Prom. Nr. 2483

Einige unstetige stochastische Prozesse

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG

DER WÜRDE EINES DOKTORS DER MATHEMATIK

GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

ANDREAS DALCHER
VON
PRATTELN (BL)

Referent: Herr Prof. Dr. W. Saxer
Korreferent: Herr Prof. Dr. A. Pfluger

BASEL
Buchdruckerei Birkhäuser AG.
1956

Leer - Vide - Empty

Einige unstetige stochastische Prozesse

Von ANDREAS DALCHER, Zug

Inhalt

1. Kapitel: Allgemeines

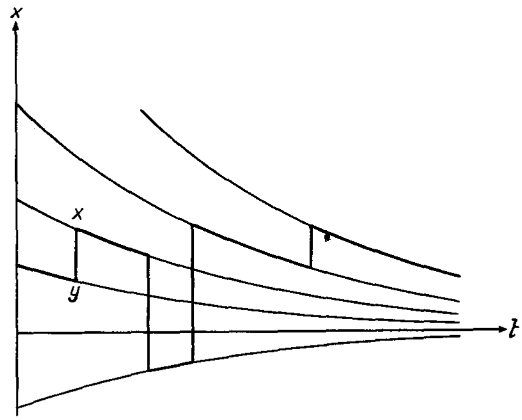
§ 1. *Einleitung*

a) Das Problem. Gegeben sei eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung. Die Zeit t sei die unabhängige, x die abhängige Variable. Die Gleichung kann in der Form

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(x, t) \tag{1}$$

geschrieben werden. Wir betrachten nun den folgenden stochastischen Prozess $x(t)$.

In jedem Zeitintervall $(t, t + dt)$ besteht eine Wahrscheinlichkeit $w(x, t)\, dt$, dass x einen Sprung ausführt. Wenn dieser zur Zeit t stattfindet und wenn die abhängige Variable in $(t - 0)$ den Wert y angenommen hat, so hat x unmittelbar nachher die Verteilung $G(y, x, t)$. Vom so erreichten Punkt x aus folgt der Prozess bis zum nächsten Sprung der durch (x, t) gehenden Lösung der Differentialgleichung. In Figur 1 sind einige Kurven der Lösungsschar und ein möglicher



Figur 1
Möglicher Verlauf eines Prozesses.

Verlauf des Prozesses $x(t)$ dargestellt. Der Anfang des Prozesses sei durch die Verteilung $F(x, 0)$ gegeben.

Wir kennen also

die Differentialgleichung	$\dot{x}(x, t)$,
die Dichte der Sprünge	$w(y, t)$,
die Verteilung nach diesen	$G(y, x, t)$,
die Anfangsverteilung	$F(x, 0)$

und wollen berechnen[1])

die Verteilung von x zu irgendeiner Zeit	$F(x, t)$.

b) Methoden und Resultate. Die Lösungen werden auf zwei Arten erhalten. Mit Integralgleichungen gewinnt man einen besondern Aspekt und allgemeinere Ergebnisse des « Queueing »-Problems und ähnlicher Fragen (vgl. KENDALL[6][2])). Durch die Laplace-Transformation lässt sich unter anderem das « Geräusch-

[1]) Auf das Problem der Verteilung im Funktionenraum [im Lehrbuch von DOOB [3] mit Ω bezeichnet: $x_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$] treten wir hier nicht ein. Auch die Autokorrelation des Prozesses wird nicht untersucht.

[2]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 33.

problem» behandeln. Hier wird die Störung jedoch als unstetig angenommen, während in der Literatur das Hauptgewicht auf den kontinuierlichen Fall gelegt wird.

§ 2. *Beispiele*

a) Wir betrachten ein Reservoir in einer wasserarmen Gegend (zum Beispiel Jura). Dieses werde direkt durch Regenwasser und nicht durch eine Quelle gespiesen. $x(t)$ sei das Volumen des gespeicherten Wassers. Wir nehmen an, Regengüsse erfolgen mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte $w(t)$ und seien nur von kurzer Dauer. Wenn das Wasser sofort in das Reservoir geleitet wird, so nimmt x jeweils sprunghaft zu. $-\dot{x}(x, t)$ ist die pro Zeiteinheit gebrauchte Wassermenge. Bei leerem Reservoir ist $\dot{x}(0, t) = 0$. Wenn mehr Wasser als die maximale Kapazität A anfällt, so überläuft es sofort. Dies bedeutet $\dot{x}(x, t) = -\infty$ für $x \geqq A$. Im Intervall $0 < x < A$ ist $\dot{x}$ negativ.

Ähnlich verhält es sich mit Stauseen für Kraftwerke. Die Bedingung, dass das Regenwasser sofort in den See gelangt, ist allerdings oft nicht erfüllt, besonders wenn Gletscher oder Wälder im Einzugsgebiet liegen. Ein stetiger Zufluss kann jedoch berücksichtigt werden, indem dieser zu $\dot{x}$ addiert wird. Für die folgenden Rechnungen muss aber $\dot{x}$ eine bestimmte Funktion von x und t sein. Weder der allfällige stetige Teil des Zuflusses noch der für die Krafterzeugung benötigte Abfluss dürfen ein stochastisches Element enthalten.

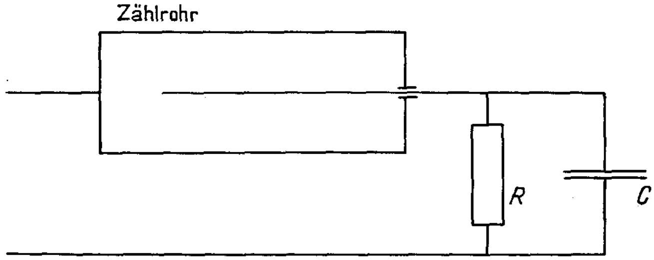
b) Im Lagerungsproblem ist $x(t)$ die Menge der zur Zeit t gelagerten Güter. w ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass eine neue Sendung eintrifft. $G(y, x, t)$ ist die Verteilung von x nach deren Ankunft, wenn vorher die Warenmenge y betragen hat. Wir nehmen an, der Verkauf erfolge stetig. $-\dot{x}$ ist die Verkaufsgeschwindigkeit. Auch hier hat man die Bedingung

$$\dot{x}(0, t) = 0, \quad \dot{x}(x, t) < 0 \quad \text{für} \quad x > 0 .$$

c) Auch das Warteproblem (queueing problem) kann in dieser Form dargestellt werden. $x(t)$ ist jedoch nicht die Anzahl wartender Personen, sondern die durch diese für den Bedienenden aufgespeicherte Arbeit. $w(y)$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass sich jemand anschliesst, wenn die Länge der Schlange, ausgedrückt in Arbeit, y beträgt. $G(x - y)$ ist die Verteilung der Arbeit, die ein Ankommender bringt. $-\dot{x}(x, t)$ ist die Geschwindigkeit, mit welcher der Bedienende arbeitet.

d) Ein Geiger-Müller-Zählrohr löst bei jedem registrierten Partikel einen kurzen Stromstoss aus. Dieser gelange auf einen CR-Kreis. Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Spannung x am Kondensator? Bei jedem Stromstoss nimmt letztere sprunghaft zu und folgt zwischen den Unstetigkeiten der Differentialgleichung

$$\dot{x} = -\frac{x}{CR} .$$

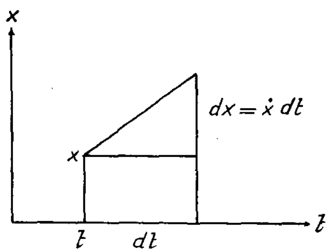


Figur 2
Die Schaltung eines Zählrohrs.

Ähnlich sind die Verhältnisse bei den Störungen in einem Radio, wenn diese unstetig, und nicht, wie meist angenommen wird, kontinuierlich erfolgen.

§ 3. *Die Hauptformel*

Ableitungen seien im Sinn von SCHWARTZ [10] verstanden. Wir betrachten die Änderungen von $F(x, t)$ längs einer Lösung der Differentialgleichung. Es ist also $dx = \dot{x}\, dt$. $F(x + dx, t + dt)$ setzt sich aus zwei Teilen zusammen: wenn



Figur 3

$y < x$ ist und kein Sprung stattfindet, was mit der Wahrscheinlichkeit

$$\int_{-\infty}^{x} [1 - dt\, w(y, t)]\, dF(y, t)$$

erfolgt, bleibt F längs der Lösung der Differentialgleichung konstant. Dann ist noch der Einfluss eines Sprunges zu berücksichtigen. Wir erhalten die Gleichung

$$F(x + dx, t + dt) = \int_{-\infty}^{x} [1 - dt\, w(y, t)]\, dF(y, t) + dt \int_{-\infty}^{\infty} w(y, t)\, G(y, x, t)\, dF(y, t)\,.$$

Nun führen wir das totale Differential dF ein und dividieren durch dt:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial t} = -\int_{-\infty}^{x} w(y, t)\, dF(y, t) + \int_{-\infty}^{\infty} w(y, t)\, G(y, x, t)\, dF(y, t)\,.$$

Wir bezeichnen mit $E(z)$ die Heavisidesche Funktion

$$E(z) = 1 \quad \text{für} \quad z \geqq 0\,, \quad E(z) = 0 \quad \text{für} \quad z < 0\,,$$

und definieren $H(y, x, t)$ durch

$$H(y, x, t) = E(x - y) - G(y, x, t)\,. \tag{2}$$

Damit erhalten wir die fundamentale Formel

$$\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial t} = -\int_{-\infty}^{\infty} w(y, t)\, H(y, x, t)\, dF(y, t)\,. \tag{3}$$

2. Kapitel: Lösung durch Integralgleichungen

§ 4. *Herleitung der Integralgleichung*

Diese Methode ist geeignet zur Lösung des stationären Falles der Beispiele a), b) und c) von § 2.

x sei eine nicht negative Variable. Wir setzen $a(x) = -\dot{x}$ und verlangen

$$a(0) = 0\,, \quad a(x) > 0 \quad \text{für} \quad x > 0\,. \tag{4}$$

Es sei $f(x, t) = \partial F/\partial x$. Wenn wir die Abhängigkeit von t nicht mehr explizit ausdrücken, erhält (3) die Form

$$f(x)\, a(x) - \frac{\partial F}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} w(y)\, H(y, x)\, dF(y)\,.$$

Da x nicht negativ ist, genügt es, die Integration von -0 bis ∞ auszuführen. Wir zerlegen den Bereich in $(-0, +0)$ und $(+0, \infty)$. Für alle positiven x dürfen wir durch a dividieren und erhalten nach einer kleinen Umstellung

$$f(x) - \int_{+0}^{\infty} \frac{w(y)\, H(y, x)}{a(x)}\, f(y)\, dy = \frac{w(0)\, H(0, x)}{a(x)}\, F(0) + \frac{1}{a(x)} \cdot \frac{\partial F}{\partial t}\,. \tag{5}$$

Diese Gleichung hat die Form

$$f(x) - \int_{0}^{\infty} K(x, y)\, f(y)\, dy = \varphi(x) \tag{6}$$

mit

$$K(x, y) = \frac{w(y)\, H(y, x)}{a(x)}, \qquad \varphi(x) = \frac{w(0)\, H(0, x)}{a(x)}\, F(0) + \frac{1}{a(x)} \cdot \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Im stationären Zustand fällt der letzte Term weg. Damit wird (6) eine Integralgleichung vom Typ von FREDHOLM. Zur Lösung benützen wir die Neumannsche Reihe. Wir setzen

$$K^1(x, y) = K(x, y)\,,$$

$$K^n(x, y) = \int_0^\infty K(x, u)\, K^{n-1}(u, y)\, du = \int_0^\infty K^{n-1}(x, u)\, K(u, y)\, du\,,$$

$$K^*(x, y) = K + K^2 + K^3 + K^4 + \cdots + K^n + \cdots.$$

Ferner brauchen wir die Reziprozitätsformeln

$$K^* = K + \int_0^\infty K(x, u)\, K^*(u, y)\, du = K + \int_0^\infty K^*(x, u)\, K(u, y)\, du\,. \tag{7}$$

Im stationären Fall ist

$$\varphi(x) = F(0)\, K(x, 0)\,. \tag{8}$$

Somit erhält man aus (6)

$$f(x) - \int_0^\infty K(x, y)\, f(y)\, dy = F(0)\, K(x, 0)\,.$$

Die Lösung davon ist

$$f(x) = F(0)\, K(x, 0) + \int_0^\infty K^*(x, u)\, F(0)\, K(u, 0)\, du = F(0)\, K^*(x, 0)\,.$$

Integriert man die Gleichung über x, so ergibt sich

$$1 - F(0) = F(0) \int_0^\infty K^*(x, 0)\, dx\,,$$

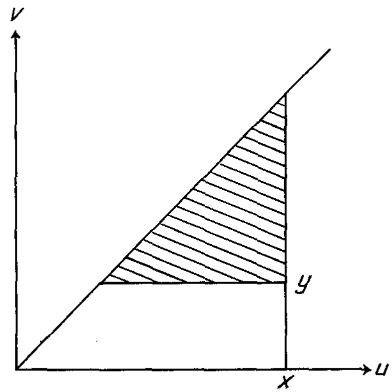
$$F(0) = \frac{1}{1 + \int_0^\infty K^*(x, 0)\, dx}, \qquad f(x) = \frac{K^*(x, 0)}{1 + \int_0^\infty K^*(x, 0)\, dx}\,. \tag{9}$$

Dies ist die Lösung für den stationären Fall.

Falls alle Sprünge positiv sind, was wir für dieses Kapitel im folgenden voraussetzen wollen, so ist $G(y, x) = 0$ für $y > x$. Diese Eigenschaft überträgt sich auch auf $H(y, x)$ und damit auf $K(x, y)$. In diesem Fall ist das Integral in (6) nur bis x zu erstrecken; die Gleichung ist vom Typ von VOLTERRA.

§ 5. *Eigenschaften der Kerne und elementare Lösungsmethoden für Volterra-Gleichungen*

a) $K^*(x, y)$ hängt von x, y und von der Funktion $K(u, v)$ ab, jedoch nur von den Werten im Bereich $y \leqq v \leqq u \leqq x$.



Figur 4
Der Bereich, in dem $K(u, v)$ auf $K^*(x, y)$ einen Einfluss ausübt.

Beweis durch Induktion nach n. Da es sich um Volterra-Gleichungen handelt, ist $K^n(x, y) = 0$ für $y > x$. Man kann daher den Integrationsbereich auf $y \leqq u \leqq x$ beschränken und erhält

$$K^n(x, y) = \int_y^x K^{n-1}(x, u)\, K(u, y)\, du\,.$$

Nach der Induktionsannahme hängen nun die Faktoren des Integrals und die Grenzen nur von x, y und von $K(u, v)$ im angegebenen Bereich ab, und somit gilt dies auch von der linken Seite. Für $n = 1$ ist die Behauptung erfüllt. Durch die Summenbildung wird die Eigenschaft nicht zerstört und gilt daher auch für $K^*(x, y)$.

b) Wenn

$$L(x, y) \geqq K(x, y) \geqq 0\,,$$

dann ist

$$L^*(x, y) \geqq K^*(x, y) \geqq 0\,. \tag{10}$$

Denn bei der Bildung der iterierten und lösenden Kerne werden nur Produkte, Integrale und Summen positiver Grössen gebraucht. Somit bleiben die Ungleichungen erhalten. (Dieser Satz gilt allgemein für Fredholm-Gleichungen, wenn die Neumannsche Reihe konvergiert.)

Es ist $w \geqq 0$ und $a > 0$. Da nach Voraussetzung alle Sprünge positiv sind, ist $H \geqq 0$. Somit ist auch $K(x, y)$ nicht negativ.

c) $K(x, y) = M(x, y) + L(x, y)$.

L sei eine kleine Korrektur, so dass die höhern Iterierten davon vernachlässigt werden können. Diejenigen von M sollen aber alle berücksichtigt werden. Wir führen noch den Einheitskern $I(x, y)$ ein durch die Definition

$$I(x, y) = \delta(x - y) \quad \text{(Diracsche } \delta\text{-Funktion, vgl. Schwartz [10]).}$$

Wir schreiben hier die Faltung kurz als Produkt:

$$\int_0^\infty K(x, u)\, L(u, y)\, du = KL\,.$$

Für jeden Kern ist $M = MI = IM$. Ferner setzen wir $M' = I + M^*$ und behaupten

$$K^* = M^* + M'\,LM' + M'\,LM'\,LM' + \cdots\,. \tag{11}$$

Wir verifizieren die Gleichung durch die Reziprozitätsformel. Es ist

$$\begin{aligned} K + KK^* &= M + L + (M + L)\,(M^* + M'\,LM' + M'\,LM'\,LM' + \cdots) \\ &= M + MM^* + MM'\,LM' + MM'\,LM'\,LM' + \cdots \\ &\quad + L + LM^* + LM'\,LM' + \cdots\,. \end{aligned}$$

Nun ist nach (7) $M + MM^* = M^*$, und aus der Definition von M' folgt

$$L + LM^* = LM' \quad \text{und} \quad I + MM' = I + M + MM^* = I + M^* = M'.$$

Also wird

$$K + KK^* = M^* + M'\,LM' + M'\,LM'\,LM' + \cdots = K^*\,,$$

was zu zeigen war. (Auch dies gilt, falls die Reihe konvergiert, im Fredholmschen Fall.)

d) K sei ein Faltungskern: $K(x, y) = K(x - y)$. Durch Induktion folgt, dass K^n und K^* auch nur von $x - y$ abhängen. Wir führen die Laplace-Transformation ein:

$$M(s) = \int_0^\infty e^{sz}\, K(z)\, dz\,.$$

Die Transformierte von K^n ist die n-te Potenz von M. So wird

$$M^*(s) = M(s) + M^2(s) + \cdots = \frac{M(s)}{1 - M(s)} \quad \text{für} \quad |M(s)| < 1\,. \tag{12}$$

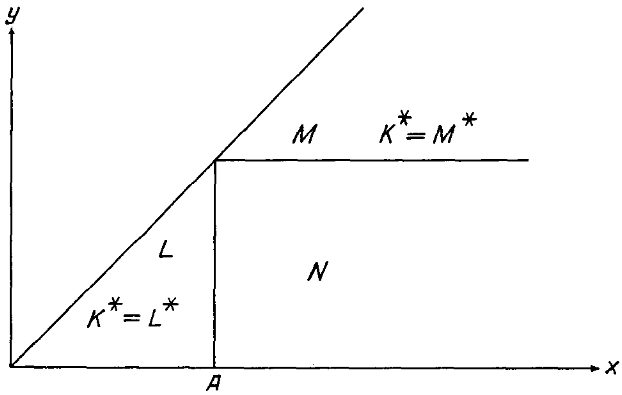
Von M^* erhält man $K^*(x)$ durch Umkehrung der Transformation.

Wenn $K(x-y)$ nicht analytisch ist, so ist im allgemeinen auch K^* nicht analytisch. In diesem Fall dürfte die Umkehrung der Laplace-Transformation schwierig sein. Hingegen erhält man auch in diesem Fall leicht

$$\int_0^\infty K^*(x)\,dx = M^*(0) = \frac{M(0)}{1 - M(0)} \quad \text{wenn} \quad |M(0)| < 1\,. \tag{13}$$

Dadurch sind die Normierung von F und mit den Ableitungen von $M^*(s)$ in O auch die Momente gegeben.

Diese Methode ist nicht identisch mit der von Kapitel 3. Hier wird die Laplace-Transformation zur Lösung der Integralgleichung (6), dort zur Lösung der Integro-Differentialgleichung (3) verwendet.



Figur 5

Die Zerlegung des Gebietes $0 \leqq y \leqq x$.

e)
$$K(x, y) = L(x, y) \text{ in } x < A\,,$$
$$K(x, y) = M(x, y) \text{ in } y \geqq A\,,$$
$$K(x, y) = N(x, y) \text{ in } x \geqq A,\ y < A$$

(vgl. Figur 5). Nach a) ist im Dreieck $0 \leqq y \leqq x < A$ $K^* = L^*$ und im Bereich von M $K^* = M^*$. Im Gebiet von N gehen wir von den Reziprozitätsformeln aus. Es ist

$$K^*(x, y) = K(x, y) + \int_y^A K(x, u)\, K^*(u, y)\, du + \int_A^x K(x, u)\, K^*(u, y)\, du$$

$$= N(x, y) + \int_y^A N(x, u)\, L^*(u, y)\, du + \int_A^x M(x, u)\, K^*(u, y)\, du\ .$$

Die ersten beiden Summanden sind bekannt. Nun halten wir y fest und benützen die Abkürzungen

$$f_y(x) = K^*(x, y)\ , \quad g_y(x) = N(x, y) + \int_y^A N(x, u)\, L^*(u, y)\, du\ .$$

Damit erhalten wir die Integralgleichung

$$f_y(x) = g_y(x) + \int_A^x M(x, u)\, f_y(u)\, du\ .$$

Diese hat die Lösung

$$f_y(x) = K^*(x, y) = g_y(x) + \int_A^x M^*(x, u)\, g_y(u)\, du\ . \tag{14}$$

Damit ist das Problem gelöst.

Das Verfahren kann auch iteriert werden, indem die Definitionsbereiche von M oder L wieder unterteilt werden.

Zwei Spezialfälle:

1.
$$\begin{aligned} K(x, y) &= L(x, y) && \text{für} \quad x < A\ , \\ &= 0 && \text{für} \quad x \geqq A\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K^*(x, y) &= L^*(x, y) && \text{für} \quad x < A\ , \\ &= 0 && \text{für} \quad x \geqq A\ . \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} K(x, y) &= L(x, y) && \text{in} \quad x < A\ , \\ &= N(x, y) && \text{in} \quad x \geqq A, y < A\ , \\ &= 0 && \text{in} \quad y \geqq A\ . \end{aligned}$$

Hier ist $M = 0$. Also verschwindet auch M^*, und wir haben

$$K^*(x, y) = N(x, y) + \int_y^A N(x, u)\, L^*(u, y)\, du \quad \text{in} \quad x \geqq A, y < A\ .$$

f) Es sei

$$K(x, y) = \frac{f(x)}{f(y)}\, L(x, y)\ .$$

Im Zähler steht eine beliebige Funktion von x, im Nenner dieselbe Funktion von y. Mit Hilfe der Reziprozitätsformeln verifiziert man leicht

$$K^*(x, y) = \frac{f(x)}{f(y)} L^*(x, y) . \tag{15}$$

g) Es sei

$$K(x, y) = f(x) g(y) \quad \text{für} \quad x \geqq y , \quad K(x, y) = 0 \quad \text{für } x < y . \tag{16}$$

GOURSAT [5] hat auch die Verallgemeinerung auf

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y) \quad \text{für} \quad x \geqq y , \quad K(x, y) = 0 \quad \text{für} \quad x < y$$

behandelt. Aus der Reziprozitätsformel erhalten wir

$$K^*(x, y) = f(x) \left[g(y) + \int_y^x g(u) K^*(u, y) \, du \right] .$$

Nun leiten wir partiell nach x ab (auch hier im Sinn von SCHWARTZ):

$$K_x^*(x, y) = f'(x) \frac{K^*}{f(x)} + f(x) g(x) K^*(x, y) = K^*(x, y) \left(\frac{f'(x)}{f(x)} + f(x) g(x) \right) ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln K^*(x, y) = \frac{f'(x)}{f(x)} + f(x) g(x) ,$$

und analog

$$\frac{\partial}{\partial y} \ln K^*(x, y) = \frac{g'(y)}{g(y)} - f(y) g(y) .$$

Das Minuszeichen kommt daher, dass das Integral hier nach der untern Grenze abgeleitet wird. Durch Integration erhält man

$$\ln K^*(x, y) = \ln f(x) g(y) + \int_y^x f(u) g(u) \, du . \tag{17}$$

h) $K(x, y)$ könne im Dreieck $0 \leqq y \leqq x < A$ durch die Potenzreihe

$$K(x, y) = \sum_{ij} b_{ij} x^i y^j$$

dargestellt werden. Für $K^*(x, y)$ setzen wir die Reihe

$$K^*(x, y) = \sum_{nm} a_{nm} x^n y^m$$

an. Wir setzen diese in die Reziprozitätsformel

$$\sum_{nm} a_{nm} x^n y^m = \sum_{ij} b_{ij} x^i y^j + \int_y^x \sum_{ij} b_{ij} x^i u^j \sum_{kl} a_{kl} u^k y^l \, du$$
$$= \sum_{ij} b_{ij} x^i y^j + \sum_{ijkl} b_{ij} a_{kl} \left(\frac{x^{i+j+k+1} y^l}{j+k+1} - \frac{x^i y^{l+j+k+1}}{j+k+1} \right)$$

ein. Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$a_{nm} = b_{nm} + \sum_{i,j=0,1,2,\ldots,i+j \leqq n-1} a_{n-i-j-1,\,m} b_{ij} \frac{1}{n-i} - \sum_{j,k=0,1,2,\ldots,j+k \leqq m-1} b_{nj} a_{k,\,m-j-k-1} \frac{1}{j+k+1} . \tag{18}$$

Die Koeffizienten können rekursiv berechnet werden. Insbesondere ist

$$a_n = a_{n0} = b_{n0} + \sum_{ij} b_{ij} a_{n-i-j-1} \frac{1}{n-i} \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, i+j \leqq n-1) . \tag{19}$$

Da wir nur $K^*(x, 0)$ brauchen, führen wir den Konvergenzbeweis nur für $\sum a_n x^n$ durch. Für jedes $B < A$ konvergiert die Reihe für $K(x, y)$ in $x \leqq B$ absolut und gleichmässig. Also gilt in diesem Bereich

$$L(x, y) = \sum_{ij} |b_{ij}| x^i y^j \leqq M .$$

Wenn wir in (19) b_{ij} durch $|b_{ij}|$ ersetzen, erhalten wir statt der a_n Koeffizienten, die wir mit c_n bezeichnen. Es sind alle $c_n \geqq 0$. Der Konvergenzradius von $\sum c_n x^n$ sei ϱ. In $0 \leqq x < \varrho$ wird $L^*(x, 0)$ durch diese Reihe dargestellt. Wir müssen zeigen, dass $\varrho \geqq B$ ist.

Wir wählen N so, dass

$$\sum_{i+j>N} |b_{ij}| B^i B^j < \varepsilon , \quad \varepsilon < \frac{1}{3B}$$

und setzen

$$C_n = \operatorname{Max}(c_0, c_1 B, c_2 B^2, \ldots, c_{n-1} B^{n-1})$$

und

$$\beta_n = \operatorname{Max}(|b_{n0}| B^n, |b_{n+1,0}| B^{n+1}, |b_{n+2,0}| B^{n+2}, \ldots) .$$

Es ist

$$c_n B^n = |b_{n0}| B^n + \sum_{ij} |b_{ij}| B^{i+j} B B^{n-i-j-1} c_{n-i-j-1} \frac{1}{n-i}$$
$$\leqq \beta_n + B C_n \sum_{ij} |b_{ij}| B^{i+j} \frac{1}{n-i} .$$

Wir zerlegen die Summe in $i + j \leqq N$ und $i + j > N$. Es sei $n > N$.

$$c_n B^n \leqq \beta_n + C_n B \frac{1}{n - N} M + B C_n \varepsilon .$$

Wir wählen nun n so gross, dass

$$n - N \geqq 3 B M \quad \text{und} \quad \beta_n < \frac{|b_{00}|}{3} \leqq \frac{C_n}{3} .$$

Damit wird

$$c_n B^n \leqq C_n .$$

Daraus folgt, dass die $c_n B^n$ beschränkt sind. Also konvergiert die Reihe in $x < B$. Da dies für jedes $B < A$ gilt, ist der Konvergenzradius mindestens A. Nun ist aber $|a_n| \leqq c_n$, man hat also eine konvergente Majorante der Reihe $K^*(x, 0) = \sum a_n x^n$.

§ 6. *Anwendungen*

a) Die Sprunghöhe sei exponentiell verteilt, das heisst

$$G(y, x) = 1 - e^{-(x-y)k} \quad \text{für} \quad x \geqq y$$

(vgl. § 11). Es ist somit

$$H(y, x) = e^{(y-x)k} \quad \text{für} \quad x \geqq y, \quad H(y, x) = 0 \quad \text{für} \quad x < y; \quad a = a(x), \quad w = w(y).$$

a und w sind beliebig. Dies bedeutet im Beispiel des Schlangestehens, dass die Geschwindigkeit, mit welcher der Beamte arbeitet, und die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass sich jemand anschliesst, beliebig von der Länge der Schlange abhängen können. Es ist

$$K(x, y) = \frac{e^{-kx}}{a(x)} e^{ky} w(y) = f(x) g(y) \quad \text{für} \quad x \geqq y .$$

Somit erhält man nach § 5 g)

$$\ln K^*(x, y) = k(y - x) + \ln w(y) - \ln a(x) + \int_y^x \frac{w(u)}{a(u)} du$$

und damit insbesondere

$$K^*(x, 0) = \frac{w(0)}{a(x)} e^{-kx} e^{\int_0^x w(u)/a(u)\, du} . \tag{20}$$

b) Beschränkung der Variablen. Bei Reservoiren wird $\dot{x} = -\infty$ für $x \geqq A$, und somit $K = 0$. Aus § 5 e) ist ersichtlich, dass $K^*(x, 0) = 0$ für $x \geqq A$, während für $x < A$ K^* nicht von A abhängt. Aus Gleichung (9) ist leicht der Einfluss auf $F(x)$ abzulesen, der von einer Veränderung von A herrührt: die Verteilung wird in A abgeschnitten (truncated) und neu normiert.

$K = 0$ für $y \geqq A$ kann im Schlangenproblem auftreten, wenn zum Beispiel ein Arzt keine neuen Anmeldungen entgegennimmt, falls er mit Arbeit überlastet ist. Wenn also $y \geqq A$ ist, so wird $w = 0$.

c) Ein von BLANC-LAPIERRE und FORTET [1], Seite 31, angegebenes Beispiel (Ausfluss von Wasser aus einem Gefäss, das unten eine Öffnung hat und tropfenweise aufgefüllt wird). Hier ist $a(x) = \sqrt{x}$. Wenn die Verteilung der Tropfengrösse (also der Sprunghöhe) exponentiell ist, so wird nach dem obigen, mit $w = 1$

$$K^*(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-kx}\, e^{\int\limits_0^x 1/\sqrt{u}\,du} = \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-kx+2\sqrt{x}}\,. \tag{21}$$

Das zur Normierung notwendige Integral kann durch die Substitution $v = \sqrt{x}$ auf ein Fehlerintegral zurückgeführt werden.

Wenn die Sprunghöhe konstant $= c$ ist, so wird $K(x, y) = w(y)/\sqrt{x}$ im Halbstreifen $0 \leqq x - y < c$, $y \geqq 0$, sonst 0. Mit einer ähnlichen Methode wie in § 5 e) kann $K^*(x, y)$ sukzessive in $0 \leqq x - y < c$, $c \leqq x - y < 2c, \ldots$ berechnet werden. Die Rechnungen werden jedoch bald umständlich.

Wenn die Sprunghöhe klein ist im Verhältnis zum mittleren Wasserstand, so kann $\dot{x}$ näherungsweise linearisiert werden. Falls ausserdem w in bezug auf y linearisiert werden darf und G nur von $x - y$ und t abhängt, so lässt sich die Lösung auch im nichtstationären Fall mit der Methode des § 8 berechnen.

d) Ein Beispiel, wie die Methode von § 5 e) weitergeführt werden kann. Die Sprunghöhe sei konstant $= 1$, a und w seien konstant. Wir setzen $w/a = c$. So wird, $0 \leqq y \leqq x$ stillschweigend vorausgesetzt,

$$K(x, y) = c \quad \text{in} \quad 0 \leqq x - y < 1\,, \quad K(x, y) = 0 \quad \text{in} \quad 1 \leqq x - y\,. \tag{22}$$

In $0 \leqq x < 1$ ist

$$K^*(x, y) = c\, e^{c(x-y)}\,.$$

In $1 \leqq x < 2$ wird

$$g_0(x) = N(x, 0) + \int\limits_0^1 N(x, u)\, L^*(u, 0)\, du = 0 + \int\limits_{x-1}^1 c\, c\, e^{cu}\, du = c\, e^c - c\, e^{c(x-1)}\,.$$

Wegen $K = K(x - y)$ ist in $1 \leqq u \leqq x < 2$

$$M^*(x, u) = K^*(x - u) = c\, e^{c(x-u)}\,.$$

Setzt man dies in (14) ein, so erhält man durch Integration

$$K^*(x, 0) = e^{c(x-1)}\,(c\, e^c + c^2 - c - c^2\, x)\,.$$

Dieses Resultat legt den Ansatz nahe

$$K_n^*(x, 0) = P_n(z)\, e^{cz}, \quad z = x - n.$$

Der Index von K^* gibt an, dass die Formel für $n \leqq x < n + 1$ gilt. P_n ist ein Polynom n-ten Grades. Wir verifizieren die Gleichung durch die Reziprozitätsformel. Für $n \geqq 1$ ist

$$K^*(x, 0) = K(x, 0) + \int_0^{x-1} 0\, K^*\, du + \int_{x-1}^{n} c\, K^*(u, 0)\, du + \int_n^x c\, K^*(u, 0)\, du$$

$$= 0 + 0 + \int_z^1 c\, P_{n-1}(u)\, e^{cu}\, du + \int_0^z c\, P_n(u)\, e^{cu}\, du.$$

Nun setzen wir

$$e^{cz} R_n(z) = \int^z P_n(u)\, e^{cu}\, du,$$

also

$$P_n(z) = c\, R_n(z) + R_n'(z).$$

Damit wird

$$P_n(z)\, e^{cz} = c\, R_{n-1}(1)\, e^c - c\, R_{n-1}(z)\, e^{cz} + c\, R_n(z)\, e^{cz} - c\, R_n(0).$$

Die Glieder mit e^{cz} ergeben

$$P_n(z) = c\, R_n(z) - c\, R_{n-1}(z).$$

Wenn wir noch den Zusammenhang von P, R und R' berücksichtigen:

$$R_n'(z) = -\, c\, R_{n-1}(z).$$

Der Vergleich der Konstanten ergibt

$$R_n(0) = e^c\, R_{n-1}(1).$$

So erhält man rekursiv

$$\left.\begin{aligned}
&R_1(z) = -c\, z + e^c \\
&\qquad P_1(z) = -\, c^2 z + c\, e^c - c, \\
&R_2(z) = \frac{c^2}{2} z^2 - c\, e^c z - c\, e^c + e^{2c} \\
&\qquad P_2(z) = \frac{c^3}{2} z^2 - c^2 z\, (e^c - 1) + c\, e^{2c} - (c + c^2)\, e^c, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Auf diese Art kann K^* etappenweise berechnet werden.

e) In gewissen Fällen ist auch die Kombination von § 5 d) und e) vorteilhaft. So könnte im vorigen Beispiel, da $K = K(x - y)$ ist, die Laplace-Transformation gebraucht werden. Bereits durch $M(0) = c$ erhält man nach (13) die Normierung

$$\int_0^\infty K^*(x, 0)\, dx = \frac{c}{1-c}, \qquad F(0) = \frac{1}{1 + [c/(1-c)]} = 1 - c\,.$$

Kombiniert man die Methoden, so erhält man schrittweise die exakte Dichtefunktion $f(x)$.

Der Vorteil der Laplace-Transformation liegt darin, dass die Normierung und die Momente leicht exakt erhalten werden. Mit der Methode von § 5 e) erhält man die Normierung – wenn x nicht beschränkt ist – erst asymptotisch, dafür die (allerdings noch nicht normierte) Dichtefunktion exakt. Der Hauptvorteil liegt jedoch darin, dass sie auch für den Fall gilt, wo K nicht Funktion von $x - y$ ist. Dies kommt besonders zur Geltung, falls $a(x)$ sprunghaft variiert. Dies tritt ein, wenn in einem Kraftwerk die Anzahl der in Betrieb gesetzten Turbinen vom Wasserstand des Stausees abhängt. Auch bei einem Schalter kann dies vorkommen: ein Beamter bedient, wenn die Schlange kurz, zwei, wenn sie lang ist.

3. Kapitel: Lösung durch die Laplace-Transformation

§ 7. *Herleitung der Differentialgleichung*

Wir üben auf (3) die zweiseitige Laplace-Transformation aus.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(f\,\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial t} \right) e^{sx} dx = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{sx}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} w(y, t)\, H(y, x, t)\, dF(y, t)\,. \tag{24}$$

w, H und die Lösung F seien so, dass in einem Bereich B der s-Ebene die verwendeten Integrale existieren. Nun setzen wir voraus, dass H eine Funktion von $x - y$ und t ist, dass also die Höhen der Sprünge nicht davon abhängen, von wo aus dieselben erfolgen. Denn unter dieser Voraussetzung erhält man rechts eine Faltung. Nicht angegebene Integrationsgrenzen sind in diesem Kapitel (ausser § 11) $-\infty$ und $+\infty$. Die rechte Seite von (24) wird, abgesehen vom Vorzeichen,

$$\iint H(x - y, t)\, e^{s(x-y)}\, e^{sy}\, w(y, t)\, dF(y, t)\, dx = \int H(z, t)\, e^{sz}\, dz \int w(y, t)\, e^{sy}\, dF(y, t)\,.$$

Damit wir die Transformation der Produkte bilden können, setzen wir zunächst voraus, dass

$$-\dot{x}(x, t) = \sum_{k=0}^{N} a_k(t)\, x^k, \quad w(y, t) = \sum_{k=0}^{N} p_k(t)\, y^k\,. \tag{25}$$

Wir definieren nun

$$M(s,t) = \int e^{sx} f(x,t)\,dx\,, \quad h(s,t) = \int e^{sx}\,dH(x,t)\,, \tag{26}$$

und setzen voraus, dass in einem Teilbereich B' von B für alle t

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{sx} F(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\pm\infty} e^{sx} H(x) = 0\,. \tag{27}$$

Somit erhält man durch partielle Integration

$$\int e^{sx} F(x)\,dx = -\frac{1}{s} M(s)\,, \qquad \int e^{sx} H(x)\,dx = -\frac{1}{s} h(s)\,.$$

$\dot{M}$ bedeute die partielle Ableitung von M nach t, $M^{(n)}$ die n-te nach s. So ist

$$M^{(n)}(s,t) = \int x^n e^{sx} f(x,t)\,dx\,.$$

Damit erhält man die Gleichung

$$-\sum a_n M^{(n)}(s) - \frac{1}{s}\dot{M} = \frac{h}{s}\sum p_n M^{(n)}$$

oder

$$\sum_{n=0}^{N} M^{(n)}(s,t)\,[a_n(t)\,s + p_n(t)\,h(s,t)] + \dot{M}(s,t) = 0\,. \tag{28}$$

Man hat also hier eine partielle Differentialgleichung N-ter Ordnung für M mit der Anfangsbedingung, dass $M(s,0)$ die Laplace-Transformierte von $f(x,0)$ ist.

§ 8. *Lösung der Gleichungen erster Ordnung*

Im Fall $N = 1$ setzen wir $-\dot{x}(x,t) = a(t) + b(t)\,x$ und $w(y,t) = p(t) + q(t)\,y$. Somit lautet die Differentialgleichung

$$[a(t)\,s + p(t)\,h(s,t)]\,M + [b(t)\,s + q(t)\,h(s,t)]\,M' + \dot{M} = 0\,. \tag{29}$$

Für $K = \ln M$, die erzeugende Funktion der Kumulanten (Semiinvarianten), lautet die Gleichung

$$(a\,s + p\,h) + (b\,s + q\,h)\,K' + \dot{K} = 0\,. \tag{30}$$

Wir führen statt s eine neue Variable $u = u(s,t)$ ein. Es ist

$$dK = \frac{\partial K}{\partial u}\,du + \frac{\partial K}{\partial t}\,dt = \frac{\partial K}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,dt + \frac{\partial u}{\partial s}\,ds\right) + \frac{\partial K}{\partial t}\,dt\,,$$

$$\left(\frac{\partial K}{\partial t}\right)_s = \frac{\partial K}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial t}\,, \qquad \left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)_t = \frac{\partial K}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial s}\,.$$

In die Gleichung für K eingesetzt

$$(a\,s + p\,h) + \frac{\partial K}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\,(b\,s + q\,h) + \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial K}{\partial t} = 0\,.$$

Der Faktor von $\partial K/\partial u$ kann zum Verschwinden gebracht werden, wenn für $u = \text{const}$ die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{ds}{dt} = b\,s + q\,h \tag{31}$$

benützt werden. Man erhält somit mit $s = s(u, t)$ und $u = s$ für $t = 0$

$$K\big(s(u, T), T\big) = -\int_0^T [a\,s(u, t) + p\,h\big(s(u, t), t\big)]\,dt + K(u, 0)\,. \tag{32}$$

Die Integration ist längs $u = \text{const}$ auszuführen. Am Schluss ist die Koordinatentransformation von s nach u wieder rückgängig zu machen.

Zunächst einige Spezialfälle.

a) Wenn q für alle t verschwindet, w also nicht von y abhängt, so ist die Koordinatentransformation von h, und damit von G unabhängig. Man erhält

$$\frac{ds}{dt} = b(t)\,s\,, \quad s = u\,e^{\int_0^t b(\tau)\,d\tau}\,.$$

Wir setzen

$$S = u\,e^{\int_0^T b(\tau)\,d\tau}\,, \quad \text{also} \quad s = S\,e^{-\int_t^T b(\tau)\,d\tau}\,.$$

Somit erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} K(S, T) = &-\int_0^T p(t)\,h\left(S\,e^{-\int_t^T b(\tau)\,d\tau}, t\right)dt \\ &-\int_0^T a(t)\,S\,e^{-\int_t^T b(\tau)\,d\tau}\,dt + K\left(S\,e^{-\int_0^T b(\tau)\,d\tau}, 0\right) \\ = &\;K_1 + K_2 + K_3\,. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

K ist eine Summe von erzeugenden Funktionen von Kumulanten. Also ist $F(x, t)$ eine Faltung von drei unabhängigen Verteilungen.

K_1 hängt von S, T, b, p und h, aber nicht von a und $F(x, 0)$ ab.
K_2 hängt von S, T, a und b, aber nicht von p, h und $F(x, 0)$ ab.
K_3 hängt von S, T, b und $F(x, 0)$, aber nicht von a, p und h ab.

Wenn wir $p = 0$ setzen, so bleiben K_2 und K_3 ungeändert. Diese Funktionen geben also nur an, wie die Anfangsverteilung längs den Lösungen der Differentialgleichung (1) geführt wird. Der Einfluss der Sprünge wird durch K_1 dargestellt (vgl. LÉVY [7], § 12,1⁰).

b) Die Differentialgleichung (31) lässt sich auch noch leicht lösen, wenn b, q und h nicht von t abhängen. In diesem Fall kann die Gleichung separiert werden.

$$\frac{ds}{b\,s + q\,h} = dt\,, \qquad \int \frac{ds}{b\,s + q\,h} = t + u\,. \tag{34}$$

Durch Umkehrung dieser Gleichung erhält man $s(u, t)$. Dies setzt man in (32) ein, integriert und drückt dann wieder u durch s und t aus.

c) Die äussern Bedingungen seien konstant. Wenn eine stationäre Verteilung existiert, so ist $\dot{K} = 0$, und man erhält

$$K'(s) = -\frac{a\,s + p\,h}{b\,s + q\,h}\,. \tag{35}$$

Bei der Lösung tritt eine Integrationskonstante auf. Diese kann nicht aus der Anfangsbedingung erhalten werden, wie bei der Lösung der partiellen Differentialgleichung, da $F(x, 0)$ im stationären Fall nicht bekannt ist. Da aber K die erzeugende Funktion der Kumulanten einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, muss $K(0) = 0$ sein. Somit wird

$$K(s) = -\int_0^s \frac{a\,z + p\,h(z)}{b\,z + q\,h(z)}\,dz\,. \tag{36}$$

Nun zurück zum allgemeinen Fall. Wir lösen das Problem ohne den Umweg über die Variablentransformation mit Hilfe der Taylor-Reihen in bezug auf s. Wir bilden

$$\left.\begin{aligned} (a\,s + p\,h) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\,s^n\,, & (b\,s + q\,h) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t)\,s^n\,, \\ M(s, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} m_n(t)\,s^n\,, & K(s, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} k_n(t)\,s^n. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

$n!\,m_n$ $(= M_n)$ ist das n-te Moment von $F(x, t)$, insbesondere ist also $m_0 = 1$. $n!\,k_n$ sind die entsprechenden Semiinvarianten (Kumulanten). Da H die Differenz der Verteilungen E und G ist, wird

$$h(0) = 0\,, \quad n!\,h^{(n)}(0) = -n\text{-tes Moment von } G.$$

Also

$$A_0 = 0\,, \quad A_1 = a - p \cdot \text{mittlere Sprunghöhe},$$

$$n!\,A_n = -p \cdot n\text{-tes Moment der Sprunghöhenverteilung } G.$$

Analog mit den B_n. Man kann diese in (29) einsetzen und erhält sukzessive lineare, inhomogene Differentialgleichungen für die Momente $m_1(t), m_2(t), \ldots$. Da in (30) $(a\,s + p\,h)$ als Summand und nicht als Faktor auftritt, werden die Differentialgleichungen für die Kumulanten etwas einfacher. Durch Koeffizientenvergleich erhält man

$$A_n(t) + \sum_{i=0}^{n} B_{n-i}(t)\, k_{i+1}\,(i+1) + \dot{k}_n = 0\,. \tag{38}$$

$n = 1$ ergibt die Gleichung

$$\dot{k}_1 + k_1\, B_1 + A_1 = 0\,.$$

Dies ist eine gewöhnliche, lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung für $k_1(t)$. $n = 2$ gibt

$$\dot{k}_2 + 2\,k_2\,B_1 + (k_1\,B_2 + A_2) = 0\,.$$

Der Ausdruck in der Klammer ist nach dem vorigen bekannt. Somit kann auch $k_2(t)$ berechnet werden. Solange die Momente von G existieren, erhält man lineare Differentialgleichungen für $k_1, k_2, k_3, \ldots$. Die Anfangswerte $k_n(t)$ sind durch die Semiinvarianten von $F(x, 0)$ gegeben.

§ 9. *Die Gleichungen höherer Ordnung im stationären Fall*

Wir betrachten zunächst den Fall $N = 2$ von (28). Es sei

$$w(y) = p + q\,y + r\,y^2\,, \quad -\dot{x}(x) = a + b\,x + c\,x^2\,.$$

Somit erhält man im stationären Fall

$$M''\,(c\,s + r\,h) + M'\,(b\,s + q\,h) + M\,(a\,s + p\,h) = 0\,. \tag{39}$$

In der Lösung treten zwei Integrationskonstanten auf. Diese müssen so gewählt werden, dass M die Laplace-Transformierte einer Verteilung ist. Die Bedingung $M(0) = 1$ liefert sofort eine der Konstanten, die ausdrückt, dass die gesamte Wahrscheinlichkeit $= 1$ ist. Die andere muss zum Ausdruck bringen, dass die Dichtefunktion $f(x) \geqq 0$ ist. Notwendige und hinreichende Bedingungen, dass $M(i\,s)$ eine charakteristische Funktion ist, sind bekannt. Diejenigen, welche sich auf globale Eigenschaften beziehen, können nur dann ohne weiteres angewandt werden, wenn (39) geschlossen integriert werden kann. Im Falle, dass die Differentialgleichung durch eine MacLaurin-Reihe integriert wird, lassen sich diese Kriterien nicht gut anwenden. Hingegen können unter dieser Annahme wenigstens Ungleichungen für die Koeffizienten dieser Reihe hergeleitet werden.

Wir benützen wieder den Ansatz (37) und die analoge Gleichung

$$c\,s + r\,h = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, s^n .$$

Wir führen dies in (39) ein und setzen den Koeffizienten von $s^n = 0$:

$$\sum_{i=0}^{n} [(i+2)\,(i+1)\; m_{i+2}\, C_{n-i} + (i+1)\; m_{i+1}\, B_{n-i} + m_i\, A_{n-i}] = 0\,. \tag{40}$$

Dabei ist $m_0 = 1$, während $m_1 = m$ noch bestimmt werden muss. Wir gewinnen Ungleichungen für m, wenn wir diejenigen für die absoluten Momente (siehe zum Beispiel CRAMÉR [2], Seite 176) benützen. Wenn wir folgern können, dass x sicher nicht negativ ist, so stimmen die gewöhnlichen Momente mit den absoluten überein. Es muss also, wenn

$$M_n = n!\; m_n$$

die Momente von $F(x)$ sind, gelten

$$M_n^2 \leqq M_{n+1}\, M_{n-1}\,. \tag{41}$$

Diese Ungleichung ist schärfer als die öfters gebrauchte

$$M_n^{1/n} \leqq M_{n+1}^{1/(n+1)}$$

und führt in unserm Fall überdies auf einfachere Rechnungen. Beispiel:

$$w(y) = 2 + y\,, \quad -\dot{x} = x^2\,, \quad \text{also} \quad x(t) = \frac{1}{t - t_0}\,.$$

Wenn alle Sprünge die Höhe 1 haben, ist

$$-h = s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \cdots .$$

Man erhält also aus (39),

$$s\,M'' + (2\,M + M')\,h = 0\,,$$

$$M'' = -(2\,M + M')\,\frac{h}{s}\,,$$

$$M_2 + M_3\, s + M_4\,\frac{s^2}{2} + \cdots = \left(2 + m + (2\,m + M_2)\,s + (2\,M_2 + M_3)\,\frac{s^2}{2} + \cdots\right) \times \left(1 + \frac{s}{2} + \frac{s^2}{6} \cdots\right),$$

$$M_2 = 2 + m\,,$$

$$M_3 = 2\,m + M_2 + 1 + \frac{m}{2} = \frac{7}{2}\,m + 3\,,$$

$$M_4 = \frac{2}{3} + \frac{m}{3} + 2\,m + M_2 + 2\,M_2 + M_3 = 9\,\frac{2}{3} + 8\,\frac{5}{6}\,m\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nun bilden wir die Ungleichungen

$$M_2 - m^2 = 2 + m - m^2 \geqq 0 \quad (m \leqq 2)\,,$$

$$M_3\, m - M_2^2 = \frac{7}{2}\, m^2 + 3\, m - 4 - 4\, m - m^2 \geqq 0\,,$$

$$5\, m^2 - 2\, m - 8 \geqq 0 \quad (m \geqq 1{,}48)\,.$$

$M_4\, M_2 - M_3^2 \geqq 0$ und $M_5\, M_3 - M_4^2 \geqq 0$ geben keine Verschärfung der Ungleichungen für m, hingegen eine Relation zwischen den absoluten Zentralmomenten: $\mu_4 \geqq \sigma^4$. Allerdings ist dies eine Gleichung vierten Grades in m.

$$\mu_4 - \sigma^4 = M_4 - 4\, m\, M_3 + 6\, m^2\, M_2 - 3\, m^4 - (2 + m - m^2)^2 \geqq 0\,,$$

$$5\,\frac{2}{3} - 7\,\frac{1}{6}\, m + m^2 + 8\, m^3 - 4\, m^4 \geqq 0 \quad (m \leqq 1{,}83)\,,$$

also $1{,}48 \leqq m \leqq 1{,}83$.

Wenn h rational ist, so werden nach Multiplikation mit dem Nenner die Klammern in (39) Polynome in s. Man erhält so eine Rekursionsformel für die Momente M_n.

Beispiel. Die Sprunghöhe sei exponentiell verteilt. Also ist $H = e^{-k\,x}$ für $x \geqq 0$, und es wird

$$-\frac{1}{s}\, h(s) = \int\limits_0^\infty e^{(s-k)\,x}\, dx = \frac{-1}{s-k}\,,$$

$$h(s) = \frac{s}{s-k}\,. \tag{42}$$

Wir dividieren (39) durch h und erhalten

$$M''(c\, s - c\, k + r) + M'(b\, s - b\, k + q) + M\,(a\, s - a\, k + p) = 0\,.$$

Auf die Integration dieser Gleichung durch die Methode von Laplace kommen wir in § 11 zurück. Hier verwenden wir die Momente. Wir leiten n-mal ab und setzen $s = 0$.

$$M_{n+2}(r - c\, k) + M_{n+1}(q - b\, k + c\, n) + M_n(p - a\, k + b\, n) + M_{n-1}\, a\, n = 0\,.$$

Es sei nun

$$k = 1, \quad -\dot{x} = 5\, x + x^2\,, \quad w(y) = 10 + y\,.$$

Setzen wir diese Werte ein, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
M_{n+2} &= M_{n+1}\,(n-4) + M_n\,(5\,n+10)\,, \\
M_0 &= 1\,, \\
M_1 &= m\,, \\
M_2 &= 10 - 4\,m\,, \\
M_3 &= -30 + 27\,m\,, \\
M_4 &= 260 - 134\,m\,, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Da hier $x \geqq 0$ ist, können wir (41) anwenden.

$$
\begin{aligned}
n = 1: &\quad 10 - 4\,m - m^2 \geqq 0 \quad (m \leqq 1{,}742)\,, \\
n = 2: &\quad 11\,m^2 + 50\,m - 100 \geqq 0 \quad (m \geqq 1{,}503)\,, \\
n = 3: &\quad 1700 - 760\,m - 193\,m^2 \geqq 0 \quad (m \leqq 1{,}593)\,.
\end{aligned}
$$

Die folgenden Ungleichungen ergeben

$$m \geqq 1{,}544, \quad m \leqq 1{,}578 \quad \text{und} \quad m \geqq 1{,}547\,,$$

also

$$1{,}547 \leqq m \leqq 1{,}578\,.$$

Die Ungleichung $\mu_4 \geqq \sigma^4$ liefert hier keine Verschärfung. Dass die Einschränkung von m hier viel besser ist als im ersten Beispiel, liegt daran, dass hier $\dot{x}(x)$ weniger von einer Geraden abweicht als dort.

Anhand eines Beispiels wollen wir noch den Fall diskutieren, dass $\dot{x}$ ein Polynom dritten Grades ist. Dies führt auf eine Differentialgleichung dritter Ordnung. Wir beschränken uns wieder auf den stationären Fall. Das Problem wird mit der Momentenmethode behandelt. Es sei

$$-\dot{x} = 2\,x - 2\,x^2 + x^3\,, \quad -h = \frac{s}{2} + \frac{s^2}{6} + \cdots\,, \quad w = 1\,.$$

Wir setzen dies in Gleichung (28) ein und erhalten

$$-M(s)\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{6} + \cdots\right) + 2\,M'(s) - 2\,M''(s) + M'''(s) = 0\,.$$

Eine Integrationskonstante ist $M(0) = 1$, die beiden andern $x = M'(0)$ und $y = M''(0)$, sind, wie m in den vorherigen Beispielen, noch unbekannt. Wir bilden die Taylorentwicklung der obigen Gleichung und erhalten

$$\left.\begin{array}{l} -(1+s\,x+\cdots)\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{6}+\cdots\right)+2\,(x+s\,y+\cdots) \\ \qquad\qquad -2(y+s\,M_3+\cdots)+(M_3+s\,M_4+\cdots)=0\,, \\ -\frac{1}{2}+2\,x-2\,y+M_3=0\,, \qquad M_3=2\,y-2\,x+\frac{1}{2}\,, \\ -\frac{x}{2}-\frac{1}{6}+2\,y-2\,M_3+M_4=0\,, \quad M_4=2\,y-\frac{7}{2}\,x+\frac{7}{6}\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{43}$$

Nun betrachten wir die Ungleichungen (41) für die Momente.

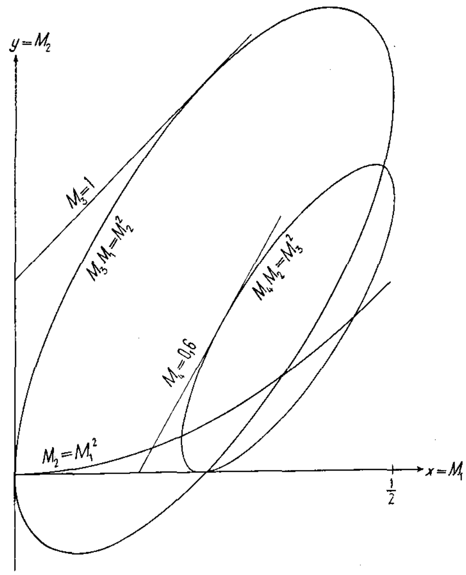
$$\left.\begin{array}{ll} M_2\,M_0-M_1^2\geqq 0\,, & y-x^2\geqq 0\,, \\ M_3\,M_1-M_2^2\geqq 0\,, & 2\,x\,y-2\,x^2+\frac{x}{2}-y^2\geqq 0\,, \\ M_4\,M_2-M_3^2\geqq 0\,, & 2\,y^2-\frac{7}{2}\,x\,y+\frac{7}{6}\,y-\left(2\,y-2\,x+\frac{1}{2}\right)^2\geqq 0\,, \\ & -2\,y^2-4\,x^2+\frac{9}{2}\,x\,y-\frac{5}{6}\,y+2\,x-\frac{1}{4}\geqq 0\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{44}$$

In Figur 6 sind die Parabel und die beiden Ellipsen eingezeichnet. Bereits aus der Tatsache, dass die mittlere Sprunghöhe 1/2 ist, folgt, dass (x, y) in der grössern Ellipse liegt. Man erhält die Ungleichung $M_3 \leqq 1$, unabhängig von der Streuung σ_s^2 der Sprungverteilung: diese braucht nicht einmal zu existieren! Analog folgt aus $\sigma_s^2 = 2/6 - (1/2)^2$, dass (x, y) in der kleinern Ellipse liegt und dass $M_4 \leqq 0{,}6$ ist. Auch dies gilt unabhängig von den höhern Momenten von G. Dass F mehr Momente als G hat, hängt mit dem Umstand zusammen, dass $x(t)$ eine senkrechte Asymptote hat. Dadurch werden extrem grosse x-Werte rasch verkleinert.

Wenn noch mehr Momente von G bekannt sind, erhält man analog weitere Kegelschnitte. So wird das Gebiet, in dem (x, y) liegen kann, weiter verkleinert. Dieses schränkt sich jedoch im allgemeinen nicht auf einen Punkt zusammen. Dies rührt daher, dass die Ungleichungen (41) nicht hinreichend sind, damit $M(s)$ die Laplace-Transformierte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist. Man kann die Beziehung noch verallgemeinern, indem man statt n ein beliebiges reelles z setzt. So erhält man

$$M_{z+\varepsilon}\,M_{z-\varepsilon}-M_z^2\geqq 0\,.$$

Der Beweis erfolgt genau gleich wie bei ganzen n (siehe CRAMÉR [2], Seite 176).



Figur 6
Die durch Gleichung (44) dargestellten Kegelschnitte.

Auch diese Ungleichungen genügen nicht, dass die M_z die Momente einer Wahrscheinlichkeitsverteilung sind. Wir zeigen dies durch ein Gegenbeispiel. Es sei

$$M(z) = 1 \quad \text{für} \quad 0 \leqq z < 2\,, \quad M(z) = 2^{(z-2)} \quad \text{für} \quad z \geqq 2\,.$$

Wenn ein F mit diesen absoluten Momenten existiert, so ist insbesondere

$$\int dF(x) = 1\,, \quad \int |x|\, dF(x) = 1\,, \quad \int x^2\, dF(x) = 1\,.$$

Die Verteilung von $|x|$ hat die gewöhnlichen Momente $M_0 = M_1 = M_2 = 1$, und somit ist deren Streuung $= 0$, also $|x| = 1$ mit $W = 1$. Dies steht aber im Widerspruch zu den angegebenen höhern absoluten Momenten.

§ 10. *Partielle Gleichungen zweiter Ordnung*

Im Fall

$$-\dot{x}(x, t) = a(t) + b(t)\, x + c(t)\, x^2\,, \quad w(y, t) = p(t) + q(t)\, y + r(t)\, y^2$$

erhält man nach (28) die partielle Differentialgleichung

$$M''(c\, s + r\, h) + M'(b\, s + q\, h) + M\, (a\, s + p\, h) + \dot{M} = 0\,.$$

Noch einen andern Fall können wir auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückführen. Es sei

$$w(y, t) = p(t) + q(t)\, y\,,$$

$\dot{x}$ sei aber kein Polynom, sondern von der Form

$$-\dot{x}(x, t) = a(t) - \frac{b(t)}{x}\,. \tag{45}$$

Während die vorherigen Probleme in diesem Kapitel dem Charakter des Beispiels d) von § 2 entsprechen, hat dieses den einer «Queue» (Schlange): $\dot{x} = 0$ für ein festes x und annähernd konstant für grosse x.

Um in diesem Fall die Differentialgleichung zu erhalten, multiplizieren wir (3) mit $x\, e^{sx}$ und integrieren von $-\infty$ bis $+\infty$.

$$-\int f\,(a\,x - b)\, e^{sx}\, dx + \frac{\partial}{\partial t}\int x\, F(x)\, e^{sx}\, dx$$

$$= -\int dx \int (p + q\,y)\, x\, H(x - y)\, e^{sx}\, f(y)\, dy$$

$$= -\iint (p + q\,y)\, e^{s(x-y)}\, e^{sy}\, \big((x - y) + y\big)\, H(x - y)\, f(y)\, dy\, dx\,.$$

Somit erhält man

$$-a\,M' + b\,M + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{-1}{s}\, M\right)'$$

$$= -p\left(\frac{-1}{s}\, h\right)' M - p\,\frac{-1}{s}\, h\, M' - q\left(\frac{-1}{s}\, h\right)' M' - q\,\frac{-1}{s}\, h\, M''\,.$$

Wenn wir noch mit s multiplizieren und zusammenfassen

$$\left.\begin{aligned} \dot{M}' + q\,h\,M'' + \left[a\,s + p\,h + \left(h' - \frac{h}{s}\right) q\right] M' \\ -\frac{1}{s}\,\dot{M} + \left[p\left(h' - \frac{h}{s}\right) - b\,s\right] M = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Im stationären Fall lässt sich diese Gleichung nach der Methode von § 9 lösen. Im allgemeinen jedoch ist dies auch bei einfachen Verteilungen G eine schwierige Differentialgleichung.

§ 11. *Stationärer Zustand bei exponentiell verteilter Sprunghöhe*

Es sei

$$G(x) = 1 - e^{-kx} \quad \text{für} \quad x \geqq 0\,, \quad G(x) = 0 \quad \text{für} \quad x < 0\,.$$

Damit wird nach (42)

$$h(s) = \frac{s}{s - k}\,.$$

Wir setzen dies in (28) ein und dividieren durch h. Im stationären Fall erhält man somit

$$\sum_{n=0}^{N} M^{(n)}(s)\ \left(a_n\, s - a_n\, k + p_n\right) = 0\,. \tag{47}$$

Dies ist eine Laplacesche Differentialgleichung. Sie wird gelöst durch den Ansatz

$$M(s) = \int e^{s x}\, f(x)\, dx\,. \tag{48}$$

Dabei sind $f(x)$ und die Integrationsgrenzen geeignet zu wählen. Setzt man den Ansatz in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$\int s^{s x}\, s \sum a_n\, x^n\, f(x)\, dx + \int e^{s x} \sum (p_n - k\, a_n)\, x^n\, f(x)\, dx = 0\,.$$

Die Summen sind die Polynome $-\dot{x}(x)$ und $w(x) + k\,\dot{x}(x)$. Das erste Integral wird nun partiell umgeformt.

$$-\int e^{s x}\, s\, \dot{x}\, f(x)\, dx = -e^{s x}\, \dot{x}\, f(x)\,\Big| + \int e^{s x}\left(\dot{x}\, f(x)\right)'\, dx\,.$$

Somit erhalten wir

$$-e^{s x}\, \dot{x}\, f(x)\,\Big| + \int e^{s x}\left[\left(\dot{x}\, f(x)\right)' + (w + k\,\dot{x})\, f(x)\right] dx = 0\,. \tag{49}$$

Wir wählen nun $f(x)$ so, dass die eckige Klammer verschwindet:

$$\dot{x}\, f'(x) + f(x)\, (\dot{x}' + w + k\,\dot{x}) = 0\,.$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{-\dot{x}'}{-\dot{x}} - \frac{w + k\,\dot{x}}{\dot{x}}\,,$$

$$f(x) = \frac{c}{-\dot{x}}\, e^{-\int_{x_0}^{x} k + w(u)/\dot{x}(u)\, du}\,. \tag{50}$$

Nun werden die Integrationsgrenzen von (48) [nicht die im Exponenten von (50)] so bestimmt, dass $e^{s x}\,\dot{x}\, f(x)$ in diesen verschwindet. Also muss in den Grenzen X gelten

$$\dot{x}(X)\, f(X) = c\, e^{-\int_{x_0}^{X} k + w/\dot{x}\, du} = 0\,. \tag{51}$$

Die Gleichung gelte in X ($\geqq -\infty$) und in $+\infty$, aber nicht im Intervall $X < x < \infty$. So ist (47) erfüllt durch (48) und (50). Die Integrationskonstante c wird durch $M(0) = \int_X^\infty f(x)\, dx = 1$ erhalten. Da $M(s)$ die Laplace-Transformierte der Verteilung ist, haben wir mit $f(x)$ direkt die gesuchte Wahrscheinlichkeitsdichte gefunden. Der Umweg über die Laplace-Transformation konnte also mit der Gleichung (50) abgeschnitten werden.

Bemerkenswert ist, dass in der Formel (50) gar nicht zum Ausdruck kommt, dass w und $\dot{x}$ Polynome in x sind. Wir lassen nun beliebige Funktionen zu. Wir bilden $f(x)$ nach (50) und müssen prüfen, ob durch diesen Ansatz Gleichung (3) erfüllt ist. Es ist also zu zeigen, dass

$$f(x)\,\dot{x} = -\int_X^x w(y)\, e^{(y-x)k} f(y)\, dy\,.$$

Die linke Seite ist

$$f(x)\,\dot{x} = c\, e^{-\int_{x_0}^{x} k + w/\dot{x}\, du}\,.$$

Rechts erhalten wir

$$-\int_X^x w(y)\, e^{(y-x)k} f(y)\, dy = -\int_X^x w(y)\, e^{(y-x)k} \frac{c}{\dot{x}(y)}\, e^{-\int_{x_0}^{y} k + w/\dot{x}\, du}\, dy$$

$$= -c \int_X^x e^{(y-x)k}\, e^{(x_0-y)k}\, \frac{w(y)}{\dot{x}(y)}\, e^{-\int_{x_0}^{y} w/\dot{x}\, du}\, dy$$

$$= -c\, e^{(x_0-x)k} \int_X^x \frac{d}{dy} - e^{-\int_{x_0}^{y} w/\dot{x}\, du}\, dy$$

$$= c\, e^{(x_0-x)k}\, e^{-\int_{x_0}^{y} w/\dot{x}\, du}\Bigg|_X^x\,.$$

Wegen (51) verschwindet der Ausdruck an der untern Grenze. Somit stimmen die beiden Seiten der Gleichung überein.

Da alle Sprünge positiv sind, kann x nicht kleiner als z werden, falls $\dot{x}(z) \geqq 0$. Eine Untermenge von $x < z$ könnte zwar ergodische Klasse sein (siehe Doob [3]). Da aber beliebig hohe Sprünge möglich sind, ist dies (ausser $x = -\infty$) nur möglich, wenn darin $w = 0$. Sonst ist im stationären Fall $x \geqq z$.

Ferner beachten wir, dass (50) mit (20) übereinstimmt bis auf die untere Grenze des Integrals und die damit zusammenhängende Normierung. In (20) ist die Grenze 0, also die untere Schranke der x-Werte. In (50) würde nach (51) das Integral mit X als unterer Grenze divergieren. Deshalb wählten wir eine andere: x_0.

Die Divergenz des Integrals

$$\int^X \frac{w}{\dot{x}}\, dx = \int^X \frac{w}{dx/dt}\, dx = \int w\, dt = \infty$$

bedeutet, dass mit $W=1$ $x>X$ bleibt, während nach (9) $x=0$ mit positiver Wahrscheinlichkeit angenommen wird. Die Lösungen (20) und (50) unterscheiden sich also durch die Verhältnisse an der untern Grenze.

Wenn $\dot{x}$ und w in x_1 verschwinden, so bleibt der Prozess in x_1 konstant, sobald dieser Punkt erreicht ist. Wenn

$$\int^{x_1} \frac{w}{\dot{x}}\, dx = \int w\, dt$$

konvergiert, so geschieht dies mit positiver Wahrscheinlichkeit; x_1 ist in diesem Fall absorbierende Schranke.

4. Kapitel: Diverses

§ 12. *Ansatz für den mehrdimensionalen Fall*

$\vec{x}$ ist ein Vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Die entsprechende Differentialgleichung lautet

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}(\vec{x}, t)$$

oder, skalar geschrieben,

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Dies umfasst auch den Fall einer Differentialgleichung n-ter Ordnung. Wenn diese skalar ist, so setzen wir

$$\vec{x} = (x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n-1)})\,,$$

$$\dot{x}_i = x_{i+1} \quad \text{für} \quad i < n\,, \quad \dot{x}_n = \dot{x}_n(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n-1)}, t)\,.$$

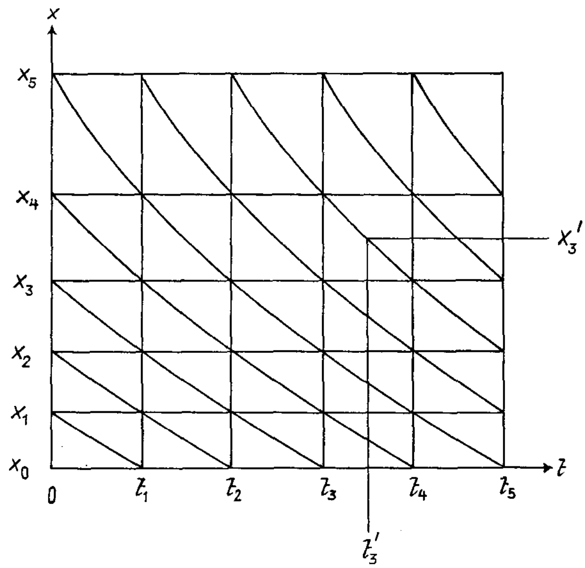
Auch die Anfangsverteilung, die Dichte der Sprünge und die Verteilung nach diesen sind Funktionen mehrerer Variablen:

$$F(\vec{x}, t), \quad w(\vec{y}, t)\,, \quad G(\vec{y}, \vec{x}, t)\,.$$

Formal ändert sich bei der Ableitung der Hauptformel (3) nichts.

§ 13. *Berechnung von Näherungen*

Auch im nichtstationären Fall lässt sich $f(x, t)$ näherungsweise nach der folgenden Methode berechnen. Wir beschränken uns zunächst auf den Fall, dass $\dot{x}$ nicht von t abhängt. $x = 0$ sei untere Grenze. Wir teilen die Zeit in gleiche Intervalle Δt. Dann werden die in den Momenten $t_i = i\,\Delta t$ null werdenden Lösungen der Differentialgleichung (1) eingetragen (siehe Figur 7). Durch diese und die Senkrechten $t = t_i$ erhält man ein Netz von Schnittpunkten, und



Figur 7

damit die Ordinaten $x_0 = 0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Wir setzen $t_i' = t_i + \Delta t/2$ und

$$\left.\begin{aligned} \Delta F_{n,i} &= F(x_n, t_i) - F(x_{n-1}, t_i) \, , \\ \Delta G_{k,n,i} &= G(x_k, x_n', t_i') - G(x_k, x_{n-1}', t_i') \end{aligned}\right\} \quad n, k \geqq 1 \, .$$

(Für die Definition von x_n' siehe Figur 7.)

So wird

$$\begin{aligned} F(0, t_{i+1}) = {} & [1 - w(0, t_i') \, \Delta t] \, F(x_1, t_i) + F(x_1, t_i) \, \omega(0, t_i') \, \Delta t \, G(0, x_0', t_i') \\ & + \sum_k \Delta F_{k+1,i} \, w(x_k, t_i') \, \Delta t \, G(x_k, x_0', t_i') \, , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta F_{n,i+1} = {} & [1 - w(x_n, t_i') \, \Delta t] \, \Delta F_{n+1,i} + F(x_1, t_i) \, w(0, t_i') \, \Delta t \, \Delta G_{0,n,i} \\ & + \sum_k \Delta F_{k+1,i} \, w(x_k, t_i') \, \Delta t \, \Delta G_{k,n,i} \, . \end{aligned}$$

So erhält man für diese $\Delta F_{n,i+1}$ lineare Kombinationen der $\Delta F_{k,i}$, die sukzessive gelöst werden können (zum Beispiel mit Rechenautomaten).

Wenn $\dot{x}$ mit t variiert, so werden die x_i von t abhängig. Im übrigen verändert sich jedoch die Methode nicht. Statt $w(x_k, t_i')$ kann auch das Mittel von w im Viereck

$$(x_{k+1}, t_i) \; (x_k, t_i) \; (x_{k-1}, t_{i+1}) \; (x_k, t_{i+1})$$

genommen werden.

Wenn das Problem auf eine Integralgleichung gebracht werden kann, so lässt sich diese durch ein System linearer Gleichungen annähern. Da es sich um Volterra-Gleichungen handelt, weist die Matrix Dreiecksform auf. Das (zunächst noch nicht normierte) $f(x)$ kann rekursiv erhalten werden. Diese Methode gibt weniger Rechenarbeit als die erste, ist aber nur für den stationären Fall brauchbar. Auch ist nicht ersichtlich, wie schnell sich die Anfangsverteilung der asymptotischen nähert.

§ 14. *Anmerkungen über Existenzsätze*

Zunächst muss die Differentialgleichung (1) in jedem Punkt (x, t), der vom Prozess angenommen werden kann, eine eindeutige Lösung haben. Dies hat wenigstens für wachsende t zu gelten; für abnehmende t ist die Bedingung bei den Problemen des 2. Kapitels in $x = 0$ nicht erfüllt.

Nun wenden wir uns der Frage zu, ob das Hauptproblem eine eindeutige Lösung habe. Wenn $x = x(c, t)$ die Lösungen von (1) sind, so können wir eine Koordinatentransformation durchführen mit t und der Integrationskonstanten c als neue Variable. Damit sind die einzigen Veränderungen von c die Sprünge. So ist das Problem auf den «absolut unstetigen Fall» von W. FELLER [4] zurückgeführt.

Aber auch wenn die Existenz einer Lösung bewiesen ist, braucht es keine stationäre zu geben. Im «Queue»-Problem mit $-\dot{x} = a$ und $w =$ const ist bewiesen worden (zum Beispiel LINDLEY [8]), dass eine stationäre Lösung existiert, wenn $p\,\overline{G} < a$ ist. In der Integralgleichung äussert sich dies darin, dass $\int_0^\infty K^*(x, 0)\,dx$ konvergiert. Dies ist nicht auf den Spezialfall $p =$ const und $a =$ const beschränkt. Denn falls dieses Integral konvergiert, so erhält man mit (9) ein $F(x)$, das die Integralgleichung und damit auch (3) befriedigt.

Analog ist es mit der Laplace-Transformation. Wenn wir eine stationäre oder variable Lösung der Differentialgleichung (28) gefunden haben, so ist die Umkehrung der Laplace-Transformation eine Lösung von (3). Wenn diese eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, so ist mit der Lösung des Problems auch deren Existenz bewiesen. Weiteres über Existenzsätze findet sich in BLANC-LAPIERRE und FORTET [1] und in DOOB [3].

LITERATURVERZEICHNIS

[1] A. BLANC-LAPIERRE und FORTET, *Théorie des fonctions aléatoires* (Masson Cie., Paris 1953).

[2] HARALD CRAMÉR, *Mathematical Methods of Statistics* (Princeton University Press 1946).

[3] J. L. DOOB, *Stochastic Processes* (John Wiley and Sons, New York; Chapman and Hall, London 1953).

[4] WILLY FELLER, *Zur Theorie der stochastischen Prozesse* (Existenz- und Eindeutigkeitssätze), Math. Ann. *113*, 113–160 (1936).

[5] E. GOURSAT, *Détermination de la résolvente d'une classe d'équations intégrales,* Bull. Sci. math. *68,* 114–150 (1933).
[6] DAVID G. KENDALL, *Stochastic Processes in the Theory of Queues,* Ann. Math. Statist. *24,* 338 (1953).
[7] PAUL LÉVY, *Processus stochastiques et mouvement Brownien* (Gauthier-Villars, Paris 1948).
[8] D. V. LINDLEY, *Theory of Queues with a Single Server,* Proc. Camb. phil. Soc. *48,* 277 (1952).
[9] WERNER SCHMEIDLER, *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik* (Geest und Portig, Leipzig 1950).
[10] LAURENT SCHWARTZ, *Théorie des distributions* (Hermann, Paris 1950).

LEBENSLAUF

Ich wurde am 26. Dezember 1928 als Sohn des Dr. rer. pol. Paul Dalcher und der Alice geb. Luder in Zug geboren. Hier besuchte ich die Primarschule und die technische Abteilung der Kantonsschule und bestand im Sommer 1947 die Maturitätsprüfung. Dann studierte ich 10 Semester an der Abteilung für Mathematik und Physik der Eidgenössischen Technischen Hochschule, wo ich bis nach der Vordiplomprüfung die physikalische Richtung wählte, dann aber im Herbst 1952 das Diplom als Mathematiker erwarb. Darauf war ich ein Jahr bei Herrn Prof. Dr. W. Saxer als Assistent für Mathematik tätig. Ein weiteres Jahr studierte ich im statistischen Laboratorium der Universität Cambridge (England). Mein «Supervisor» war Herr D. V. Lindley.

Mein Dank gebührt zunächst meinen Eltern, die mir das Studium ermöglicht haben. Meinen Professoren, insbesondere Herrn Prof. Dr. Saxer, spreche ich meinen aufrichtigen Dank für die wohlwollende Förderung meiner beruflichen Ausbildung aus, und dem Korreferenten, Herrn Prof. Dr. Pfluger, danke ich für die Entgegennahme der Arbeit.

Zug, den 23. März 1955. *Andreas Dalcher*