beschrieben werden:

$$1/T = \alpha_{-1}/\ln R + \alpha_0 + \alpha_1 \ln R \quad 1-5.1.$$

Die drei Koeffizienten unterscheiden sich von Widerstand zu Widerstand und bleiben nur während eines Experimentes konstant. Eine grosse Anzahl von Versuchen hat jedoch gezeigt, dass die Veränderungen, die bei  $220 \Omega$   $1/8 \text{ W}$  Allen-Bradley Widerständen im Bereich  $T > 4.2 \text{ K}$  im Temperaturverhalten nach einem Abkühlprozess auftreten, vernachlässigbar klein sind. Mit 9 Widerständen wurden Widerstandsmessungen bei folgenden sechs Temperaturen durchgeführt: 7.2 K ( $T_c$  von Pb), 4.2, 4.0, 3.5, 3.0 und 2.5 K. Die letzteren fünf Temperaturen wurden durch Abpumpen des Dampfes über dem flüssigen He erzeugt. Aus diesen Messungen wurden die drei Koeffizienten von Gl. 1 nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate [59] für jeden Widerstand ausgeglichen. Die Widerstandsmessungen erfolgten mit einer sechsdekadigen Wheatstone'schen Brücke<sup>18)</sup>, die je nach Bereich mit einem HP-Nullvoltmeter oder dem Galvanometerverstärker abgeglichen wurde.

---

18) Modell 43328 Cambridge Instruments

Im Gegensatz zu den Widerstandsmessungen an den AB-Kohlenwiderständen, bei denen der Widerstand der Zuleitungen nicht ins Gewicht fällt, mussten die Restwiderstände der verwendeten Metallproben als Potentialvergleichsmessungen durchgeführt werden. Der Spannungsabfall eines  $10 \Omega$  Normwiderstandes<sup>19)</sup> wurde mit demjenigen der im He Bad in Serie geschalteten Metallprobe bekannter Länge und Querschnittsfläche verglichen. Die für diese Messmethode erforderliche Stromkonstanz wurde durch die Speisung des Messkreises durch eine 80 Ah 6 V Batterie verwirklicht.

### 5.1.2. Messung der Stoffwerte des Metalls

Obwohl der Verlauf der thermischen Leitfähigkeit und des elektrischen Widerstandes als Funktion der Temperatur und des Restwiderstandes durch viele Publikationen (siehe Kap. 4.1. bis 4.3.) bekannt sind, wurden zur Ueberprüfung des in Kap. 4.3. übernommenen Modells für  $f_p$  und  $f_\lambda$  an zwei Proben eigene Messungen durchgeführt. Zu diesem Zwecke wurde kommerzieller Elektrolytkupferdraht mit einem Restwiderstand von  $\rho_o = 2,1 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ cm}$  und Reinstkupferdraht mit  $\rho_o = 1,1 \cdot 10^{-9} \Omega \text{ cm}$ <sup>20)</sup> verwendet.

Die benützte Versuchsanordnung ist schematisch in Abb. 1-5.1. aufgezeichnet. Ein Drahtstück der Probe 1 ist unten in einem thermostatisierten Cu-Block 2 eingelötet und oben in guten thermischen Kontakt mit einer bifilar gewickelten Manganinwiderstandsheizung 3. Die Probe wird durch einen Nylondraht 4, der an einem mit Strahlungschutzblechen gegen die Längswärmestrahlung versehen Neusilberröhrchen 5 befestigt ist, durch axialen Zug von aussen in der Vertikalen gehalten. Um den konvektiven Wärmeaustausch zu verhindern, kann der Innenraum über den Pumpstutzen 6 evakuiert werden. Der koaxiale Strahlungsschild 7 reduziert die radiale Wärmestrahlung auf die Hälfte. Die Zuleitungen zu den Temperaturmessstellen  $M_1$  und  $M_2$  und die Speisungs- und

---

19) Standard Resistor Model 3504 B Tinsley Corp.

20) Produkt 8220 h Koch Light Laboratories, H. Spitz, Zürich.

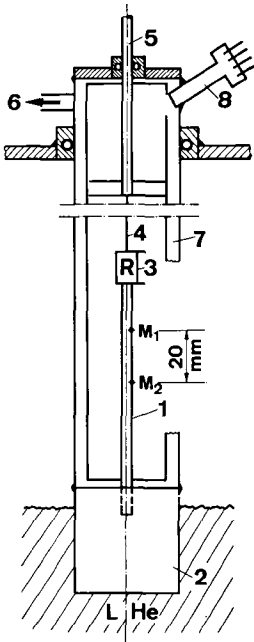


Abb. 1-5.1. Versuchsanordnung zur Messung der thermischen Leitfähigkeit der Probe 1 als Funktion der Temperatur (Beschreibung siehe Text)

Potentialdrähte des Heizwiderstandes R wurden durch eine speziell thermisch isolierte vakuumdichte<sup>21)</sup> Durchführung 8 direkt an die Instrumente geführt.

Die Temperaturen an den Messstellen  $M_1$  und  $M_2$  (und im Bereich der Thermo-elementmessungen auch ihre Differenz) wurden als Funktion des Stromes durch den aus Potentialmessungen bekannten Widerstand R gemessen. Die Berechnung von  $\lambda_T$  erfolgte entsprechend der Beziehung:

$$\lambda_{(T_1+T_2)/2} = \frac{l}{F (T_1 - T_2)} (\Delta V_R \cdot J_R + Q^*(T_R)) \quad 1-5.1.2.$$

Der maximale Wärmeeinfall  $Q^*(T_R)$  kann durch Messungen bei  $J_R = 0$  abgeschätzt werden. Mit der Temperatur  $T_R$  des Widerstandes und der Annahme der Gültigkeit des Wiedemann-Franz Gesetzes ( $\lambda \sim T/\rho_0$ ) ergab sich bei einem Innenvakuum von  $2 \cdot 10^{-6}$  Torr<sup>22)</sup> für alle Messanordnungen ein Fehler, der für  $T_R < 10$  K weniger als 5 % von  $\Delta V_R \cdot J_R$  ausmachte.

Die Ergebnisse dieser Messungen sind in Abb. II-5.1. in doppeltlogarithmischem Masstab aufgetragen. Daraus ist ersichtlich, dass die in Kap. 4.1. erwähnten Abhängigkeiten feststellbar sind. Für  $\rho_0 = 2,1 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ cm}$  wird auch der

21) Hersteller Schott u. Gen, Mainz

22) Hochvakuumpumpe BALZERS, bestehend aus einer Oeldiffusionspumpe (DIFF 170) und einer Vorvakuumpumpe (DUO 5)

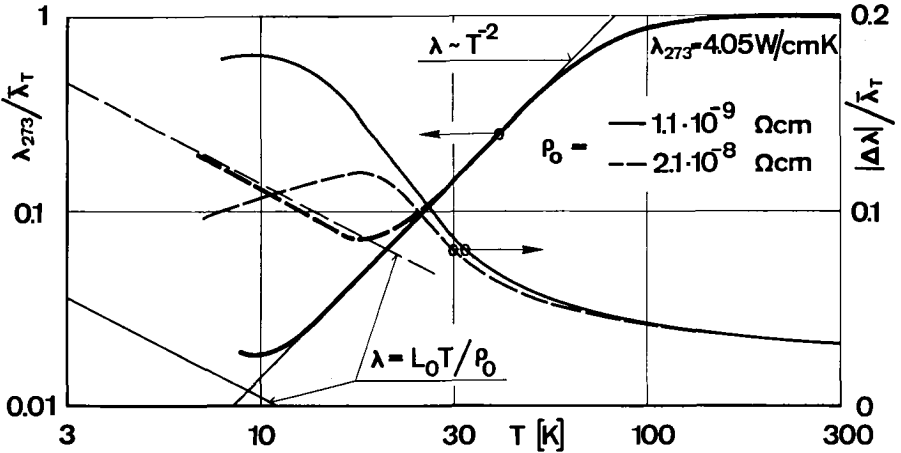


Abb. II-5.1. Thermischer Widerstand von zwei Kupferproben unterschiedlicher Reinheit. Die Streuung der Messungen  $\Delta\lambda$  erreicht in der Umgebung des Leitfähigkeitsmaximums maximale Werte weil die zu messenden Temperaturdifferenzen sehr klein werden.

durch die Gültigkeit des Wiedemann-Franz Gesetzes vorgegebene Verlauf gut angenähert. Für die reinere Probe hingegen liegen die experimentellen Ergebnisse für  $\lambda$  in diesem Bereich tiefer als die Voraussage. Da die gewählte Messmethode für diese Werte eine Streuung von maximal 18 % ergibt, kann vermutet werden, dass die Abweichung von der Theorie teils auf eine mangelhafte Bestimmung der Temperaturdifferenz  $T_1 - T_2$  (0,2 bis 0,4 K bei  $\Delta V_R \cdot J_R = 0,1$  bis 0,2 W) zurückzuführen sei.

Die für die Berechnung des Transformationsfaktors  $c_\lambda$  benötigte Lage des Bereichs, in welchem  $\lambda$  wegen der Abnahme der thermischen Schwingungen zunimmt ( $\lambda \sim T^{-2}$ ) konnte durch diese Experimente mit genügender Genauigkeit festgestellt werden. Die in Abb. I-4.3. dick eingezeichnete Linie für Cu entspricht den Ergebnissen der eigenen Messungen.

Die Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes von der Temperatur konnte mit dieser Einrichtung nicht bestimmt werden, da die Potentialdifferenz zwischen den Messstellen auch bei den maximal möglichen Stromstärken noch zu gering waren, um brauchbare Resultate zu ergeben. Kontrollmessungen in flüssigem  $N_2$  ergaben für beide Proben denselben Widerstand ( $\rho_{77} = 0,210 \cdot 10^{-6} \Omega \text{cm}$ ), der um -2,1 % von der Bloch-Grüneisen Beziehung abweicht.



## 5.2. Die Versuche im He-Grossbehälter

### 5.2.1. Die Versuchseinrichtung

Die in diesem Abschnitt beschriebenen Experimente dienen ausschliesslich der Ueberprüfung der in Kap. 4.6. zusammengestellten Ergebnisse der numerischen Lösung der Differentialgleichungen 9/10-2. mit den Annahmen für  $f_p$ ,  $f_\lambda$  und  $f_a$  wie sie in Kap. 4 dargelegt wurden. Wie schon in Kap. 4.6.1. ausgeführt wurde, lässt sich die Richtigkeit der Theorie am aussagekräftigsten durch einen Vergleich des theoretischen und gemessenen Temperaturprofils von Gas und Leiter nachweisen. Die thermischen Verluste, der Drahtparameter und der Spannungsabfall ergeben globalere, jedoch leichter zu messende Vergleichswerte.

Zu diesem Zweck wurde eine einfache Versuchsanlage aufgebaut, die in einem kommerziellen, stickstoffgekühlten 50 l flüssig Helium Behälter<sup>23)</sup> eingebaut werden konnte. Dadurch wurden die Kryostatverluste auf einem minimalen Wert gehalten ( $Q_{\text{Omax}}^* = 25 \text{ mW}$ ) und Experimente mit einem geringen Verbrauch an flüssigem Helium ermöglicht.

Abb. 1-5.2. zeigt den schematischen Aufbau des Versuches. Der durch einen evakuierbaren Mantel (Anschluss V) in radialer Richtung isolierte Leiterkanal ist mit seinem untern Ende in das flüssige Helium eingetaucht. Der Kupferblock Cu in dem die beiden durch eine 1 mm Mica Isolierplatte getrennten (siehe Kanalquerschnitt) Drähte  $D_1$  und  $D_2$  (Durchmesser 1 mm) eingelötet sind, hält die Temperatur  $T_o = 4.2 \text{ K}$  des kalten Endes konstant. Am warmen Leiterende wird die Temperatur  $T_h$  durch den Wasserkreislauf des Thermostaten Th eingehalten. Die Stromversorgung der Zuleitungen erfolgt über die Batterie U (6 V, 300 Ah) und die drei in Serie geschalteten, jedoch überbrückbaren, variablen Widerstände  $R_1$  (0,95  $\Omega$ , 38 A),  $R_2$  (2,7  $\Omega$ , 16 A) und  $R_3$  (6,8  $\Omega$ , 3,4 A). Zusätzliche Kryostatverluste bis 5 W können durch die Joule'sche Erwärmung des

---

23) SULFRIAN Cryogenics 50 l LHe, 30 l L N<sub>2</sub> Kugelbehälter mit Vakuumisolation.

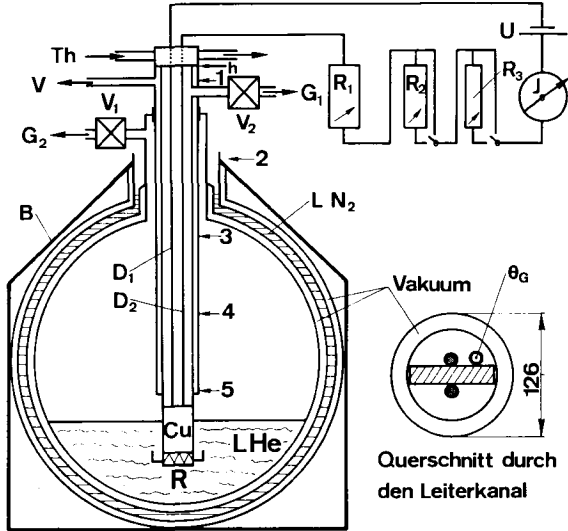


Abb. 1-5.2. Schema der Versuchsanlage und He-Grossbehälter.  
Beschreibung siehe Text

Heizwiderstandes  $R$  ( $\approx 300 \Omega$ ) erzeugt werden. Das verdampfende Gas kann entweder durch den Leiterkanal und die auf  $15^\circ\text{C}$  thermostatierte Gasuhr  $G_1$  oder ohne Kontakt mit den Zuleitungen direkt durch die Gasuhr  $G_2$  im Helium Rückgewinnungssystem fließen. Somit gelingt es, den in der Differentialgleichung eingeführten Faktor  $\beta'$  durch die Einstellung der Ventile  $V_1$  und  $V_2$  zu variieren.

An sechs Stellen längs des 121 cm langen Doppelleiters konnten die Gas und Leitertemperaturen sowie das Potential gemessen werden. Die Gastemperaturmessstellen wurden zum Schutz vor Strahlung in ein koaxiales Neusilberrohrchen ( $\varnothing 2,1 \text{ mm}$ ) eingebettet und die Leitertemperaturmessstellen direkt auf den Leiter gelötet.

In dieser Form wird die Anlage mit folgenden Konstanten der Theorie beschrieben:  $\kappa^\circ/\text{J} = 0,29 \text{ A}^{-1}$ ,  $\epsilon = 0,007$ . Durch eine Füllung des Leiterkanals mit

sechs PVC Stäbchen ( $\varnothing = 3 \text{ mm}$ ) gelang es, einen Wert der Kühlwirkung von  $\epsilon = 0,1$  zu verwirklichen.

Während eines Experimentes stellten  $\beta'$  und  $M_o^*$  die einzigen beeinflussbaren Parameter dar. Der adiabate Fall ( $\beta' = 0$ ) konnte mit dieser Anlage nicht verwirklicht werden, da eine Evakuierung des Leiterkanals nicht möglich war. Ein gänzliches Schliessen des Ausflussventils  $V_1$  regte sofort thermische Oszillationen [79] im Leiterkanal an. Dadurch wurde der Kühleffekt stark verbessert und die Verlustrate vergrössert.

Der optimale Betriebspunkt für einen festen Wert von  $\beta'$  und  $M_o^*$  wurde durch eine kontinuierliche Erhöhung der Stromstärke bis die Temperaturdifferenz der obersten Thermoelemente ( $T_h - T_l$ ) gleich null wurde erreicht. Um die thermischen Verluste mit genügender Genauigkeit berechnen zu können, war ein stationärer Betrieb von minimal 15 Minuten (min. 100 l He Gas bei 288 K) erforderlich.

### 5.2.2. Resultate

Mit einer ersten Serie von Experimenten wurden für einen festen Betriebspunkt ( $\beta', Q_o^*$ ) die sechs Gas- und Leitertemperaturen ausgewertet und mit den Ergebnissen der Theorie verglichen. Die Berechnung der entsprechenden Temperaturen war insofern nicht trivial als die Ausgangswerte für die numerische Berechnung nicht mit derjenigen des Experimentes übereinstimmten. Für das Experiment stellte  $\kappa^o/J_{opt} = 0.29 \text{ A}^{-1}$  eine Ausgangsgrösse dar und die Stromstärke  $J_{opt}$  musste gesucht werden. Im Programm hingegen, wie auch in der Praxis, wird von einer angenommenen Stromstärke ausgegangen und der dazugehörige Wert von  $\kappa^o_{opt}$  gesucht. Dieser Umstand erforderte minimal vier Rechengänge bis der theoretische Vergleichszustand in einem Bereich von  $0.95 \leq \frac{\kappa^o_{opt}/0.29}{J_{opt}} \leq 1.05$  gefunden werden konnte.

Tabelle 6 zeigt einen charakteristischen Vergleich zwischen Experiment und Theorie. Die gemessenen Leitertemperaturen liegen im Mittel um 7 %, die

Tabelle 6

Vergleich zwischen gemessener und berechneter Leiter- und Gastemperatur für  $\epsilon = 0,007$ ,  $\kappa_{opt}^o = 5,25$ ,  $\rho_o = 2,1 \cdot 10^{-8} \Omega \text{cm}$  (Cu),  $\beta' = 1$ ,  $Q_o^* = 2,25 \text{ W}$ ,  $J_{opt \text{ exp}} = 36 \text{ A}$ ,  $J_{opt \text{ th}} = 38,2 \text{ A}$

Pos.	x	Leitertemperatur T			Gastemperatur $\theta_G$		
		exp. K	theor. K	Abw. %	exp. K	theor. K	Abw. %
h	121	293	293	-	111	97	+ 14,4
1	120	292	292	-	106	96	+ 10,4
2	90,8	244	232	+ 5,2	84	78	+ 7,7
3	60,5	72	69	+ 4,4	30	26	+ 15,4
4	30,0	29	27	+ 7,4	13	11,8	+ 10,2
5	10	8	7,2	+11,1	5,5	4,8	+ 14,6
0	0	4,2	4,2	-	-	-	-
-	cm	K	K	%	K	K	%

Gastemperaturen um 12 % höher als die Voraussagen. Diese in allen Vergleichen festgestellte Tendenz rührt daher, dass die theoretische Voraussage des optimalen Stromes grösser ausfällt als der im Experiment gefundene Wert. Der Grund dafür muss vor allem im Modell für den Wärmeaustausch gesucht werden. Die theoretische Kühlwirkung einer gegebenen Geometrie ist besser als die sich im Experiment einstellende. Im Beispiel von Tabelle 6 ergibt eine Kühlwirkung von  $\epsilon = 0,0064$  eine Uebereinstimmung von  $J_{opt \text{ th}}$  und  $J_{opt \text{ exp}}$  und die Abweichung der Temperaturen wird geringer, bleibt jedoch positiv. Dafür kann von der Anordnung des Experimentes her eine Erklärung gefunden werden. Die absoluten Abweichungen sind in der Umgebung des warmen Endes am grössten. Die in der Theorie vernachlässigte Längswärmeleitung in der Kanalwand und im He Gas selbst stellen bei den hohen Temperaturgradienten in jenem Bereich eine Fehlerquelle dar. Die Genauigkeitsanforderungen an die Positionierung der Messstellen und deren räumliche Ausdehnung können ebenfalls quantitativ schwer erfassbare Fehler zur Folge haben.

Am kalten Ende werden die absoluten Abweichungen gering und liegen nach der Korrektur von  $\epsilon$  in den Grenzen der in Kap. 5.1.1. beschriebenen Messgenauigkeit.

Mit einer weiteren Serie von Experimenten wurde die Abhängigkeit der globaleren Größen  $J_{\text{opt}}$ ,  $q^*$ ,  $\Delta V$  und  $\Delta T$  (resp.  $\beta$ ) von  $\beta'$  und  $Q_o^*$  untersucht und mit der Theorie verglichen. Abb. II-5.2. zeigt die Ergebnisse des hochreinen Cu-Drahtes mit  $\epsilon = 0.007$  in einer Doppeldarstellung.

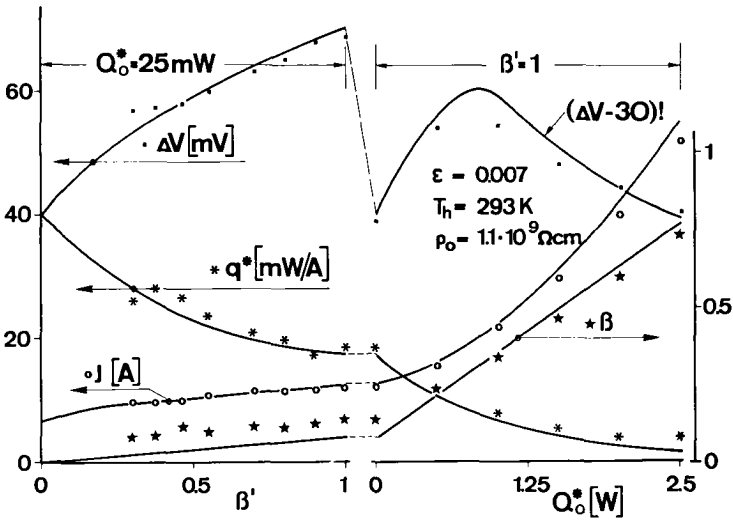


Abb. II-5.2. Vergleich der Messergebnisse mit den numerischen Berechnungen. Die Berechnung der Kühlintensität  $\beta$  erfolgte entsprechend Gl. 14-2. und 11-3.2. mit den Temperaturen von Gas und Leiter am warmen Ende. Die Beschriftung der Kurven bezieht sich auf den Ordinatenmassstab in der Richtung der Pfeile.

In der linken Bildhälfte ist  $\beta'$ , d.h. das Oeffnungsverhältnis der beiden Ventile  $V_1$  und  $V_2$  bei  $Q_o^* = 25 \text{ mW}$  ( $J_R = 0$ ), als Abszissenmassstab gewählt. Rechts hingegen wird die Abszisse durch die im Widerstand R erzeugten Kryo-  
statverluste  $Q_o^*$  bei geschlossenem Ventil  $V_2$  gebildet. Diese Darstellungsart ist

deshalb sinnvoll, weil der lokale Wärmestrom vom Leiter ans Gas von links nach rechts zunimmt, da der an der Kühlung teilnehmende Gasmengenstrom ebenfalls zunimmt. Diese Zunahme ist am besten an dem berechneten Verlauf von  $\beta$  ersichtlich. Alle Verläufe werden beim Abszissenwechsel geknickt, weil bei der gegebenen Geometrie und dem gewählten Abszissenmassstab der Einfluss von  $Q_o^*$  auf die Kühlintensität viel grösser ist als derjenige von  $\beta'$ . Eine Auftragung über  $\beta$  wäre übersichtlicher, jedoch mit Fehler behaftet, da  $\beta$  eine willkürliche Rechengrösse darstellt. Zudem könnten die Messpunkte über  $\beta'$  nicht mehr unterscheidbar aufgezeichnet werden.

Die ausgezogenen Linien stellen die theoretischen Ergebnisse, die Messpunkte die Mittelwerte der experimentellen Resultate dar.  $Q_o^*$  und  $\Delta V$  beziehen sich auf den Halbkanal, sind also die Hälfte der am Experiment eingestellten, resp. abgelesenen Werte. Die durchschnittlichen Abweichungen liegen im Rahmen der anhand von Tabelle 6 besprochenen Fehler. In der linken Bildhälfte ( $Q_o^* = 25 \text{ mW}$ ) ist für  $\beta' < 0,4$  der erwähnte Einfluss der einsetzenden thermischen Oszillationen und die dadurch entstehende Verbesserung der Kühlwirkung feststellbar. Der Spannungsabfall wurde für  $Q_o^* > 0$  übersichtlichkeitshalber mit einem Fehlbetrag von 30 mV aufgezeichnet. Die Abweichungen liegen ebenfalls im Rahmen und lassen sich durch die erwähnten Fehlerquellen erklären. Die thermischen Verluste entsprechen der Voraussage am genauesten, da sie, wie schon erwähnt, hauptsächlich von den relativ fehlerfrei erfassbaren Vorgängen bei tiefen Temperaturen abhängen. Die relativ sehr hohen Abweichungen bei hohen Kryostatverlusten können durch eine ungenügende Anzahl der, wie im folgenden Abschnitt beschrieben wird, sehr stark streuenden Messergebnisse zurückgeführt werden.

Anhand der Messpunkte und des dazugehörigen theoretischen Verlaufes, die in der rechten Bildhälfte dargestellt sind, wurde versucht, eine Korrektur für die Kühlwirkung  $\epsilon$  abzuleiten. Dies scheiterte jedoch daran, dass die für  $Q_o^* \neq 0 = \text{const.}$  eine zusätzliche Abhängigkeit von  $\beta'$  eintritt. Die Korrektur beträgt jedoch maximal -15 % für sehr kleine Werte von  $\beta$  und minimal

-5 % im Bereich von  $\Delta V_{\max}$ . Alle diese Aussagen wurden durch die hier nicht beschriebenen Messungen an kommerziellem ( $\rho_0 = 2.1 \cdot 10^{-8} \Omega \text{cm}$ ) Kupferdraht weitgehend bestätigt.

Ein Hauptzweck dieser Arbeit besteht in der Voraussage der minimalen Verluste des autonomen Falles. Experimentell exakt kann dieser nur durch die Verwirklichung eines idealen Wärmeaustausches nachgeprüft werden. Der für eine Annäherung dieses Zustandes erforderliche konstruktive Aufwand ist jedoch sehr gross. Deshalb wurde mit der Geometrie  $\epsilon = 0,1 \text{ cm}^{1.2}$  ein anderer Weg beschritten. Durch die Vergrösserung der Kryostatverluste verbessert sich die Kühlwirkung und für jede Geometrie kann der autonome Fall durch die Anwendung einer bestimmten Kryostatverlustrate simuliert werden. In der einfachen Theorie wird dieser Fall durch  $\beta = 1$  dargestellt, wobei  $\beta$  nach den Gleichungen 14-2. und 11-3.2. berechnet werden kann. Die exakten Berechnungen liefern einen genaueren Wert für die zur Simulation des autonomen Falles benötigten Kryostatverluste: Diese ergeben sich aus der Bedingung:

$$q_{\text{aut}}^* \equiv q^*_{\beta' = 1}, Q_0^* = 0, \quad \epsilon = \infty \equiv q^*_{\beta' = 1}, Q_0^* > 0, \quad \epsilon = 0.1 \quad 1-5.2.$$

Abb. III-5.2. zeigt die Versuchsergebnisse der zu diesem Zwecke durchgeführten Messerien mit beiden Cu Qualitäten und den dazugehörigen Kryostatverlusten zur Nachahmung des idealen Wärmeaustausches. Eine exakte Bestimmung der thermischen Verluste bei hohen Kryostatverlustraten ist mit experimentellen Schwierigkeiten verbunden da  $M^* \ll M_0^*$ . Obwohl der Gasvolumenstrom in der Gasuhr  $G_2$  mit grösstmöglicher Genauigkeit bestimmt wurde, ergab sich eine so grosse Messunsicherheit des Einzelresultates, dass nur die statistische Auswertung mehrerer Messergebnisse desselben Betriebspunktes zuverlässige Schlüsse erlauben. Die so ausgewerteten Resultate sind samt ihren Streuungen in Abb. IV-5.2. eingezeichnet und durch eine Kurve verbunden.

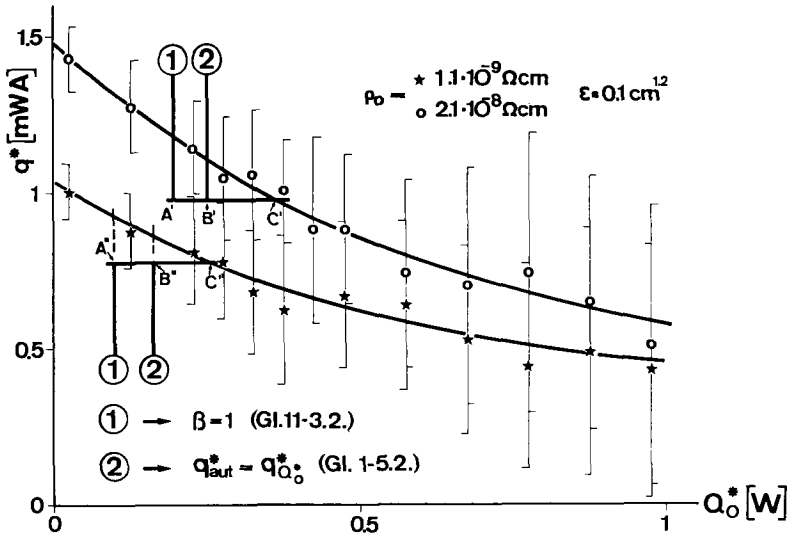


Abb. III-5.2. Simulation der Verluste des autonomen Leiters durch die Anwendung zusätzlicher Kryostatverluste für zwei Leiterqualitäten. Die für jeden Messpunkt eingetragenen statistischen Streuungen werden bei hohen Kryostatverlusten relativ gross weil  $M^* \ll M_o^*$ . Die ausgezogenen Kurven entsprechen dem ausgeglichenen Verlauf der gemessenen Punkte.

Die beiden horizontalen Geraden stellen die autonomen Verluste der beiden Kupfersorten, wie sie sich bei der Berechnung nach Gl. 15-2. ( $T = \theta_G$ ) ergeben dar. Die Abszissenmarkierungen ① und ② bezeichnen Werte von  $Q_o^*$  bei welchen nach den verschiedenen Modellen die autonomen Verluste simuliert werden können. Für beide Cu Sorten ergibt das einfachste Modell ( $\beta = 1$ ) den geringsten Wert von  $Q_o^*$ . Für dieses Modell müssten die dick ausgezogenen Kurven durch die Punkte A' resp. A'' anstelle von C' resp. C'' gehen. Das nur durch numerische Berechnungen zu behandelnde komplizierte Modell (Gl. 1-5.2.) erfordert Kryostatverluste, die mit ② bezeichnet sind. In diesem Fall müssten die ausgezogenen Kurven durch die Punkte B' resp. B'' gehen.



Die autonomen Verluste werden in beiden Fällen bei noch höheren Kryostatverlusten erreicht.

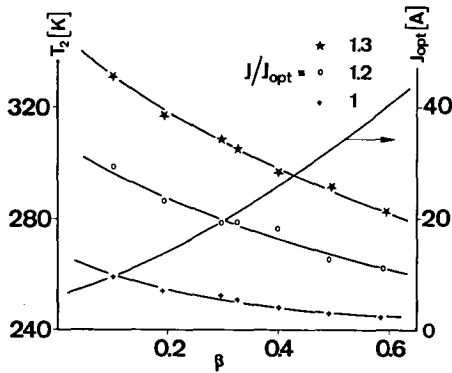


Abb. IV-5.2. Erhöhung der Temperatur  $T_2$  ( $x = 90,8$  cm) im nichtoptimalen Betriebszustand. Die Abhängigkeit von der Kühlintensität rührt vom Einfluss des realen Wärmeaustausches zwischen Leiter und Gas her.

Im Bereich der Annäherung des autonomen Falles betragen die Streuungen  $\pm 25$  %, wodurch die Aussagekraft dieses Vergleiches entsprechend herabgesetzt wird. Für beide Cu Qualitäten liefert die einfache Modellvorstellung ( $\beta = 1$ ) den niedrigsten Wert von  $Q_o^*$ . Die numerische Auswertung führt zu einem grösseren Wert und die im Experiment zur Erzeugung der autonomen Verluste benötigten Kryostatverluste betragen noch mehr. Die Erklärung für die letzte Unstimmigkeit muss in der Messunsicherheit des Experimentes einerseits und der mangelhaften Erfassung des Wärmeaustausches durch die Theorie andererseits gesucht werden.

Die Ergänzung der Versuchsanlage mit dem hochreinen Cu ( $\rho_o = 1,1 \cdot 10^{-9} \Omega \text{ cm}$ ) durch einen auf den Leiter aufgelöteten kommerziellen Supraleiter<sup>24)</sup> ermög-

24) Cu stabilisierter Nb-25 % Zr Supercon ( $T_c = 16$  K)

lichte den Betrieb zusammengesetzter Leiter. Die Messungen der Verluste wurden nach dem Test von Student [80] mit denjenigen normaler Leiter verglichen und es konnte kein signifikanter Unterschied festgestellt werden. Der gemäss den Berechnungen zu erwartende Unterschied beträgt in beiden Fällen weniger als die Streuung. Zudem muss vermutet werden, dass der hochreine Leiter durch das Auflöten des Supraleiters zusätzlich verunreinigt wurde und dadurch im zusammengesetzten Betrieb einen höheren Restwiderstand aufwies.

Die bisher beschriebenen Experimente sowie alle numerischen Berechnungen beziehen sich auf den optimalen Betriebspunkt. Mit der letzten Serie von Experimenten im He-Behälter wurde das Verhalten im nichtoptimalen Fall untersucht. Während für  $J < J_{opt}$  die erwartete Abnahme der Verluste gegen den Wert der reinen Leitungsverluste festgestellt wurde, konnte für  $J > J_{opt}$  keine signifikante Zunahme der spezifischen Verluste beobachtet werden. Dieses Verhalten deckt sich mit den Voraussagen über das nichtoptimale Verhalten in Kap. 3.4. Der Temperaturanstieg im Leiter für  $J > J_{opt}$  erwies sich nicht nur als eine Funktion von  $J/J_{opt}$ . Wie Abb. IV-5.2. zeigt ist auch eine Abhängigkeit von der Kühlintensität  $\beta$  festzustellen, die durch den in Kap. 4.4. (Abb. 1-4.4.) beschriebenen Einfluss des Kühlgases erklärt werden kann. Wegen der festen Anordnung der Thermolemente war eine Bestimmung von  $T_{max}$  nicht möglich, da  $x_{T_{max}} = f(J/J_{opt}, \beta)$ . Die aufgezeichnete Temperatur  $T_2$  ( $x_2 = 90,8$  cm) nimmt für einen festen Exzesstrom bei niedrigen Kühlintensitäten einen höheren Wert an als bei guter Kühlung, obwohl der Betrag des Exzesstromes bei höheren Werten von  $\beta$  wesentlich grösser ist als bei geringer Kühlintensität.

Gesamthaft betrachtet darf festgestellt werden, dass die in diesem Kapitel beschriebenen Experimente die Resultate der numerischen Berechnungen mit der für die Praxis erforderlichen Genauigkeit bestätigen. Die Annahme für den Wärmeübergang erwies sich als der schwächste Punkt der Theorie. Entsprechend einer Bemerkung von H. Quack könnte das von der vielleicht etwas fraglichen, in der Literatur jedoch bestätigten Definition des thermischen

Durchmessers (Gl. 11-4.4.) zur Berechnung der Nusselt-Zahl herrühren (Vergl. dazu Grassmann [70, Kap. 9.14]).

### 5.3. Die Versuche im Helium Dewar

#### 5.3.1. Die Versuchsanlage

Die in Kap. 3.7. angedeutete Möglichkeit einer Instabilität des Temperaturprofils konnte durch die Berechnungen in Kap. 4 nicht verifiziert werden. Da der theoretische Zugang zu diesem Problem sehr schwierig ist, wurde mit einigen Experimenten versucht, diesen Fragenkomplex zu beleuchten.

Entsprechend der Voraussagen ist die Wahrscheinlichkeit für eine Instabilität am grössten für mittelmässig bis schlecht gekühlte ( $0,1 < \beta < 0,5$ ), möglichst reine ( $\frac{d\lambda}{dT} < 0$ ) Leiter mit einer tiefen Verankerungstemperatur. Es wurde eine Versuchsanlage entworfen, die diese Bedingungen erfüllte. Diese konnte jedoch nicht mehr in einen He-Grossbehälter eingebaut werden, sondern sie wurde, wie Abb. 1-5.3. schematisch zeigt, in einen Versuchsstand für flüssig He Experimente montiert. Das an das Rückgewinnungssystem angeschlossene He Dewargefäss<sup>25)</sup> ist zur Isolation in ein zweites, mit flüssigem Stickstoff gefülltes Dewargefäss eingetaucht. Der nur einfach geführte Versuchsdraht aus hochreinem Kupfer ( $\rho_0 = 1,1 \cdot 10^{-9} \Omega \text{ cm}$ ) ist zwischen dem He-Bad und dem im oberen Teil des Experimentierraumes montierten Behälter für flüssigen Stickstoff eingespannt. Zwischen den auf diese Weise thermostatisierten Enden ( $T_h = 77,4 \text{ K}$ ,  $T_o = 4,2 \text{ K}$ ) befinden sich drei Temperaturmessstellen, nämlich  $T_1$  ( $x_1 = 116 \text{ cm}$ ),  $T_2$  ( $x_2 = 5 \text{ cm}$ ) und  $T_R$  ( $x_R = 95 \text{ cm}$ ). An der Messstelle R ist ein bifilar gewickelter Manganin Heizwiderstand mit einem Widerstand von  $98 \Omega$  angebracht, der Heizleistungen bis 1 W erzeugen kann. Um die erforderliche geringe Kühlwirkung zu erzielen ist über den auf ein Neusilberröhrchen

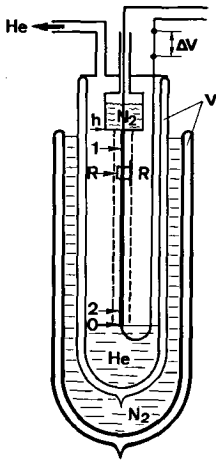
---

25) KGW heliumbeständiges Spezialglas Typ 79 F. W. Stofer, Binningen

spiralgewickelten Versuchsdraht lose ein weiteres Neusilberröhrchen gestülpt.

Mit dieser Versuchsanlage war es nicht möglich, die thermischen Verluste zu bestimmen, weil die Grösse der Kryostatverluste unbekannt war.

Abb. 1-5.3. Schema der Anordnung der Experimente im He Dewargefäss. Beschreibung im Text



### 5.3.2. Die Resultate

Mit einer ersten Serie von Experimenten wurde versucht die Existenz eines weitem stabilen Temperaturprofils durch die optimalen Betriebspunkte nachzuweisen. Nach der Erhöhung des Stromes auf den optimalen Wert ( $J_{\text{opt}} = 52 \text{ A}$ ,  $\kappa_{\text{opt}}^{\circ} = 34,2$ ) wurde das Temperaturprofil durch eine Wärmeabgabe des Widerstandes R verändert. Nach Abschalten der Heizleistung wurde der Abkühlvorgang des Leiters verfolgt. Die ersten Versuche zeigten keinen Hinweis auf ein weiteres stabiles Temperaturprofil. Eine Veränderung der Position des Heizwiderstandes liess erkennen, dass dadurch eine Veränderung des Temperaturprofils während der Heizphase eintrat, die das zweite mögliche Profil begünstigte. Die endgültige Wahl von  $x_R = 95 \text{ cm}$  führte schliesslich zum Erfolg.

Die Ergebnisse der dazugehörigen Experimente sind in Abb. II-5.3. zusammengestellt. Für eine gegebene Heizleistung  $Q_R^*$  stellt sich im Leiter ein bestimmtes Temperaturprofil ein, welches durch die Aufzeichnung der Temperatur  $T_R$  charakterisiert werden kann. Für Heizleistungen  $Q_R^* < 500$  mW kühlt sich das Profil nach Abschalten des Stromes durch R wieder auf den Ausgangswert ab.

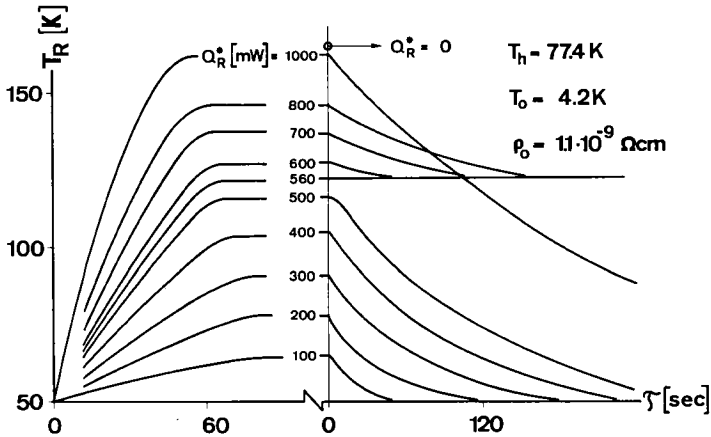


Abb. II-5.3. Zeitlicher Verlauf der Temperatur  $T_R$  ( $x_R = 95$  cm) nach dem Ein- resp. Ausschalten verschiedener Leistungen im Heizwiderstand R. Im optimalen Profil nimmt  $T_R$  den Wert von 50 K, im zweiten möglichen Profil hingegen einen solchen von 121 K an.

Für  $Q_R^* = 560$  mW tritt diese Abkühlung nicht mehr ein. Der Leiter behält das neue Temperaturprofil bei, was sich auch am vergrößerten Wert des Spannungsabfalles erkennen lässt. Der Anstieg der Temperatur  $T_2$  deutet auf die höhere Verlustrate hin. Dieses neue Profil erwies sich als so stabil, dass die Reduktion der Temperatur  $T_R$  auf ihren Ausgangswert nur durch ein Abschalten und Neuanfahren des Stromes verwirklicht werden konnte. Für  $560 \leq Q_R^* \leq 800$  mW kühlte sich  $T_R$  nach Abstellen des Heizstromes auf den Wert des neuen Profiles (122 K) ab und behielt diesen Wert stabil bei.

Für höhere Heizleistungen kühlte sich das Profil nach der Heizperiode wieder auf den Ausgangswert ab. Es ist jedoch anzunehmen, dass sich das zweite stabile Profil auch nach Heizleistungen von  $Q_R^* > 800 \text{ mW}$  einstellen würde, wenn die Position des Heizwiderstandes entsprechend verändert werden könnte.

Aus diesen Experimenten darf der Schluss gezogen werden, dass das vorausgesagte zweite stabile Profil durch den optimalen Punkt existiert. Durch eine richtige Positionierung eines Heizwiderstandes ist es auch möglich, dieses mit höheren Verlusten verbundene Profil stabil zu erzeugen.

In der Praxis dürfte wohl nirgends ein Heizwiderstand an einem Leiter anzutreffen sein. Es interessiert deshalb die Frage, unter welchen praktischen Umständen ein Uebergang in das nichtoptimale Profil auftreten kann. Im stationären Gleichstrombetrieb ist ein spontaner Profilwechsel nicht wahrscheinlich. Auch Versuche mit störungsfreiem Wechselstrombetrieb<sup>26)</sup> ergaben keine Abweichung vom Optimalprofil. Eine externe Störung der Kühlintensität durch Absaugen des He Dampfes direkt über der Flüssigkeitsoberfläche hatte auch keine Veränderung des Temperaturprofils zur Folge:

Exzesströme hingegen können den Profilsprung verursachen. Abb. III-5.3. stellt die Resultate der diesbezüglichen Experimente anhand der Temperatur  $T_R$  dar. Für  $J/J_{\text{opt}} = 1,12$  ist  $T_R$  eine eindeutige Funktion der Stromstärke. Bei einem Exzesstrom von 13 % tritt jedoch eine langsame Zunahme von  $T_R$  ein, die bei der Reduktion des Stromes nicht mehr an derhelben Stelle auftritt. Es kommt zu einer Art Hystereseerscheinung, die wie aus dem Temperaturverlauf in Abb. III-5.3. ersichtlich ist. Der Spannungsabfall und die andern registrierten Temperaturen zeigen einen ähnlichen Verlauf.

---

26) Speisung durch MFO Schweissaggregat Typ RED 140

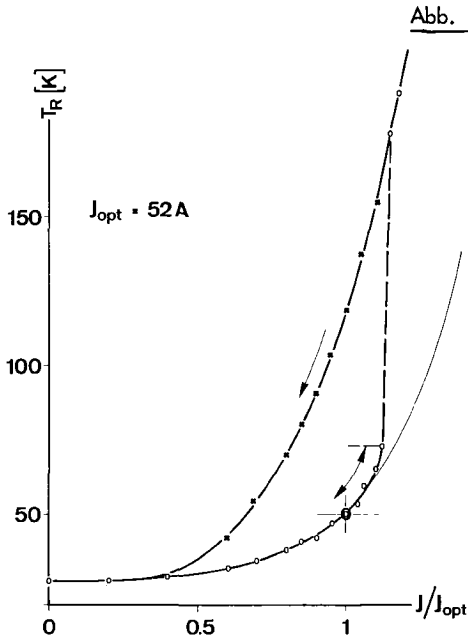


Abb. III-5.3. Hysteresereerscheinung des Temperaturprofils am Beispiel von  $T_R$ . Für  $J > 1,13 \cdot J_{opt}$  erfolgt der Uebergang vom optimalen in das zweite mögliche Temperaturprofil mit  $T_R = 121 K$  für  $J = J_{opt}$

Diese Ergebnisse können mit den in Kap. 3.7. angestellten Ueberlegungen erklärt werden. Zwar gelang es experimentell nicht, das zeitliche Hineinwachsen des durch das Minimum von  $\Delta T$  bedingten Temperaturhöckers in den Leiter feststellen zu können. Eine andere Erklärung für das reproduzierbare Auftreten des Profilsprunges bei  $J/J_{opt} = 1,13$  konnte nicht gefunden werden.

Die von Oberhauser und Sukhatme [35] festgestellte starke Verlustzunahme für  $J > J_{opt}$  kann durch diesen Effekt erklärt werden. Dasselbe trifft auf die von Kullmann [67] erwähnte Anfahrinstabilität zu.

Mit den in diesem Kapitel beschriebenen Experimenten gelang es, einige experimentelle Hinweise auf die Umstände, unter denen eine Instabilität des Temperaturprofils auftreten kann zu erarbeiten. Eine genaue Kenntnis dieses Effektes würde jedoch sehr viel weitgehendere Experimente erfordern, die den Rahmen dieser ausschliesslich theoretischen Arbeit gesprengt hätten.

## 6. VERGLEICH MIT ANDERN THEORIEN UND MESSUNGEN

Nachdem die ausführlich dargestellten theoretischen Ergebnisse an einigen Stellen durch experimentelle Untersuchungen überprüft wurden, sollen diese Resultate abschliessend mit publizierten Theorien und Messungen quantitativ verglichen werden. Die von Fournet und Mailfert [31] vorgeschlagene und von Nigohossian [41] angewendete Darstellungsmethode im  $\log q^* - \log \kappa_{opt}^o$  <sup>27)</sup> Diagramm eignet sich für diese Betrachtung besonders. Der Vergleich soll sich auf Zuleitungen zu Supraleitern ( $T_o = 4,2$  K, He) mit einer Warmendtemperatur von  $273 \leq T_h \leq 300$  K beschränken.

Eine Durchsicht der in der Einleitung zusammengestellten Literatur ergibt wegen des Fehlens einer Datenbank nur sehr wenige Werte, die zu einem solchen Vergleich herangezogen werden können. Diese sind in Abb. I-6. zusammengestellt und mit den Kurven für  $\rho_o = 10^{-8} \Omega \text{ cm}$  (16) resp.  $10^{-9} \Omega \text{ cm}$  (15) für reelle Kühlung verglichen. Die eingetragenen Messpunkte 17 beziehen sich auf die in Abb. III-5.2. dargestellten Experimente.

Die in der Literatur gefundenen Werte beziehen sich ausschliesslich auf adiabate (1 - 4) und autonome (5 - 11, 13) Leiter. Die Verlustrate der adiabaten Leiter zeigt für die verschiedenen Autoren nur geringe Abweichungen. Der Drahtparameter ist restwiderstandsabhängig und da die Angaben über den Restwiderstand in der Literatur meistens fehlen (Ausnahme 2, 4 und 13) kann keine Aussage über die Uebereinstimmung der optimalen Dimensionen gemacht werden. Mit der Ausnahme des experimentell-theoretischen Vergleichspaares 5-6 liegen alle Angaben für autonome Leiter zwischen den in Kap. 4.6. dargestellten Abhängigkeit von  $\rho_o$  (14) und der entsprechenden Kurve (13) von

---

27) Die ursprüngliche Abszisse beschränkte sich auf  $\log (l \cdot J/F)$ . Durch eine Addition der in Tabelle 3 zusammengestellten Werte von  $\log (\sqrt{\rho_o / \theta_D} \cdot \lambda_{\infty}^{-1})$  wird die Abszisse zu  $\log \kappa_{opt}^o$  und damit ist das Diagramm für alle Leitermaterialien gleichzeitig anwendbar.



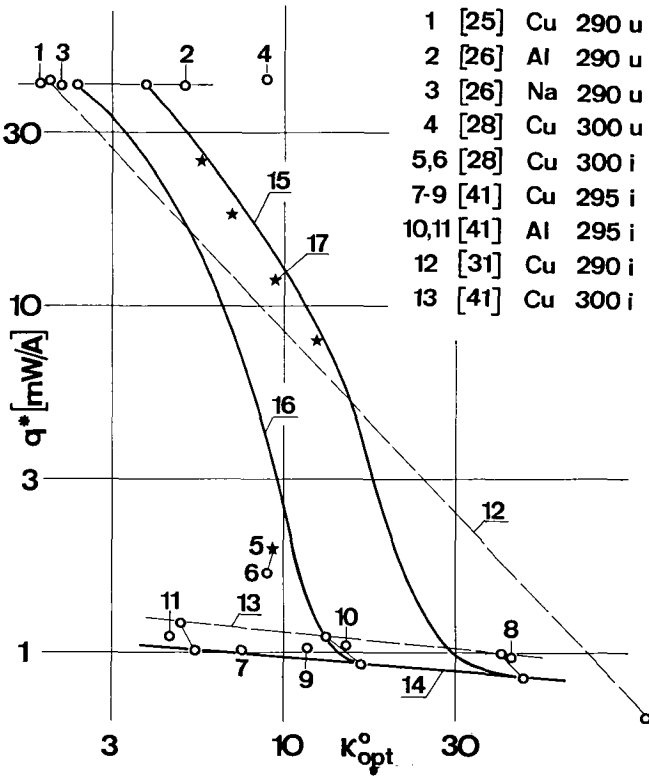


Abb. 1-6. Vergleich der Theorie (14,15,16) und Messungen (17) mit publizierten Ergebnissen (1-13) für  $T_o = 4.2$  K und  $T_h = 290$  K  
 \* Experimente    ° Berechnungen    i autonomer Fall    u adiabater Fall.

Die dick eingezeichnete Linie 14 entspricht der Kurve mit  $T_o = 4.2$  K,  $T_h = 300$  K und  $\epsilon = \infty$  in Abb. VIII-4.6. Die Linie 13 wurde von Lock [40] berechnet. Die Kurve 16 entstand aus einer Kombination der Werte für  $T_o = 4.2$  K,  $T_h = 300$  K der Abb. III und VII-4.6. unter Berücksichtigung aller Werte von  $\rho_o$ . Im Gegensatz zur Kurve 16, die für  $\rho_o = 10^{-8} \Omega \text{ cm}$  gilt, entspricht Kurve 15 einem Restwiderstand von  $\rho_o = 10^{-9} \Omega \text{ cm}$ . Die sternförmigen Punkte 17 stammen von den in Kap. 5.2.2. beschriebenen experimentellen Resultaten. Die Gerade 12 entspricht einem Vorschlag von Fournet und Mailfert [31], der durch diese Zusammenstellung widerlegt wird.

Lock [40]. Aus dieser Darstellung könnte sogar auf die Reinheit der zitierten publizierten Resultate geschlossen werden.

Ueber den Zwischenbereich der reellen Kühlung liegen weder theoretische noch experimentelle Angaben vor. Die von Köhler [44] durchgeführten Verlustberechnungen des realen Falles können nicht dargestellt werden, da die optimalen Dimensionen fehlen. Aufgrund einfacher Ueberlegungen kamen Fournet und Mailfert [31] zur Aussage, dass in allen Fällen realer Kühlung  $\log q^*$  eine lineare Funktion von  $\log \kappa_{\text{opt}}^{\circ}$  sei. Der angegebene Verlauf (12) hat sich jedoch durch die exakten Berechnungen nicht bestätigt. Auch passen die von Fournet [31] angegebenen Dimensionen des autonomen Leiters ( $\kappa_{\text{opt}}^{\circ} = 115$ ) nicht in den Rahmen der bekannten Resultate. Der Vergleich zwischen der eigenen Theorie und publizierten Werten für Warmtemperaturen von 77.4 K ergibt einen ähnlichen Streubereich.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die eigenen theoretischen Resultate an den wenigen Vergleichsstellen den andern Ergebnissen nicht grundsätzlich widersprechen. Die Abweichungen sind auf die unterschiedlichen Annahmen zurückzuführen. Da die Annahmen für die numerischen Berechnungen die Wirklichkeit wahrscheinlich für den allgemeinen Fall exakter als alle andern Annahmen annähern, darf angenommen werden, dass die Resultate dieser Arbeit das gestellte Problem auch quantitativ am umfassendsten darstellt.

## 7. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Mit der vorliegenden Arbeit gelang es, ausgehend von analytisch erfassbaren Ueberlegungen, die in der Einleitung gesteckten Ziele zu erreichen und damit eine Lücke im Schrifttum dieses engen Teilgebietes der Tieftemperaturtechnik zu schliessen.

Als wichtigster Punkt darf die prinzipielle Abklärung des allgemeinen qualitativen und quantitativen Verhaltens von Tieftemperaturzuleitungen betrachtet werden. Der Zugang zu den Kennzahlen des Problems kann über einige leicht messbare Ausgangsgrössen gefunden werden.

Die wichtigsten neuen Aspekte, die sich aus dem Ablauf dieser Arbeit ergaben, sind die Fragenkomplexe der Stabilisierung von nicht stationär betriebenen Leitern und der Instabilität des Temperaturprofils unter gewissen Bedingungen. Schon die erste andeutungsweise Erwähnung dieser Erscheinungen [46] stiess auf rege Aufmerksamkeit in interessierten Fachkreisen.

Es wäre jedoch falsch anzunehmen, alle mit Zuleitungen zu Tieftemperaturanlagen zusammenhängenden Probleme seien gelöst. Zum Abschluss dieser Arbeit seien noch kurz diejenigen Fragen zusammengestellt, die einer weiteren Abklärung bedürfen. Auf der theoretischen Seite ist dies die Behandlung von Legierungen und das quantitative Erfassen des nichtoptimalen Verhaltens. Das Modell für den Wärmeübergang erwies sich als die schwächste Annahme für die numerischen Lösungen. Auf diesem Gebiete ist ein weiterer experimentell-theoretischer Aufwand erforderlich um zu einer vollkommeneren Vorstellung zu gelangen. Letzlich sind es die Stabilisierung und die thermische Instabilität die einer umfangreichen experimentellen Untersuchung bedürfen, da eine Erweiterung der Theorie wegen der Komplexität der Zusammenhänge kaum quantitative Ergebnisse liefern kann.

SYMBOLVERZEICHNIS

a	Kühlparameter	-	3-3.2.
$a_n$	Koeffizienten $n = -1, 0, 1$	$K^{-1}$	1-5.1.
c	spez. Wärme des Leiters	$J g^{-1} K^{-1}$	
$C_e$	spez. Wärme der Elektronen	$J cm^{-3} K^{-1}$	
$c_p$	spez. Wärme des Gases bei $p=const.$	$J g^{-1} K^{-1}$	
$c_\lambda$	Transformationsfaktor der Temperatur	-	5-4.3.
D	Drahtdurchmesser	cm	
$D_{hr}$	hydraulischer Durchmesser	cm	10-4.4.
$D_{th}$	thermischer Durchmesser	cm	11-4.4.
d	Kanaldurchmesser	cm	7-4.4.
e	Elementarladung	$1,60 \cdot 10^{-19} C$	
F	Querschnittsfläche des Leiters	$cm^2$	
$F_2$	Funktion zur Berechnung von $\lambda_{th}$	-	4-4.1.
$f_a$	Wärmeübergangsfunktion	-	7-2.
$f_\lambda$	Leitungsfunktion	-	5-2.
$f'_\lambda$	Ableitung von $f_\lambda$ nach t	-	
$f_p$	Widerstandsfunktion	-	6-2.
H	Magnetfeld	Gauss	1-4.6.
$\Gamma_n(x)$	Funktion	-	16-4.1.
$i, i_o$	Enthalpien	$J g^{-1}$	Abb. 1-3.8.
J	Stromstärke im Leiter	A	
$K_2$	Exponent	-	11-3.3.
k	Temperaturvariation am warmen Ende (dynamische Stabilisierung)	K	5-3.6.

$k_B$	Boltzmannkonstante	$1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$	
$k_J, k_\lambda$	Kühlintensitätsfaktoren	-	4-3.6.
$L = L(T)$	Lorenzkonstante	$\text{W } \Omega \text{ K}^{-2}$	
$L_o$	Lorenzkonstante für $T = \theta_D$	$2.445 \cdot 10^{-8} \text{ W K}^{-2} \Omega$	
$l$	totale Leiterlänge	cm	
$L_\theta$	Lorenzkonstante für $T = \theta_D$	$\text{W } \Omega \text{ K}^{-2}$	10-3.5.
$M^*$	Gasmengenstrom der thermischen Verluste $q^* J/r$	$\text{g s}^{-1}$	9-3.2.
$M_T^*$	totaler Gasmengenstrom	$\text{g s}^{-1}$	9-3.2.
$M_o^*$	Gasmengenstrom der Kryostatverluste $Q_o^*$	$\text{g s}^{-1}$	9-3.2.
$\Delta m$	Speichermasse pro Länge $\Delta x$	g	
$m$	Exponent	-	7-4.5.
$Nu$	Nusseltzahl	-	
$n$	Temperaturrexponent von $f_a$	-	12-4.4.
$n_\eta$	Temperaturrexponent von $\eta_G$	-	Tab. 4
$n_\lambda$	Temperaturrexponent von $\lambda_G$	-	Tab. 4
$O$	Oberfläche des Leiters = $u \cdot x$	$\text{cm}^2$	
$P_A, P_M, P_J$	Koeffizienten der Differentialgl.	-	11-13-2.
$P_p$	Koeffizient	-	16-2.
$Pr$	Prandtlzahl		
$Q^*$	Wärmestrom im Leiter	W	
$Q_a^*$	konvertiver Wärmestrom zwischen Gas und Leiteroberfläche		
$Q_\lambda^*$	Wärmestrom im Leiter für $J = 0$	W	
$Q_p^*$	Wärmestrom im Leiter, der durch die Joule'sche Erwärmung und instationäre Vorgänge bedingt ist.	W	
$Q_o^*$	Kryostatverluste	W	

$\dot{q}$	spez. Wärmestrom im Leiter	$W A^{-1}$	
$q^*$	thermische Verluste $\equiv \dot{q}_{T_0}$	$W A^{-1}$	
$q^\circ$	dimensionslose therm. Verluste	-	5-3.5.
$q_c^*$	kritische thermische Verluste	$W A^{-1}$	1-3.4.
$q_s^*$	therm. Verluste zusammengesetzter Leiter	$W A^{-1}$	1-3.8.
$q_o^*$	reduzierte Kryostatverluste	$W A^{-1}$	2-3.4.
R	elektrischer Widerstand	$\Omega$	
Re	Reynoldszahl	-	
r	Verdampfungswärme des Kältemittels	$J g^{-1}$	
r'	scheinbare Verdampfungswärme	$J g^{-1}$	10-3.2.
T	Leitertemperatur	K	
$T_c$	Sprungtemperatur des Supraleiters	K	
$T_h$	Warmend- resp. Verankerungstemp.	K	
$T_h$	Verankerungstemperatur am Ende der stromlosen Phase (dynamische Stab.)	K	
$T_J$	Leitertemp. während der Stromphase	K	
$T_{max}$	maximale Temperatur eines nicht optimal dimensionierten Leiters	K	
$T_\lambda$	Leitertemp. während der Leitungsphase	K	
$T_o$	Kaltend- resp. Badtemperatur	K	
t	dimensionslose Leitertemperatur	-	3-2.
$t_K$	Nullwiderstandstemperatur	-	5-3.2.
$t_{max}$	dimensionslose Form von $T_{max}$	-	
t'	Ableitung von t nach $\kappa$	-	
t''	Ableitung von t' nach $\kappa$	-	
$t_o$	dimensionslose Form von $T_o$	-	7-3.2.
$t'_o$	Wert von t' an der Stelle $x = 0$	-	8-3.2.
$t^o$	reduzierte Temperaturdifferenz	-	4-5.3.

$t^*$	Intervallgrenze	-	Kap.3.7.
$\Delta T$	Temperaturdifferenz zwischen Gas und Leiter am warmen Ende	K	
$\Delta t$	Differenz	-	8-3.3.
$\Delta T_o, \Delta T_i$	Integrationschritte	K	Kap.4.5.5.
$u$	Umfang des Drahtes	cm	
$\bar{w}$	mittlere Geschwindigkeit der El.	cm s <sup>-1</sup>	
$V$	Verlustverhältnis $q^*/\Delta V$	-	Kap.4.5.1.
$V_D$	Volumen aller Drähte	cm <sup>3</sup>	
$V_T$	Gesamtvolumen des Kanales	cm <sup>3</sup>	
$v$	spez. Volumen des Leiters	cm <sup>3</sup> g <sup>-1</sup>	
$v_G$	spez. Volumen des Kühlgases	cm <sup>3</sup> g <sup>-1</sup>	
$v_L$	spez. Volumen des gesättigten Kältemittels	cm <sup>3</sup> g <sup>-1</sup>	
$\Delta V$	Spannungsabfall zwischen dem warmen und kalten Leiterende	V	
$x$	Längskoordinate vom kalten Drahtende an gewählt	cm	
$x_R$	Wert von $x$ an der Stelle des Heizwiderstandes R	cm	
$y$	Variable zur Lösung der Differentialgleichungen in der Phasenebene	-	Kap.4.5.2.
$y'$	Ableitung von $y$ nach $t$	-	3-4.5.
$\alpha$	Wärmeübergangszahl zwischen Gas und Leiter	W cm <sup>-2</sup> K <sup>-1</sup>	
$\alpha'$	Temperaturkoeffizient von $\rho$	K <sup>-1</sup>	1-3.2.
$\beta$	auf die thermischen Verluste bezogene Kühlintensität	-	11-3.2.
$\beta_c$	kritische Kühlintensität	-	9-3.3.

$\beta_J$	Kühlintensität während der Stromphase	-	4-3.3.
$\beta_\lambda$	Kühlintensität während der Leitungsphase	-	4-3.3.
$\beta'$	Anteil des am realen Wärmeaustausch teilnehmenden Kühlgases	-	
$\beta^*$	Grenzkühlintensität	-	8-3.5.
$\beta_0$	Kühlintensität, die für $Q_0^* = 0$ durch die Geometrie des Leiters gegeben ist.	-	14-2.
$\gamma$	Reduktionsfaktor	-	1-3.8.
$\gamma'$	Stoffwertfunktion	-	3-3.4.
$\delta$	Zielfunktion	-	1,2-3.6.
$\epsilon$	Kühlwirkung	cm <sup>1.2</sup>	13-4.4.
$\epsilon_x$	kleiner Wert von x	cm	
$\epsilon_1$	Geometrieparameter	-	3-4.4.
$\epsilon_2$	Leistungsparameter	cm <sup>-1</sup>	4-4.4.
$\epsilon_3$	Packungsparameter	cm <sup>2</sup>	5-4.4.
$\eta_G$	Viskosität des Gases	g cm <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup>	
$\theta_D$	Debye Temperatur des Leiters	K	
$\theta_G$	Gastemperatur	K	
$\psi$	reduzierte Gastemperatur	-	8-2.
$\psi'$	Ableitung von $\psi$ nach $\kappa$	-	
$\kappa$	dimensionslose Längskoordinate	-	4-2.
$\kappa^0$	Drahtparameter	-	6-3.2.
$\kappa_0$	Phasenverschiebung	-	3-3.3.
$\Lambda$	mittlere freie Weglänge der El.	cm	
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit des Leiters	W cm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	
$\lambda_e$	Elektronenanteil von $\lambda$	W cm <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	



$\lambda_G$	Wärmeleitfähigkeit des Gases	$W \text{ cm}^{-1} \text{ K}^{-1}$	
$\lambda_{ph}$	Phonenanteil von	$W \text{ cm}^{-1} \text{ K}^{-1}$	
$\lambda_o$	temperaturproportionaler Anteil von $\lambda$	$W \text{ cm}^{-1} \text{ K}^{-1}$	
$\lambda_\infty$	Wert von $\lambda$ für $T \rightarrow \infty$	$W \text{ cm}^{-1} \text{ K}^{-1}$	5-2.
$\zeta'$	Koeffizient zur Berücksichtigung des Beitrags der "Umklappl"-Prozesse zu	-	4-4.1.
$\rho$	spez. elektrischer Widerstand	$\Omega \text{ cm}$	
$\rho_c$	Uebergangswiderstand zusammengesetzter Leiter	$\Omega \text{ cm}$	Kap.3.8.
$\rho_H$	Magnetowiderstand	$\Omega \text{ cm}$	1-4.6.
$\rho_{th}$	thermischer Anteil von $\rho$	$\Omega \text{ cm}$	
$\rho_\theta$	Wert von $\rho$ bei $T = \theta_D$	$\Omega \text{ cm}$	
$\rho_o$	Restwiderstand	$\Omega \text{ cm}$	
$\tau_J$	Dauer der Stromphase	s	
$\tau_r$	Relaxationszeit	s	
$\tau_\lambda$	Dauer der Leitungsphase	s	
$\omega_1, \omega_2$	Frequenzen	-	2,8-3.3.
$\omega_o$	elementarer Drahtparameter	-	4-3.2.

## QUELLENANGABEN

Ein . nach der Quellennummer bedeutet, dass es sich um ein Buch handelt.

- 1 H. Kamerlingh Onnes: Comm.phys.Lab. Univ. Leiden Nr. 108 (1908), 112 (1909), 119 (1911)
- 2 C. Trepp: A Large Scale Helium Liquefier. Liquid Helium Technology. Annexe 1966-5 au Bull. IIR Boulder S 215/226
- 3 R.B. Currie: A 4° K Joule-Thomson Laboratory Refrigerator. Advances in Cryogenic Engineering 12 (1966), 557/563
- 4 W.E. Keller: Helium-3 and Helium-4 . Intern-Cryogenic Monograph Series, Plenum Press New York 1969
- 5 W.F. Giauque, D.P. McDougall: Phys. Rev. 43 (1933), 768
- 6 F.E. Hoare, L.C. Jackson, N.Kurti: Experimental Cryophysics. Butterworths, London 1961
- 7 H. London: Proc Internat. Conf. Low Temperature Physics Clarendon Oxford 1951, S.157
- 8 P. Grassmann: Ungewöhnliche Kälteprozesse im Bereiche sehr tiefer Temperaturen. Kältetechnik-Klimatisierung 39 (1967), 21, 1217/1226
- 9 D. Philips, J.M. Woodgate, J.B. McKinnon: Comparative Performances and Behaviour of several different types of Dilution Refrigerators. ICEC-3 Berlin 1970 paper 87
- 10 N. Kurti, F.N.H. Robinson, F.E. Simon, A.D.Spoehr: Nature 178 (1956), 450
- 11 D.V. Lounasmaa et al.: A Powerful Dilution Refrigerator for Nuclear Cooling Experiments. ICEC-3 Berlin 1970 paper 86
- 12 J. Hengevoss, H. Wössner: Performance of a Coating Plant with a Cryo Pump . ICEC-3 Berlin 1970, paper 102

- 13 J.J. Thibault: Cryopumping Systems for Different Applications ICEC-3 Berlin 1970, paper 3
- 14 J.C. Walling, F.W. Smith: Solid State Masers and their Use in Satellite Communication System. Philips Technical Review 25 (1963) 11, 289/310
- 15 I. Dietrich: Supraleitung in der Nachrichtentechnik. Vorträge über Supraleitung. Lehr- und Handbücher der Ingenieurwissenschaften Bd. 27 Birkhäuser Verlag Basel 1968
- 16 R.B. McNab, A.D. Appleton: Performance of a Large Superconducting Motor . ICEC-3 Berlin 1970, paper 79
- 17 H.O. Lorch: The Feasibility of Superconducting Power Transformers. Cryogenics 9 (1969)5, 354/361
- 18 R. Fasel, J.L. Olsen: A Superconducting Bridge Rectifier . Proc. Intern. Congr. Refr. Madrid 1969 Bd. I S. 149  
siehe auch Schweizer Patent Nr. 286'255
- 19 C. Doose, W. Schröck-Vietor, D. Tappenhöller: Tieftemperatur-Leistungsübertragung (TLU), Kernforschungsanlage Jülich Interner Bericht 1968
- 20 P.A. Klaudy: Supraleitende Kabel. ETZ-A 89 (1968), 14
- 21 Private Mitteilung von Prof. Dr. P. Grassmann über das Projekt TLU (Zusammenarbeit KFA-Jülich, Siemens, AEG) der Deutschen Forschungs Gemeinschaft.
- 22 F. Birchler, J.P. Damverne, W. Erdt, D. Giesewell, F. Schweisser, J. Schmid: Cryogenic Aspects of the 3.7 m European Bubble Chamber. ICEC-3 Berlin 1970, paper 41
- 23 G. Bogner: Application of Superconductivity . ICEC-3 Berlin 1970, paper 37
- 24 W. Meissner: Thermische und elektrische Leitfähigkeit einiger Metalle zwischen 20 und 373 abs. Annalen der Physik IV. Folge 47 (1915), 1001/1058
- 25 R. McFee: Optimum Input Leads for Cryogenic Apparatus. Rev.Sci.Instr. 30 (1959) 2, 98/102
- 26 R.G. Mallow: Optimum Electrical Leads of Aluminum and Sodium for Cryogenic Apparatus. Rev.Sci.Instr. 33 (1962), 564/565

- 27 H. Sobol,  
J.J. McNicol: Evaporation of He I due to Current Carrying Leads. Rev.Sci.Instr. 33(1962)4, 473/477
- 28 J.E.C. Williams: Counterflow Current Leads for Cryogenic Applications . Cryogenics 3 (1963)6, 234/238
- 29 W. Mercouroff: Minimisation of Thermal Losses due to Electrical Connections to Cryostats. Cryogenics 3 (1963)5, 171/173
- 30 G. Fournet, A. Mailfert: Détermination optimale des conducteurs électriques des cryostats. Cas de l'échange thermique idéal. C.R. Acad. Sc. Paris 257 (1963), 4153/4155
- 31 G. Fournet, A. Mailfert: Détermination optimale des conducteurs électrique des cryostats. Cas de l'échange thermique quelconque. C.R. Acad.Sc.Paris 258 (1964), 103/105
- 32 P.W. Matthews, T.L. Khoo,  
P.D. Neufeld: A Study of Heat Leaks into Cryostats due to Electrical Leads. Cryogenics 5 (1965) 4, 213/215
- 33 A.B. Pippard: Continuous Refrigeration of Current Leads. Cryogenics 5 (1965)2, 81/84
- 34 S. Deiness: The Production and Optimization of High Current Leads, Cryogenics 5 (1965)5, 269/271
- 35 C.J. Oberhauser,  
S.P. Sukhatme: Evaluation of Optimum Current Carrying Leads for Cryogenic Apparatus, CEC 66 Boulder Col. paper E1 322/330
- 36 V.E. Keilin,  
E.Y. Klímenko: Investigation into High Current Leads in Liquid Helium Application. Cryogenics 6 (1966)4, 222/228
- 37 L. Donadieu,  
C. Dammann: Etude des Traversées de Courant pour Enceinte Cryogénique. Revue Générale de l'Electricité 77 (1968)2, 193/203
- 38 L. Donadieu,  
C. Dammann: Theory of Gas Cooled Current Carrying Leads for Cryogenic Apparatus Proc. ICEC-2, Brighton 1968, S 200/203
- 39 N. Inai: Temperature Distribution along a Gas Cooled Cryogenic Lead Wire . Cryogenics 9 (1969)2, 115/118

- 40 J.M. Lock: Optimization of Current Leads into a Cryostat. *Cryogenics* 9 (1969)6, 438/442
- 41 G. Der Nigohossian: Optimisation des Descentes de Courant dans des Enceintes Cryogeniques CEA-R 3167
- 42 P. Bérard: Connexions électriques cryogéniques. Aspects théoretiques. Proc. 12<sup>th</sup> Int. Cong. Refr. Madrid 1969, Vol 1 S 157/171
- 43 D. Guesewell, E.V. Haebel: Current Leads for Refrigerator Cooled Large Superconducting Magnets. ICEC-3 Berlin 1970, paper 22
- 44 J.W.L. Köhler, G. Prast, A.K. de Jonge: Calculation of Losses induced by Current Carrying Leads in Cryogenic Installations. ICEC-3 Berlin 1970, paper 23
- 45 F. Lange, D. Eckert, M. Ending: Gas cooled Current Leads of variable Cross Section for Helium Cryostats. *Cryogenics* 10 (1970)
- 46 M. Rauh: Optimum Dimensions of Current Carrying Leads to Cryogenic Apparatus. ICEC-3 Berlin 1970, paper 21
- 47 . G.K. White: Experimental Techniques in Low-Temperature Physics . 2<sup>nd</sup> edition Clarendon Press. Oxford 1968
- 48 R.L. Powell, H.M. Roder, W.M. Rogen: Low Temperature Thermal Conductivity of some Commercial Coppers. *Journ. Appl. Phys.* 28 (1957)11, 1282/1288
- 49 . C.Y. Ho, R.W. Powell, P.E. Liley: Thermal Conductivity of Selected Materials . Part 1 NSRD-NBS 16-1 1966
- 50 . C.Y. Ho, R.W. Powell, P.E. Liley: Thermal Conductivity of Selected Materials. Part 2 NSRD-NBS 16-2 1968
- 51 H. London: Bemerkung zu Lit. 38 Proc. ICEC-2 Brighton 1968, S.203
- 52 . G.T. Meaden: Electrical Resistance of Metals. Heywood Books, London 1965
- 53 . E.S.R. Gopal: Specific Heats at Low Temperatures. Heywood Books London 1966
- 54 J.L. Olsen: Electron Transport in Metals. Interscience Publishers New York-London 1962

- 55 E. Grüneisen: Die Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes von der Temperatur . Ann. Physik. 16 (1933), 530
- 56 J.L. Olsen: Einige Grundlagen tiefgekühlter Leiter und Supraleiter . Bull SEV 57 (1966)22, 1019
- 57 A.H. Wilson: Second Order Electrical Effects in Metals. Proc. Cambridge Phil. Soc. 33 (1937), 371
- 58 . H. Jones: Theory of Electrical and Thermal Conductivity in Metals. Handbuch der Physik, Bd. 19, S. 227, Springer Verlag, Heidelberg 1956
- 59 . E. Stiefel: Einführung in die numerische Mathematik. Teubner Stuttgart 1961
- 60 . A Compendium of the Properties of Materials at Low Temperature (Phase I) Part I Properties of Fluids WADD Technical Report 60-56, 1960
- 61 . Gleiche Serie wie 60 Part II Properties of Solids
- 62 . Gleiche Serie wie 60 Phase II
- 63 . Landolt Börnstein: Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaft und Technik, Springer Verlag Bd. II 5a, S. 3 (1969)
- 64 . Gleiche Serie wie 63 Bd. II 5b, S. 45/47 (1958)
- 65 E. Stiefel: Vorlesung über gewöhnliche Differentialgleichungen ETH SS 68
- 66 . E. Schmidt: Thermodynamik, 10. Aufl. Springer Berlin 1963, S 353/360
- 67 D. Kullmann: Siemens-Erlangen- private Mitteilung über thermische Instabilität während des Anfahrens von 7500 A Zuleitungen, die zu Beginn am warmen Ende eine Temperatur von ca. 100 K aufweisen, Berlin 1970
- 68 W. Traupel: Vorlesung über Thermodynamische Probleme von Atomkraftanlagen. ETH-Z WS 64/65
- 69 . R. Bachmann: Messung der Wärmeleitfähigkeit und der Schallgeschwindigkeit flüssiger Aromate. Diss. ETH Nr. 4436, Juris Verlag, Zürich 1969

- 70 . P. Grassmann: Physikalische Grundlagen der Chemie-Ingenieur-Technik, Verlag H.R. Sauerländer 1961
- 71 H. Römpf: Lexikon der Chemie. 6. Aufl. Franckh-Stuttgart 1966
- 72 M. Kohler: Zur magnetischen Widerstandsänderung reiner Metalle. Ann.Physik 34 (1938), 1212
- 73 H. Schenker et al.: Reference Tables for Thermocouples NBS Circular 561, 1955
- 74 W.F. Giauque, R.M. Buffington, W.A. Schulze: Journ. Amer. chem. Soc. 49 (1927), 2343
- 75 Th. Johannessen: Optimierung von elektrischen Leitungen zu Tieftemperaturanlagen, unveröffentlichte Diplomarbeit am Institut für Verfahrens- und Kältetechnik ETH-Z WS 1967
- 76 R.L. Powell, M.D. Bunch, R.J. Corruccini: Low Temperature Thermocouples-1. Gold-Cobalt or Constantan versus Copper or "Normal" Silver. Cryogenics 1 (1961), 139/150
- 77 J.R. Clement, E.H. Quinnell: Rev.sci.Instr. 23 (1952), 213
- 78 . A.C. Rose-Innes: Low Temperature Techniques. The English University Press Ltd. 1964
- 79 N. Rott: Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes. ZAMP.
- 80 . Documenta Geigy: Wissenschaftliche Tabellen, 7.Aufl. J.R. Geigy AG, Basel 1968
- 81 P. Grassmann: Kältetechnik-Klimatisierung 2 (1950), 184

## LEBENS LAUF

- 23.9.1939 geboren in St. Gallen
- 1946-1952 Primarschule in St. Gallen
- 1952-1955 Sekundarschule in St. Gallen
- 1955-1960 Oberrealschule in St. Gallen, Abschluss mit Matura Typ C, dazwischen 1958/59 Studienaufenthalt an der Westbrook High School, Westbrook Me. USA
- 1960-1961 Militärdienst und Vorstudienpraxis
- 1961-1965 Studium an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich an der Abteilung für Maschineningenieurwesen und Abschluss mit Diplom auf dem Gebiete der kalorischen Apparate und Kältetechnik
- 1966 Unterrichtsassistent am Institut für kalorische Apparate Kälte- und Verfahrenstechnik ETH, Zürich
- 1967-1970 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für kalorische Apparate, Kälte- und Verfahrenstechnik, ETH, Zürich
- Doktorarbeit unter der Leitung von Prof. Dr. P. Grassmann
- ab Nov. 1970 UNIVAC-Sperry Rand AG