

Prom. Nr. 3451

Traglast und optimale Bemessung von Platten

Von der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
IN ZÜRICH

zur Erlangung der Würde eines

DOKTORS DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

genehmigte

PROMOTIONSARBEIT

vorgelegt von

RUDOLF WOLFENSBERGER

dipl. Bauingenieur ETH
von Zürich und Bauma ZH

Referent: Herr Prof. Dr. B. Thürlimann

Korreferent: Herr Prof. Dr. H. Ziegler

Erscheint in der Schriftenreihe der «Technischen Forschungs- und Beratungsstelle in Wildegg» und der «Stiftung für systematische wissenschaftliche Forschungen auf dem Gebiete des Betons und des Eisenbetons».

Verlag: Technische Forschungs- und Beratungsstelle
der Schweizerischen Zementindustrie, Wildegg

Vorwort

Die vorliegende Arbeit hat zum Ziel, eine Berechnungsmethode für Platten zu entwickeln mit Resultaten, die in bezug auf die Traglast auf der sicheren Seite liegen. Wird eine grobe Berechnung durchgeführt, erhält man ein Resultat, das relativ weit von der Traglast entfernt ist, aber sie dennoch unterschätzt. Mit einer Verfeinerung der Berechnungsmethode kann man beliebig genau die exakte Lösung annähern.

Als zweites wird gezeigt, daß durch kleine Umformungen der aufgestellten Methode die minimale Armierung einer Platte für eine gegebene Belastung gefunden werden kann. Die gegebene Belastung liegt nicht höher als die Traglast der Platte mit der gefundenen Armierung. Die Lösung liegt demnach ebenfalls auf der sicheren Seite.

Diese Arbeit ist unter der Leitung meines verehrten Lehrers, Herrn Prof. Dr. B. Thürlimann, entstanden, dem ich an dieser Stelle für seine wertvollen Ratschläge bestens danken möchte. Herrn Prof. Dr. H. Ziegler danke ich für die Übernahme des Korreferates, sowie für seine ständige Anteilnahme am Fortgang meiner Abhandlung.

Der «Technischen Forschungs- und Beratungsstelle in Wildegg» und der «Stiftung für systematische wissenschaftliche Forschungen auf dem Gebiete des Betons und des Eisenbetons» bin ich für die großzügige finanzielle Unterstützung bei der Drucklegung meiner Arbeit außerordentlich dankbar.

Leer - Vide - Empty

Inhaltsverzeichnis

1. <i>Einleitung</i>	7
2. <i>Grundlagen</i>	9
2.1 Voraussetzungen	9
2.2 Grenzwertsätze	12
2.3 Übersicht der bestehenden Arbeiten	14
3. <i>Generelle Gedanken zum Vorgehen</i>	16
3.1 Bestimmung der Traglast	16
3.2 Bestimmung der optimalen Armierung	24
3.3 Zusammenfassung	33
4. <i>Plastizitätsbedingungen</i>	34
4.1 Plastifizierung eines Plattenbereichs	34
4.2 Orthogonale Armierung	34
4.2.1 Plastizitätsbedingungen	34
4.2.2 Lineare Plastizitätsbedingungen	50
4.2.3 Graphische Darstellung der Plastizitätsbedingungen	52
4.3 Armierung in beliebiger Richtung	58
4.3.1 Plastizitätsbedingungen	58
4.3.2 Allgemeine lineare Plastizitätsbedingungen	67
5. <i>Gleichgewichtszustände für Platten</i>	68
5.1 Gleichgewichtsbedingungen	68
5.2 Randbedingungen	72
5.2.1 Freier Rand	72
5.2.2 Einfach gelagerter Rand	74
5.2.3 Eingespannter Rand	75
5.3 Gleichgewichtszustände für spezielle Belastungsverteilung	76
5.3.1 Voraussetzungen	76
5.3.2 Endlichfach statisch unbestimmtes System	77
5.3.3 Näherung des Momentenverlaufes	78
6. <i>Erfüllen der Plastizitätsbedingungen</i>	80
7. <i>Traglast einer Platte (Analysis)</i>	82
7.1 Lösungsweg	82
7.2 Fehlerbetrachtungen	83
7.3 Beispiel	85

<i>8. Minimalarmierung einer Platte (Bemessung)</i>	99
8.1 Lösungsweg	99
8.2 Fehlerbetrachtungen	102
<i>9. Zusammenstellung der berechneten Beispiele</i>	103
<i>10. Schlußbemerkung</i>	110
<i>11. Anhang</i>	112
11.1 Einschreiben und Umschreiben der Momentenfläche	112
11.2 Lösung des linearen Programms mit Hilfe eines speziellen Maschinenprogramms	113
11.3 Genauigkeit der Lösung eines linearen Programms	115

1. Einleitung

Die meisten der heute bekannten Lösungen zur Berechnung der Tragfähigkeit einer Stahlbetonplatte beruhen auf der Bruchlinientheorie. Die erste wichtige Arbeit darüber hat Johansen [1; S. 277] im Jahre 1932 veröffentlicht. Drucker, Greenberg, Prager, Hodge [2, 3, 4] und Hill [5] gelang es, die beiden fundamentalen Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie aufzustellen und zu beweisen. Anhand dieser Sätze kann gezeigt werden, daß alle auf der Bruchlinientheorie aufgebauten Lösungen eine Belastung ergeben, die größer oder gleich der Traglast ist und daher im allgemeinen die Traglast überschätzt.

Zur Berechnung der Traglast ist es notwendig, die tatsächlich auftretende Bruchlinienkonfiguration zu finden. Fast alle neueren Arbeiten beschäftigen sich mit dieser Aufgabe. Es hat sich gezeigt, daß dies in einfachen Fällen schwierig und in komplizierten Fällen praktisch unmöglich ist. In den meisten Veröffentlichungen sind nur stark vereinfachte Bruchlinienbilder angegeben. So findet man z.B. für die Traglast einer total eingespannten Quadratplatte mit oben und unten in x- und y-Richtung gleicher Armierung mit Bruchlinien nur längs der Diagonalen eine Belastung von $\frac{48 M_p}{l^2}$. Dagegen hat neulich Wood [6; S. 177] für eine

Bruchlinienkonfiguration eine Belastung von $\frac{37,7 M_p}{l^2}$ angegeben. Der Unterschied der beiden Belastungen beträgt 27,5%.

Die vorliegende Arbeit hat zum Ziel, eine Berechnungsmethode für Platten zu entwickeln mit Resultaten, die in bezug auf die Traglast auf der sicheren Seite liegen. Wird eine grobe Berechnung durchgeführt, erhält man ein Resultat, das relativ weit von der Traglast entfernt ist,

aber sie dennoch unterschätzt. Mit einer Verfeinerung der Berechnungsmethode kann man beliebig genau die exakte Lösung annähern.

Als zweites wird gezeigt, daß durch kleine Umformungen der aufgestellten Methode die minimale Armierung einer Platte für eine gegebene Belastung gefunden werden kann. Die gegebene Belastung liegt nicht höher als die Traglast der Platte mit der gefundenen Armierung. Die Lösung liegt demnach ebenfalls auf der sicheren Seite.

2. Grundlagen

2.1 Voraussetzungen

Die wichtigsten Voraussetzungen zur Ermittlung der Traglast nach der einfachen Plastizitätstheorie sind:

- Die Deformationen (vor dem Kollaps) sollen so klein sein, daß die Gleichgewichtsbedingungen am undeformierten System befriedigt werden können (wie bei elastischer Behandlung).
- Es dürfen keine Instabilitäten vor Erreichen der Traglast auftreten (wie bei elastischer Behandlung).
- Die Einflüsse von Quer- und Normalkräften werden vernachlässigt.
- Es treten nur statische Beanspruchungen auf (keine Wechselbeanspruchungen).
- Die Lasten müssen im allgemeinen proportional zunehmen.
- Das Material muß plastisch verformbar sein (Rotationsfähigkeit).

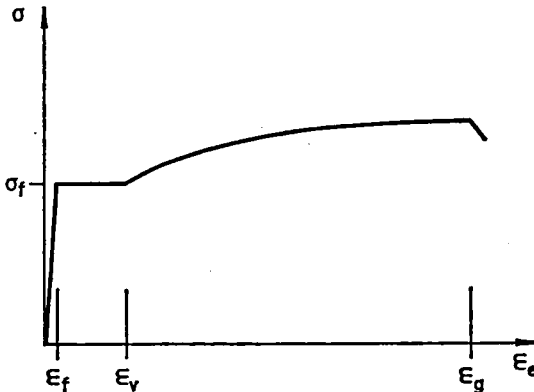


Abb. 2.1 Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines naturharten Armierungsstahles (außerhalb der Einschnürungszone)

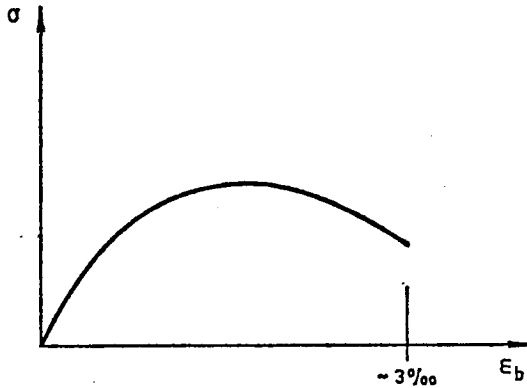


Abb. 2.2 Spannungs-Dehnungs-Diagramm von Beton unter einer Biegebeanspruchung

Im folgenden soll noch näher auf den Punkt f eingegangen werden. Den Betrachtungen werden die Spannungs-Dehnungs-Diagramme für naturharten Armierungsstahl und Beton (Abb. 2.1 und 2.2) zugrundegelegt. In Abb. 2.3 ist das $M-\phi$ -Diagramm für einen normal armierten Stahlbetonquerschnitt dargestellt.

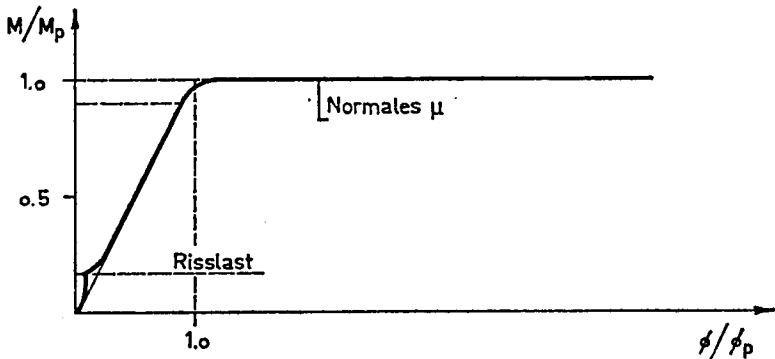


Abb. 2.3 $M-\phi$ -Diagramm eines Stahlbetonquerschnittes

Es zeigt die Relation zwischen Moment und Krümmung. Bei Vernachlässigung des Verfestigungsbereiches und unter der Annahme, daß der Hebelarm ηb der inneren Kräfte konstant ist, geht das $M-\varnothing$ -Diagramm von Abb. 2.3 in dasjenige von Abb. 2.4 über. Dies entspricht gut einer normal armierten Stahlbetonplatte.

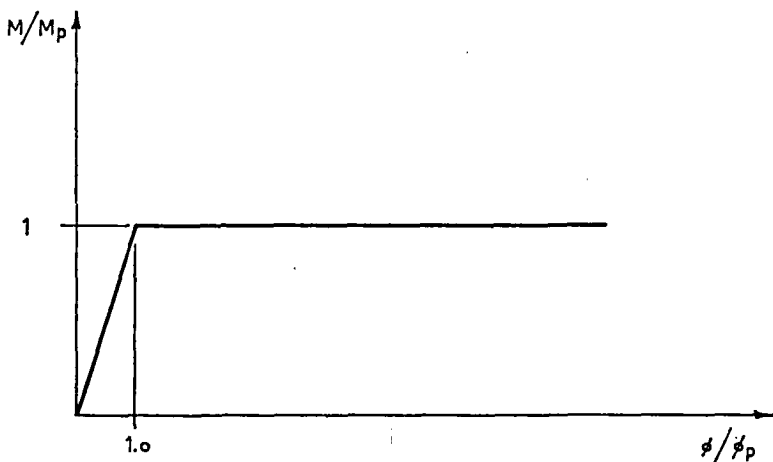


Abb. 2.4 Ideal-elastisch-plastisches $M-\varnothing$ -Diagramm

Das $M-\varnothing$ -Diagramm in Abb. 2.4 stellt ein elastisch-ideal-plastisches Verhalten dar. Durch Vernachlässigung der elastischen gegenüber den plastischen Verformungen erhält man ein starr-ideal-plastisches Verhalten (Abb. 2.5).

Die Gültigkeit der Plastizitätstheorie setzt ein ideal-plastisches Verhalten der Materialien voraus. Dies trifft sowohl für elastisch-ideal-plastisches wie für starr-ideal-plastisches Material zu. In normalen Fällen genügt es jedoch, wenn die maximale Krümmung \varnothing ein Vielfaches der Vergleichskrümmung \varnothing_p erreicht (Abb. 2.3). Im Stahlbau wird das Verhältnis $\varnothing/\varnothing_p$ durch Instabilität beschränkt [7]. Im Stahlbetonbau tritt bei zu

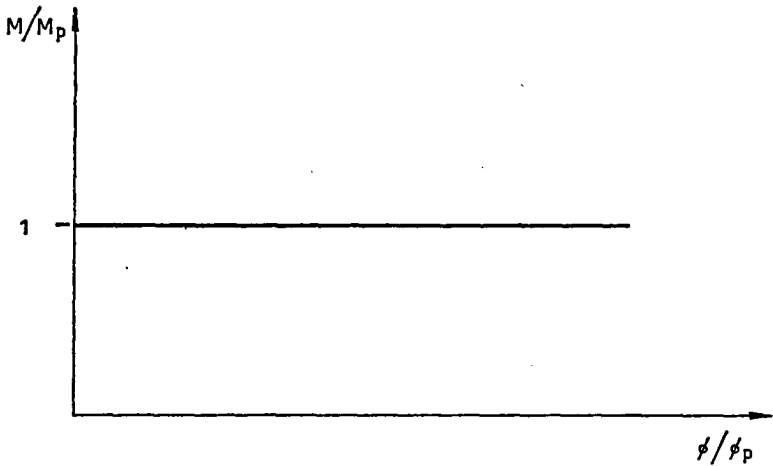


Abb. 2.5 Starr-ideal-plastisches $M-\phi$ -Diagramm

stark bewehrten Querschnitten frühzeitig ein Stauchen der Betondruckzone ein. Durch Begrenzen des Bewehrungsgehaltes μ_{max} kann dies verhindert werden. Ein schlagartiger Bruch kann durch einen minimalen Bewehrungsgehalt μ_{min} vermieden werden.

Ein solches Versagen kann eintreten, wenn das Rißmoment des homogenen Betonquerschnittes bei Einrechnung der Zugfähigkeit des Betons größer ist als das plastische Moment des gerissenen Stahlbetonquerschnittes.

2.2 Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie

Die strenge Lösung eines Plattenproblems nach der Plastizitätstheorie ist im allgemeinen kaum möglich. Nur in ganz speziellen Fällen gelingt es, die statischen und die kinematischen Bedingungen über den ganzen

Plattenbereich zu erfüllen. Aus diesem Grund kommt den beiden Grenzwertsätzen eine große praktische Bedeutung zu. Mit ihrer Anwendung gelingt es, die Traglast eines Systems von beiden Seiten her einzuschränken. Fallen die beiden Schranken zusammen, so kennt man die exakte Lösung.

Die beiden Grenzwertsätze lauten nach [8], [9]:

1. Grenzwertsatz (unterer Grenzwert)

Jede Belastung, zu der sich ein stabiler, statisch zulässiger Spannungszustand angeben läßt, liegt nicht höher als die Traglast.

Eine solche Belastung stellt also eine untere Schranke für die Traglast dar; sie liegt noch innerhalb bzw. an der Grenze der Tragfähigkeit des Systems.

2. Grenzwertsatz (oberer Grenzwert)

Jede Belastung, zu der sich ein instabiler, kinematisch zulässiger Bewegungszustand angeben läßt, liegt nicht tiefer als die Traglast.

Eine solche Belastung stellt also eine obere Schranke für die Traglast dar; sie liegt außerhalb bzw. an der Grenze der Tragfähigkeit des Systems.

Die neu eingeführten Begriffe sollen noch kurz beschrieben werden. Eine ausführliche Erklärung ist in [8] und [9] zu finden.

Ein *Spannungszustand* wird als *statisch zulässig* bezeichnet, wenn unter einer Gruppe von äußeren und inneren Kräften jeder Teil des betrachteten Systems im Gleichgewicht ist. Ein solcher Spannungszustand wird *stabil* genannt, wenn an keinem Ort die Plastizitätsbedingungen verletzt werden.

Ein *Bewegungszustand* wird als *kinematisch zulässig* bezeichnet, wenn er mit den Bindungen des Tragwerkes verträglich ist. Ein solcher Bewegungszustand wird *instabil* genannt, wenn die Leistung der äußeren Lasten gleich (oder größer) ist als die Dissipationsleistung.

In dieser Arbeit werden ausschließlich untere Grenzwerte der Traglast gesucht. Demnach benötigt man nur den 1. Grenzwertsatz. Dieser kann in einer anschaulicheren Form folgendermaßen angeschrieben werden:

1. Grenzwertsatz (unterer Grenzwert)

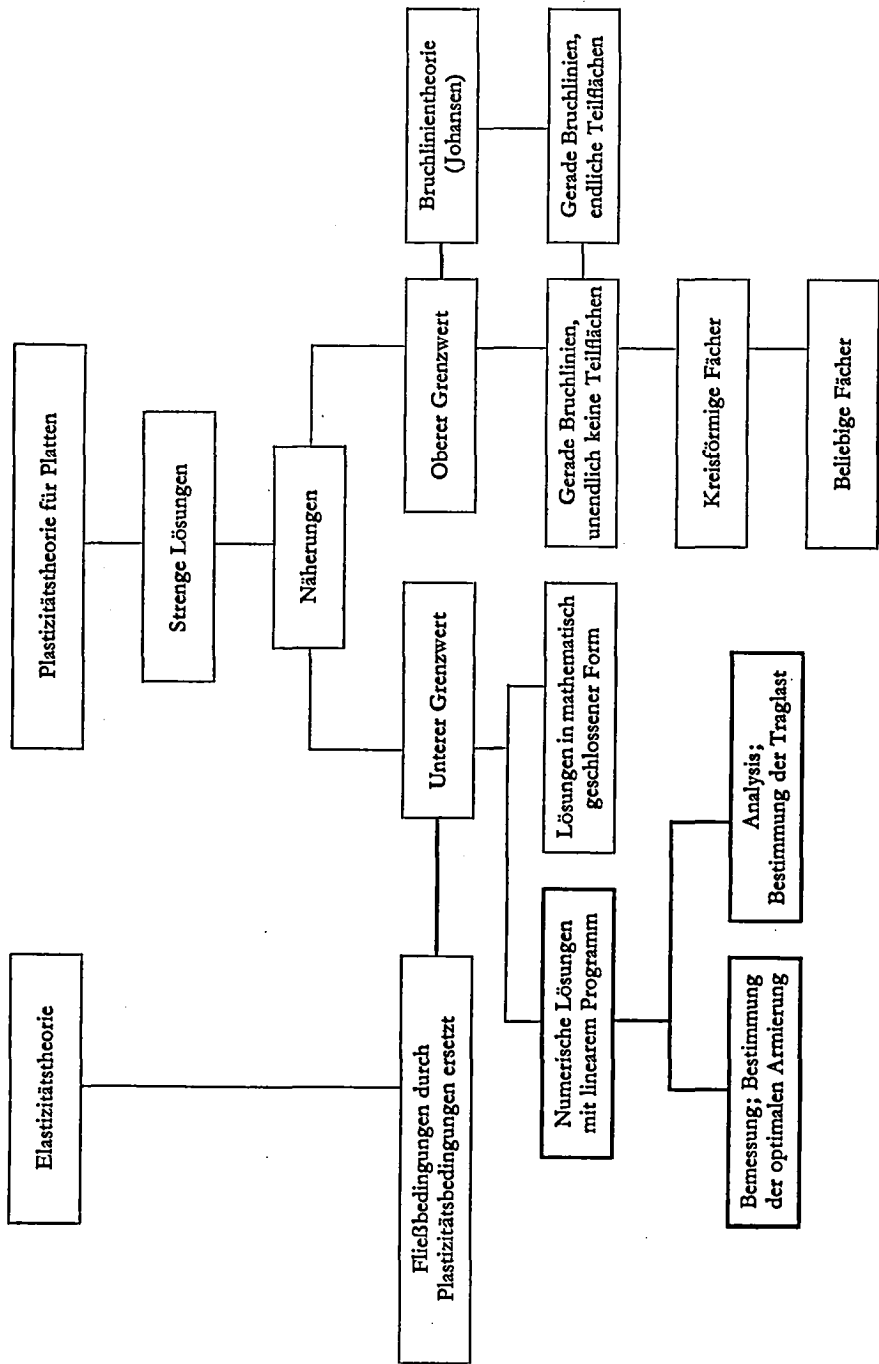
Jede Belastung, zu der sich ein möglicher Gleichgewichtszustand finden läßt, dessen Schnittkräfte die Plastizitätsbedingungen an keinem Punkt verletzen, ist kleiner oder höchstens gleich der Traglast.

2.3 Übersicht der bestehenden Arbeiten

Um die Traglast einer Platte zu bestimmen, existieren heute schon verschiedene Berechnungsmethoden. Es würde zu weit führen, auf alle diese verschiedenen Verfahren einzugehen. Im Buch von Wood [6] findet man darüber sehr ausführliche Hinweise mit nützlichen Vergleichen und Diskussionen.

In Tafel I wird versucht, die verschiedenen Theorien schematisch zu ordnen. Darin sind die bis heute bekannten Verfahren mager umrandet. Die Lösungsmethoden mit linearem Programm, die erstmals in dieser Arbeit behandelt werden, besitzen eine fette Umrandung.

Tafel I



3. Generelle Gedanken zum Vorgehen

Das Ziel dieser Arbeit ist, Lösungen auf der sicheren Seite, d.h. untere Grenzwerte der Traglast zu bestimmen. Nach dem 1. Grenzwertsatz (unterer Grenzwert) der Plastizitätstheorie muß dafür ein möglicher Gleichgewichtszustand gefunden werden, dessen Schnittkräfte an keinem Punkt die Plastizitätsbedingungen verletzen. Die maximale Belastung unter allen möglichen Lösungen ist die Traglast. Das Vorgehen soll an einem einfachen Beispiel erläutert werden. Gegeben sei ein Balken mit konstanter Höhe, der an einem Ende frei aufliegt und am anderen eingespannt ist. Er wird in der Mitte mit einer Einzellast Q belastet (Abb. 3.1).

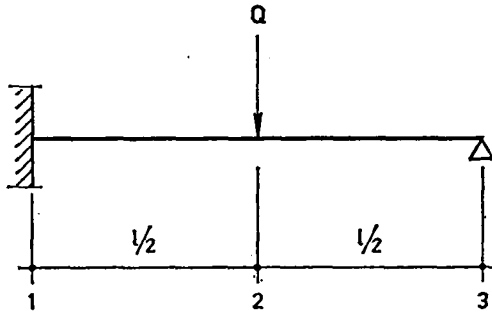


Abb. 3.1 Einführungsbeispiel: Bestimmung der Traglast

3.1 Bestimmung der Traglast

Als erstes soll bei gegebener Armierung die *maximale* Belastung Q gesucht werden, zu der ein möglicher Gleichgewichtszustand existiert, des-

sen Schnittkräfte an keinem Punkt die Plastizitätsbedingungen verletzen. Diese Belastung ist gleich der Traglast Q_p , wenn alle möglichen Gleichgewichtszustände untersucht werden. In diesem Beispiel handelt es sich um einen Stahlbetonbalken mit einer konstanten Armierung über die ganze Länge. Das positive plastische Moment (unten Zug) ist P ; das negative plastische Moment ist $-N$ (oben Zug). Beide sind konstant über die Balkenlänge (Abb. 3.2).

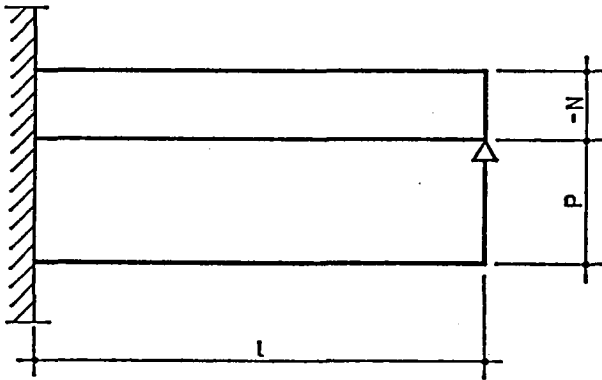


Abb. 3.2 Verlauf der plastischen Momente über den Balken

Als erstes wählt man als statisch bestimmtes Grundsystem den einfachen Balken und führt als überzählige Größe X das Einspannmoment am linken Auflager ein (Abb. 3.3).



Abb. 3.3 Grundsystem mit überzähliger Größe X

Das Moment M erhält man durch Superposition des Momentes $Q M_0$ infolge der äußeren Belastung Q und des Momentes $X M_x$ infolge der überzähligen Größe X am Grundsystem (einfacher Balken). Darin ist M_x das Moment am Grundsystem infolge $X = 1$, und M_0 das Moment am Grundsystem infolge $Q = 1$.

$$M = Q M_0 + X M_x \quad (3.1)$$

Somit ist der Ausdruck für M linear in X und Q und ergibt für die Punkte 1, 2, 3 (Abb. 3.4)

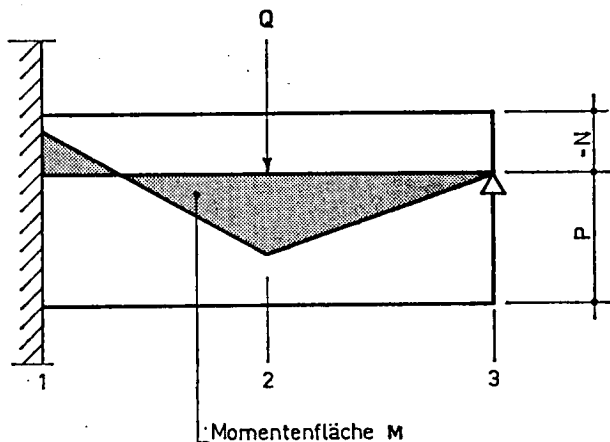


Abb. 3.4 Darstellung einer zulässigen Momentenfläche, die an keinem Punkt die Plastizitätsbedingungen verletzt

$$\begin{aligned} M_1 &= X \\ M_2 &= Q \frac{l}{4} + X \frac{1}{2} \\ M_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Diese Momente mit den zugehörigen Auflagerreaktionen und der äußeren Belastung Q stellen für jeden Wert von Q und X einen möglichen Gleichgewichtszustand dar.

Die Forderung, daß die Plastizitätsbedingungen an keinem Punkt verletzt werden sollen, lautet:

$$-N \leq M_i \leq P \quad (3.3)$$

Sie ist graphisch in Abb. 3.4 dargestellt.

Beachtet man, daß das Moment zwischen den Punkten 1, 2 und 3 geradlinig verläuft, so genügt es, die Bedingung (3.3) nur an den Punkten 1, 2 und 3 zu formulieren.

Diese lauten:

in Punkt 1:

$$\begin{aligned} X &\leq P \\ -X &\leq N \end{aligned}$$

in Punkt 2:

$$\begin{aligned} Q\frac{l}{4} + X\frac{1}{2} &\leq P \\ -Q\frac{l}{4} - X\frac{1}{2} &\leq N \end{aligned} \quad (3.4)$$

und in Punkt 3:

$$-N \leq 0 \leq P$$

In Punkt 3 sind die Ungleichungen trivial. Alle Bedingungen sind in X , Q , P und N linear.

Gesucht ist natürlich die größtmögliche Belastung Q . Im vorliegenden Beispiel ist sie gleich der Traglast Q_p , weil alle möglichen Gleichgewichtszustände durch Variation von X und Q berücksichtigt werden.

Mathematisch kann die Aufgabe folgendermaßen formuliert werden: Gesucht ist Q_{max} , so daß die Ungleichungen (3.4), die linear in den freien Variablen X und Q sind, erfüllt werden.

Eine solche Aufgabe ist ein lineares Programm und kann gelöst werden.

Ein allgemeines lineares Programm [10], [11] ist gegeben durch m lineare Funktionen

$$y_i = - \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + b_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (3.5)$$

mit n Variablen x_1, x_2, \dots, x_n und eine Objektfunktion

$$Z = - \sum_{k=1}^n a_k x_k + b \quad (3.6)$$

Durch geeignete Wahl der x_k kann man Z minimal oder maximal machen, doch müssen die y_i und ein Teil der Variablen x_k positiv sein.

Die Nebenbedingungen lauten also:

$$\begin{aligned} y_i &\geq 0 \\ \text{ein Teil von } x_k &\geq 0 \\ \text{ein Teil von } x_k &\text{ ohne Bedingungen} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Das lineare Programm wird in einem Schema mit transponierter Beschriftung dargestellt:

	$y_1 =$	$y_2 =$	$y_3 =$	$y_4 =$	$Z =$
$-X$	+1	-1	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$-\frac{Q}{4}$	0	0	+1	-1	-1
1	P	N	P	N	0

Zur Veranschaulichung soll dieses lineare Programm, das zwei unabhängige Variable X und Q besitzt, graphisch gelöst werden (Abb. 3.5). Für die analytische Lösung sei auf [10] und [11] verwiesen.

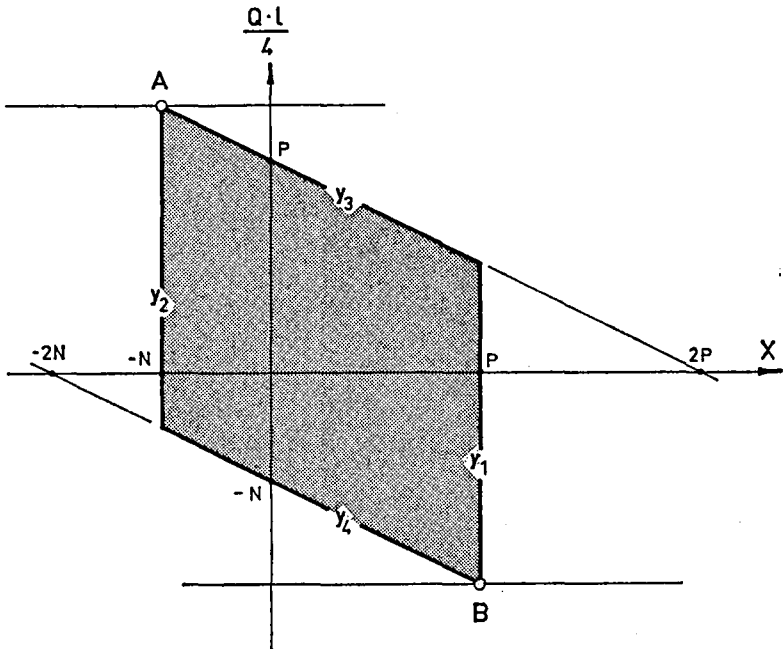


Abb. 3.5 Graphische Lösung des linearen Programms

In der Ebene, gebildet durch die rechtwinkligen Koordinaten X und Q_4^I , ist $y_1 = 0$, d. h. $X = P$ eine Gerade, die in der Figur eingezeichnet und mit y_1 bezeichnet wurde. Soll nun im Punkt (X, Q_4^I) unsere Bedingung $y_1 \geq 0$ erfüllt werden, so muß dieser Punkt in der Halbebene liegen, die durch diese Gerade begrenzt wird und den Nullpunkt enthält (der Nullpunkt erfüllt diese Ungleichung). Analog ergeben die Bedingungen $y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0$ drei weitere Halbebenen. Ein Punkt (X, Q_4^I) , der alle vier Nebenbedingungen erfüllt, muß in dem Gebiet liegen, das diese vier Halbebenen gemeinsam haben. Dies ist das in der Figur schraffierte Parallelogramm. Nur die Punkte im Innern und auf dem Rand dieses Parallelogramms sind in diesem Problem zulässig. Die Funktion Z ist proportional zum Abstand des Punktes (X, Q_4^I) von der Geraden $Q_4^I = 0$. Man erkennt dies, indem man einige Niveaulinien $Z = \text{konstant}$ dieser Funktion zeichnet. Sie verlaufen parallel der Geraden $Q_4^I = 0$. Die *Extremalaufgabe* läßt sich also folgendermaßen geometrisch interpretieren:

Unter allen Punkten im Innern oder auf dem Rand des Parallelogramms ist derjenige gesucht, der den größten Abstand von der Geraden $Q_4^I = 0$ hat. Die Anschauung gibt die Ecke A als Lösung, wenn man für Q eine positive Kraft annimmt. Ist Q negativ, also aufwärts gerichtet, erhält man die Ecke B .

Die Koordinaten von A

$$X = -N; Q_4^I = P + \frac{N}{2} \quad (3.11)$$

sowie die Koordinaten von B

$$X = P; Q_4^I = -\left(\frac{P}{2} + N\right) \quad (3.12)$$

sind die Lösungen des linearen Programms. Für eine nach unten gerichtete Belastung tritt an der Einspannstelle ein negatives und in der Feldmitte ein positives plastisches Moment auf.

Die Traglast erreicht den Wert

$$Q_p = \frac{(4P + 2N)}{l} \quad (3.13)$$

Die Momentenfläche und der Verlauf des plastischen Momentes sind aus Abb. 3.6 ersichtlich.

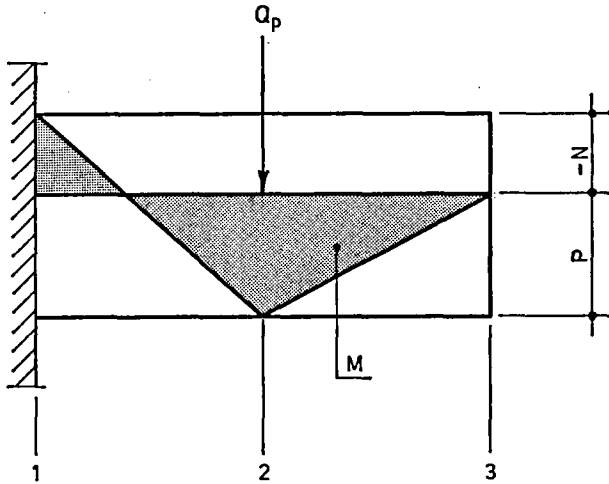


Abb. 3.6 Verlauf der Momentenfläche infolge Q_p

3.2 Bestimmung der optimalen Armierung

Als zweite Aufgabe soll die Größe und die Anordnung der minimalen Armierung für eine gegebene Belastung gesucht werden. Für die gegebene Belastung wird von allen möglichen Gleichgewichtszuständen der-

jenige gesucht, für den das kleinste Armierungsvolumen bzw. Armierungsgewicht genügt, um an jedem Punkt die Plastizitätsbedingungen zu erfüllen. Die gegebene Belastung ist dann gleich der Traglast des Balkens mit der gefundenen Armierung.

Als erstes soll die Abhängigkeit des plastischen Momentes von der Armierung angegeben werden.

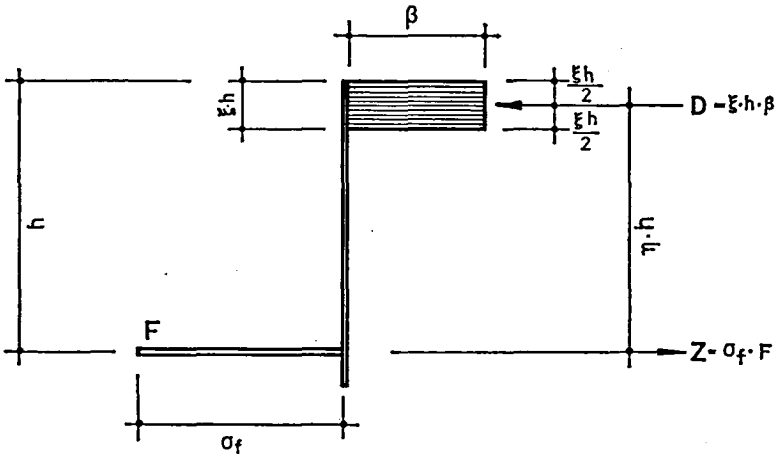


Abb. 3.7 Spannungsverteilung in einem plastifizierten Stahlbetonquerschnitt infolge $M_p = \eta b \sigma_f F$

Mit der in Abb. 3.7 dargestellten Spannungsverteilung in einem plastifizierten Stahlbetonquerschnitt erhält man das positive und das negative plastische Moment zu

$$\begin{aligned} P &= \sigma_f F^P \eta^P b \\ N &= \sigma_f F^N \eta^N b \end{aligned} \tag{3.14}$$

Mit der Annahme, daß $\eta^P = \eta^N = \eta$ konstant, d.h. unabhängig von dem Armierungsgehalt ist, was bei kleinem Armierungsgehalt annähernd zutrifft, erhält man nach kleiner Umformung:

$$F^P = c_1 \frac{P}{b \sigma_f} \quad (3.15)$$

$$F^N = c_1 \frac{N}{b \sigma_f}$$

wobei $c_1 = \frac{1}{\eta}$ konstant ist. Da bei einem Tragwerk meistens nur eine Armierungsstahlsorte verwendet wird und somit $\sigma_f = \text{konstant}$ ist, gehen die Gleichungen (3.15) über in

$$F^P = c_2 \frac{P}{b} \quad (3.16)$$

$$F^N = c_2 \frac{N}{b}$$

wobei $c_2 = \frac{1}{\eta \sigma_f}$ konstant ist. Für stückweise konstantes b , was in Zukunft immer angenommen wird, erhält man für ein Teilstück die einfache Beziehung

$$\begin{aligned} F^P &= c_3 P \\ F^N &= c_3 N \end{aligned} \quad (3.17)$$

wobei $c_3 = \frac{1}{\eta \sigma_f b}$ konstant ist.

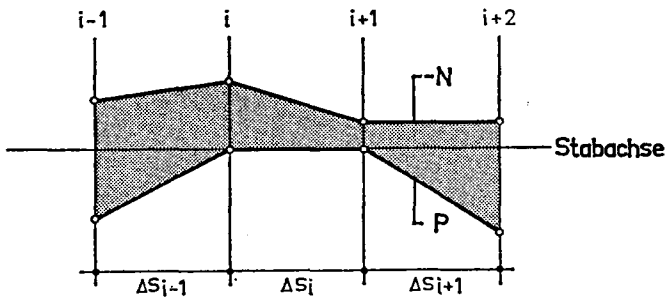


Abb. 3.8 Verlauf von $-N$ und P

Das Gesamtvolumen V der theoretischen Armierung beträgt:

$$V = \int_{\text{Tragwerk}} (F^P + F^N) ds \quad (3.18)$$

Für die Bedingung, daß P und N stückweise linear sind (Abb. 3.8) geht Gleichung (3.18) über in

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\text{Tragwerk}} \epsilon_s (+ N_i + N_{i+1} + P_i + P_{i+1}) \Delta s_i \quad (3.19)$$

Wie im vorhergehenden Beispiel wählt man den einfachen Balken wieder als statisch bestimmtes Grundsystem und führt als überzählige Größe X das Einspannmoment am linken Auflager ein.

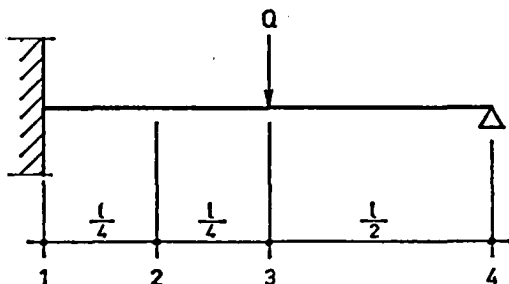


Abb. 3.9 Einführungsbeispiel für die Bestimmung der minimalen Armierung

Die Momente an den vier Intervallgrenzen (Abb. 3.9) lauten demnach:

$$\begin{aligned} M_1 &= X \\ M_2 &= Q \frac{l}{4} + X \frac{3}{4} \\ M_3 &= Q \frac{l}{4} + X \frac{1}{2} \\ M_4 &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Die Forderung, daß an keinem Punkt die Plastizitätsbedingungen verletzt sind, ist:

$$-N_i \leq M_i \leq P_i \quad (3.21)$$

Es wird nun die Bedingung gestellt, daß P und $-N$ stückweise linear sind (Abb. 3.8).

Damit genügt es, die Plastizitätsbedingungen nur an den Intervallgrenzen anzuschreiben, um die Plastizitätsbedingungen auch dazwischen zu erfüllen. Somit erhält man:

$$\begin{aligned} \text{in Punkt 1: } & P_1 \geq X \\ & N_1 \geq -X \\ \text{in Punkt 2: } & P_2 \geq Q \frac{1}{8} + X \frac{3}{4} \\ & N_2 \geq -Q \frac{1}{8} - X \frac{3}{4} \\ \text{in Punkt 3: } & P_3 \geq Q \frac{1}{4} + X \frac{1}{2} \\ & N_3 \geq -Q \frac{1}{4} - X \frac{1}{2} \\ \text{in Punkt 4: } & N_4 \geq 0 \\ & P_4 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

mit den Nebenbedingungen, daß die freien Variablen $P_1, N_1, P_2, N_2, P_3, N_3, P_4$ und $N_4 \geq 0$ sein müssen. Diese Bedingungen gehen aus der Definition von P und N hervor.

Für jeden Verlauf der plastischen Momente P und N , der zusammen mit einem frei gewählten Einspannmoment X die Ungleichungen (3.22) befriedigt, ist die Traglast des Systems nicht kleiner als die gegebene Belastung Q .

Gesucht ist das kleinstmögliche Gesamtvolumen der Armierung. Das Gesamtvolumen der Armierung ist nach Gleichung (3.19)

$$\begin{aligned}
 V = \frac{1}{2} c_3 \left\{ \frac{1}{4} I (+ N_1 + N_2 + P_1 + P_2) \right. \\
 + \frac{1}{4} I (+ N_2 + N_3 + P_2 + P_3) \\
 \left. + 2 \frac{1}{4} I (+ N_3 + N_4 + P_3 + P_4) \right\} \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

wobei V minimiert werden soll.

Mathematisch kann die Aufgabe folgendermaßen formuliert werden: Gesucht ist V_{min} , so daß die Ungleichungen (3.22), die linear in den freien Variablen $X, P_1, P_2, P_3, P_4, N_1, N_2, N_3$ und N_4 sind, erfüllt sind.

Eine solche Aufgabe ist wiederum ein lineares Programm.

Durch kleine Umformungen können die Bedingungen dieses Beispiels auf die selbe Form wie die Funktionen des allgemeinen linearen Programms (3.5), (3.6) und (3.7) gebracht werden.

Die Ungleichungen (3.22) gehen in die Gleichungen (3.24) mit den Nebenbedingungen (3.25) über.

$$\begin{aligned}
 y_1 &= -X + P_1 \\
 y_2 &= +X + N_1 \\
 y_3 &= -Q\frac{I}{8} - X\frac{3}{4} + P_2 \\
 y_4 &= +Q\frac{I}{8} + X\frac{3}{4} + N_2 \\
 y_5 &= -Q\frac{I}{4} - X\frac{1}{4} + P_3 \\
 y_6 &= +Q\frac{I}{4} + X\frac{1}{2} + N_3 \\
 y_7 &= +P_4 \\
 y_8 &= +N_4
 \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned}
 y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0, y_6 \geq 0, y_7 \geq 0, y_8 \geq 0 \\
 P_1 \geq 0, P_2 \geq 0, P_3 \geq 0, P_4 \geq 0, N_1 \geq 0, N_2 \geq 0, N_3 \geq 0, N_4 \geq 0
 \end{aligned} \quad (3.25)$$

X ist eine freie Variable, die positiv oder negativ sein kann.
Die Objektfunktion Z hat folgendes Aussehen:

$$Z = +N_1 + 2N_2 + P_1 + 2P_2 + 3N_3 + 3P_3 + 2N_4 + 2P_4 \quad (3.26)$$

Z muß *minimiert* werden. Es spielt keine Rolle, ob die Funktion V oder ihr Vielfaches minimiert wird.

Durch Protokollieren der Funktionen (3.24) und (3.26) mit transponierter Beschriftung erhält man das Schema des linearen Programms.

	$y_1 =$	$y_2 =$	$y_3 =$	$y_4 =$	$y_5 =$	$y_6 =$	$y_7 =$	$y_8 =$	$Z =$
$-\frac{X}{4}$	4	4	3	-3	2	-2	0	0	0
$-P_1$	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1
$-N_1$	0	-1	0	0	0	0	0	0	-1
$-P_2$	0	0	-1	0	0	0	0	0	-2
$-N_2$	0	0	0	-1	0	0	0	0	-2
$-P_3$	0	0	0	0	-1	0	0	0	-3
$-N_3$	0	0	0	0	0	-1	0	0	-3
$-P_4$	0	0	0	0	0	0	-1	0	-2
$-N_4$	0	0	0	0	0	0	0	-1	-2
$Q \frac{1}{8}$	0	0	-1	1	-2	2	0	0	0

Ein solches Programm kann nicht mehr graphisch gelöst werden. Der zulässige Lösungsbereich, der im ersten Beispiel ein Parallelogramm

war, ist nun ein neundimensionales Gebilde. Es gibt jedoch analytische Methoden [10], [11] und insbesondere fertige Bibliotheksprogramme für elektronische Rechenmaschinen, um lineare Programme zu lösen. Es wird hier verzichtet, auf die verschiedenen Methoden einzugehen. Es sei nur die Lösung dieses Problems angegeben:

$$\begin{aligned}
 \frac{X}{4} &= -Q \frac{l}{24} \\
 P_1 &= 0 \\
 P_2 &= 0 \\
 P_3 &= 4Q \frac{l}{24} \\
 P_4 &= 0 \\
 N_1 &= 4Q \frac{l}{24} \\
 N_2 &= 0 \\
 N_3 &= 0 \\
 N_4 &= 0 \\
 Z &= 16Q \frac{l}{24}
 \end{aligned}
 \tag{3.27}$$

Daß P_4 und N_4 den Wert 0 annehmen, hätte man aus den Plastizitätsbedingungen in Punkt 4 (3.22) und der Optimalbedingung, V muß ein Minimum sein, direkt sagen können. Die letzten zwei Gleichungen von (3.24) wären dann weggefallen.

Aus der Gleichung (3.27) erhält man für die totale Armierung

$$V = Q \frac{l^2}{12} \left(\frac{1}{\eta b \sigma_f} \right)$$

In Abb. 3.10 ist die Momentenfläche und der Verlauf der erforderlichen plastischen Momente dargestellt.

Den Verlauf und die Größe der minimalen Armierung bekommt man sofort aus den Gleichungen (3.17). Sie lauten:

$$F^P = c_3 N$$

$$F^N = c_3 P$$

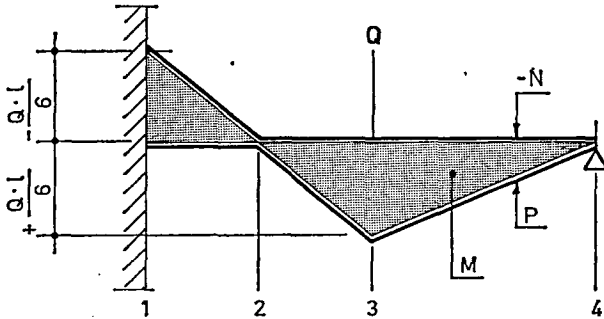


Abb. 3.10 Momentenfläche und Verlauf der erforderlichen plastischen Momente

Im vorhergehenden Beispiel wird vorausgesetzt, daß P und N stückweise linear sind (Abb. 3.8). Selbstverständlich können auch andere Voraussetzungen gemacht werden, z.B. die Armierung und demzufolge P bzw. N soll über einem Bereich konstant verlaufen oder sie soll einen gewissen Wert nicht überschreiten. Diese Grenze kann durch konstruktive Überlegungen oder durch die Bedingung, daß kein spröder Bruch eintreten soll, also durch die Forderung $\mu \leq \mu_{max}$ gegeben sein. Manchmal ist es aus konstruktiven Gründen oder wegen Schwind- und Temperaturwirkungen erwünscht, eine Armierung einzulegen. Daß kein schlagartiger Bruch auftritt, kann durch Bedingungen, wie $\mu \geq \mu_{min}$, ausgedrückt werden. Alle diese zusätzlichen Forderungen können in Form von Ungleichungen angeschrieben werden. Das Suchen einer optimalen Armierung mit den oben erwähnten Bedingungen stellt immer noch ein lineares Programm dar. Es unterscheidet sich generell nicht von den vorher behandelten Fällen.

3.3 Zusammenfassung

Für *Stabtragwerke* sind durch Erfüllen der Plastizitätsbedingungen in einzelnen Punkten die Plastizitätsbedingungen über dem ganzen Tragwerk erfüllt. Da die Schnittkräfte in einem Punkt lineare Funktionen der unbekannteren überzähligen Größen und der äußeren Belastung sind, erhält man für das Moment in einem Punkt eine lineare Funktion der unabhängigen Variablen. Die plastischen Momente P_i und N_i sind bei der Bestimmung der optimalen Armierung unabhängige Variable und bei der Bestimmung der Traglast Konstante. Durch Formulieren der Plastizitätsbedingungen $P_i \geq M_i \geq -N_i$ in den einzelnen Punkten ergeben sich lineare Ungleichungen in den unabhängigen Variablen. Diese Ungleichungen mit der Forderung, daß eine lineare Funktion (Belastung oder Armierungsvolumen) optimiert werden soll, bilden ein lineares Programm.

Indem man das obige Vorgehen auf *Platten* ausdehnt, erhält man folgende Forderungen:

Die Plastizitätsbedingungen müssen in den Schnittkräften und den plastischen Momenten linear sein (Kapitel 4).

Die Platte muß auf ein endlichfach statisch unbestimmtes Tragwerk vereinfacht werden, damit die Schnittkräfte lineare Funktionen der überzähligen Größen und der äußeren Belastung, d.h. der unabhängigen Variablen sind (Kapitel 5.3).

Durch Erfüllen der Plastizitätsbedingungen in einzelnen Punkten müssen sie über dem ganzen Plattenbereich erfüllt werden (Kapitel 6).

Mit diesen Forderungen erhält man durch Formulieren der Plastizitätsbedingungen in den einzelnen Punkten lineare Ungleichungen in den unabhängigen Variablen.

Diese Ungleichungen mit der Bedingung, daß eine lineare Funktion – Belastung (Kapitel 7) oder Armierungsvolumen (Kapitel 8) – optimiert werden soll, ergeben wieder ein lineares Programm.

4. Plastizitätsbedingungen

4.1 *Plastifizierung eines Plattenbereiches*

Alle neu eingeführten Bezeichnungen sind aus Abb. 4.1 und Abb. 4.16 ersichtlich.

Die Plastifizierung eines Plattenbereiches ist durch folgende Merkmale gekennzeichnet:

Es existiert mindestens ein Schnitt, dessen Normale n mit der x -Achse den Winkel φ einschließt und der nur fließende obere oder untere Zug-eisen schneidet. In einem plastifizierten Bereich reißt die Platte bis zur Druckzone auf und öffnet sich. Nur die Stahleinlagen und die Druckzone können an diesen Stellen Kräfte übertragen. Die Zugkräfte der einzelnen Stahleinlagen wirken in deren ursprünglichen Achsrichtung. Diese Annahme ist konservativ. Sie vernachlässigt die sogenannten Verdübelungskräfte.

4.2 *Orthogonale Armierung*

Die beiden Armierungsrichtungen verlaufen in x - und y -Richtung.

4.2.1 *Plastizitätsbedingungen*

Um die Plastizitätsbedingungen herzuleiten, wird die Platte in plastifizierte (aufgerissene) und in elastische (nicht aufgerissene) Bereiche aufgeteilt.

Im *elastischen Bereich* ist für jeden beliebigen, senkrecht zur Plattenmittelebene geführten Schnitt das Biegemoment kleiner als das plastische

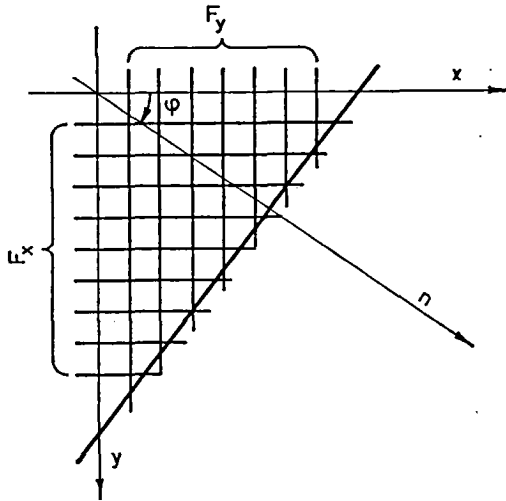


Abb. 4.1 Bezeichnungen bei orthogonaler Armierung in x - und y -Richtung

Moment. Demzufolge kann die Platte nicht auf-, sondern höchstens anreißen. Dieser nicht aufgerissene Bereich ist fähig, durch die Verzahnung der Betonkörner Schubspannungen und demzufolge auch Drillungsmomente zu übertragen.

Daraus ergibt sich, daß in einem beliebig geführten Schnitt mit der Normalen n (Abb. 4.1) das Biegemoment m_n kleiner als das positive plastische Moment P_n und größer als das negative plastische Moment $-N_n$ ist.

Ein *plastifizierter Bereich* erstreckt sich entlang eines Risses. Seine Breite ist normalerweise beschränkt. Sie ist sicher kleiner als der Rißabstand. Fließt in einem aufgerissenen Bereich z. B. die untere Zugarmierung, so beträgt das entsprechende positive plastische Moment für einen Schnitt parallel der y -Achse

$$P_x = \sigma_f F_x^P \eta_x^P b \quad (4.1.1)$$

wobei F_x^P die Fläche der unteren Armierung in der x -Richtung und $\eta_x^P b$ die Distanz zwischen der Zug- und der Druckresultierenden darstellen (Abb. 3.7).

In diesem Schnitt ist die Zugkomponente der fließenden Armierung in der y -Richtung null und daher auch das zugehörige plastische Drillungsmoment.

$$P_{xy} = 0 \quad (4.1.2)$$

Daraus folgt, daß in diesem Bereich die Momente in der x - und y -Richtung Hauptmomente sind.

Analog erhält man für einen Schnitt parallel der x -Achse das entsprechende positive plastische Moment

$$P_y = \sigma_f F_y^P \eta_y^P b \quad (4.1.3)$$

und das plastische Drillungsmoment

$$P_{yx} = 0 \quad (4.1.4)$$

Für das Fließen der oberen Armierung wird

$$N_x = \sigma_f F_x^N \eta_x^N b \quad (4.1.5)$$

$$N_{xy} = 0 \quad (4.1.6)$$

beziehungsweise

$$N_y = \sigma_f F_y^N \eta_y^N b \quad (4.1.7)$$

$$N_{yx} = 0 \quad (4.1.8)$$

Die maximalen und minimalen Biegemomente sowie die zugehörigen Drillungsmomente im plastifizierten Bereich, genannt plastische Momente, erhält man für einen beliebigen Schnitt φ (Abb. 4.1) nach den Transformationsformeln [12].

Die Momente in x - und y -Richtung muß man durch die entsprechenden plastischen Momente ersetzen. Die plastischen Drillungsmomente sind gleich Null.

$$\begin{aligned}
 P_n &= P_x \cos^2 \varphi + P_y \sin^2 \varphi \\
 P_{n\varphi} &= \frac{1}{2} (P_y - P_x) \sin 2\varphi \\
 (-N_n) &= (-N_x) \cos^2 \varphi + (-N_y) \sin^2 \varphi \\
 N_{n\varphi} &= \frac{1}{2} \left((-N_y) - (-N_x) \right) \sin 2\varphi
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

In der Druckzone des plastifizierten Bereiches existiert ein Spannungszustand, bei dem die Spannungen in x - und y -Richtung ebenfalls Hauptspannungen sind. Die Drillungsmomente in den Schnitten parallel der x - und y -Achsen sind null, und daher sind auch die horizontalen Schubspannungen τ_{xy} null. Bei der Berechnung der plastischen Momente in x - und y -Richtung wird nach Abb. 3.7 angenommen, daß die größte Betondruckspannung gleich der Prismendruckfestigkeit β ist. Die beiden Hauptspannungen σ_x und σ_y sind demnach höchstens gleich β . Das Entstehen eines Risses verhindert, daß die Normalspannungen kleiner als null werden. Ein solcher Spannungszustand verletzt die Bruchhypothese von Mohr nicht und ist demnach auch ein stabiler Spannungszustand.

Beim Betrachten des ganzen Plattenbereiches ist in den elastischen Bereichen für alle Richtungen

$$-N_n < m_n < P_n$$

m_n ist das Biegemoment für den Schnitt in Richtung φ .

Erreicht $m_n = P_n$ oder $= -N_n$ und $m_{n\varphi} = P_{n\varphi}$ bzw. $= N_{n\varphi}$ wird der Querschnitt plastifiziert.

In diesem Bereich besteht ein zulässiger Gleichgewichtszustand, der weder die Plastizitätsbedingungen des Armierungstahles $\sigma \leq \sigma_f$ noch die Bruchhypothesen von Mohr für den Beton verletzt. Der Gleichgewichtszustand eines plastifizierten und des anschließenden elastischen Bereiches ist für den Fall, daß die unteren Stahleinlagen fließen, in Abb. 4.2 dargestellt. Beim Fließen der oberen Stahleinlagen werden die P durch N ersetzt.

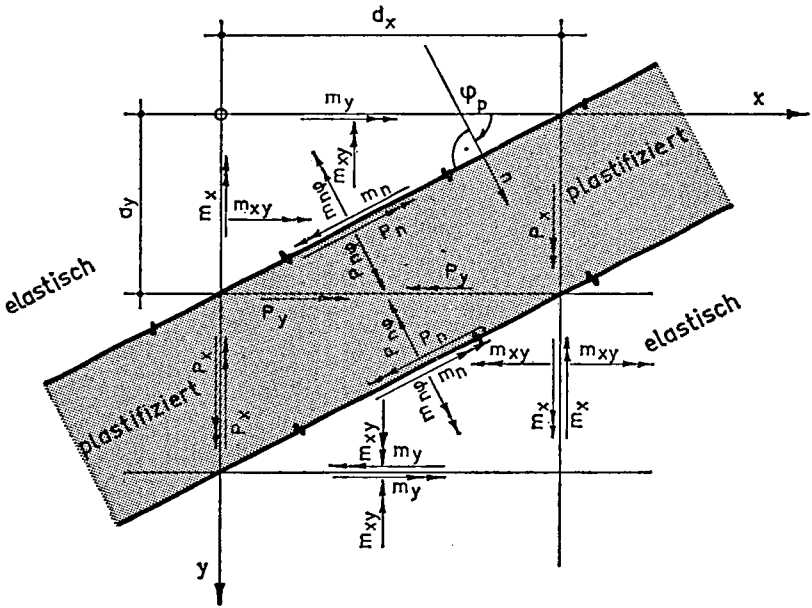


Abb. 4.2 Gleichgewichtszustand zwischen elastischem und plastifiziertem Bereich bei orthogonaler Armierung in x - und y -Richtung

Für die vollständigen Plastizitätsbedingungen ist also zu fordern, daß für alle Richtungen φ gilt:

$$-N_n \leq m_n \leq P_n \quad (4.3.1)$$

und für

$$\begin{aligned} m_n &= -N_n : m_{n\varphi} = N_{n\varphi} \\ m_n &= P_n : m_{n\varphi} = P_{n\varphi} \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Nun werden die Bedingungen aufgestellt, unter welchen $-N_n \leq m_n \leq P_n$ ist und nachträglich gezeigt, daß die erhaltenen Bedingungen auch die folgenden Forderungen erfüllen. Bei $m_n = P_n$ ist auch $m_{n\varphi} = P_{n\varphi}$ und bei $m_n = -N_n$ auch $m_{n\varphi} = N_{n\varphi}$.

Die plastischen Momente für die Richtung φ sind nach Gleichungen (4.2)

$$\begin{aligned} P_n &= P_x \cos^2 \varphi + P_y \sin^2 \varphi \\ P_{n\varphi} &= \frac{1}{2} (P_y - P_x) \sin 2\varphi \\ (-N_n) &= (-N_x) \cos^2 \varphi + (-N_y) \sin^2 \varphi \\ N_{n\varphi} &= \frac{1}{2} \left((-N_y) - (-N_x) \right) \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (4.2)$$

Die Biegemomente m_n und die Drillungsmomente $m_{n\varphi}$ erhält man als Funktion von m_x , m_y und m_{xy} nach den Transformationsformeln [12]:

$$\begin{aligned} m_n &= m_x \cos^2 \varphi + m_y \sin^2 \varphi + m_{xy} \sin 2\varphi \\ m_{n\varphi} &= \frac{1}{2} (m_y - m_x) \sin 2\varphi + m_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (4.4)$$

Eingesetzt in die Bedingung (4.3.1) $-N_n \leq m_n \leq P_n$ erhält man

$$\begin{aligned} (-N_x) \cos^2 \varphi + (-N_y) \sin^2 \varphi &\leq m_x \cos^2 \varphi + m_y \sin^2 \varphi + m_{xy} \sin 2\varphi \\ &\leq P_x \cos^2 \varphi + P_y \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad (4.5)$$

N_x , N_y , P_x und P_y sind positive Werte.

Die obige Ungleichung wird nun in zwei einfache Ungleichungen aufgeteilt, wobei die erste durch die positiven plastischen Momente (untere Armierung) und die zweite durch die negativen plastischen Momente (obere Armierung) begrenzt wird.

$$P_x \cos^2 \varphi + P_y \sin^2 \varphi \geq m_x \cos^2 \varphi + m_y \sin^2 \varphi + m_{xy} \sin 2\varphi \quad (4.5.1)$$

$$(-N_x) \cos^2 \varphi + (-N_y) \sin^2 \varphi \leq m_x \cos^2 \varphi + m_y \sin^2 \varphi + m_{xy} \sin 2\varphi \quad (4.5.2)$$

Als erstes soll die Ungleichung (4.5.1) untersucht werden. Nach kurzer Umformung erhält man:

$$(P_x - m_x) \cos^2 \varphi + (P_y - m_y) \sin^2 \varphi \geq m_{xy} \sin 2\varphi = 2 m_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \quad (4.6)$$

Für den Fall A, bei dem $\sin 2\varphi \geq 0$ und demnach auch $\operatorname{tg} \varphi \geq 0$ ist, ist der Gültigkeitsbereich von φ in Abb. 4.3 dargestellt, wobei φ im Uhrzeigersinn abgetragen ist.

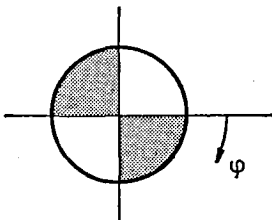


Abb. 4.3 Gültigkeitsbereich von $F(\varphi)$ im Fall «A»

Mit diesen Voraussetzungen kann die Beziehung (4.6) weiter in die Ungleichung (4.7) umgeformt werden

$$\frac{(P_x - m_x)}{2} \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} + \frac{(P_y + m_y)}{2} \operatorname{tg} \varphi \geq m_{xy} \quad (4.7)$$

Mit den Abkürzungen $\frac{(P_x - m_x)}{2} = R_x$ und $\frac{(P_y + m_y)}{2} = R_y$ erhält man

$$R_x \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} + R_y \operatorname{tg} \varphi \geq m_{xy} \quad (4.8)$$

Für den Fall B, bei dem $\sin 2\varphi \leq 0$ und demnach auch $\operatorname{tg} \varphi \leq 0$ ist, wird der Gültigkeitsbereich von φ in Abb. 4.4 dargestellt, wobei φ im Uhrzeigersinn abzutragen ist.

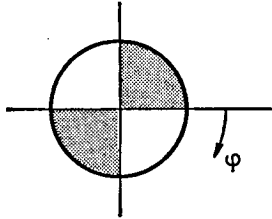


Abb. 4.4 Gültigkeitsbereich von $F(\varphi)$ im Fall «B»

Unter diesen Voraussetzungen und den obigen Abkürzungen erhält man

$$R_x \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} + R_y \operatorname{tg} \varphi \leq m_{xy} \quad (4.9)$$

Diskussion der Funktion $F(\varphi)$:

Durch Ableiten der Funktion

$$F(\varphi) = R_x \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} + R_y \operatorname{tg} \varphi \quad (4.10)$$

ergibt sich

$$\frac{\partial F(\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{-R_x}{\sin^2 \varphi} + \frac{R_y}{\cos^2 \varphi} \quad (4.11)$$

Durch Nullsetzen der 1. Ableitung erhält man den Ort der horizontalen Tangente

$$\frac{-R_x}{\sin^2 \varphi} + \frac{R_y}{\cos^2 \varphi} = 0 \quad (4.12.1)$$

oder
$$\frac{R_x}{R_y} = \operatorname{tg}^2 \varphi \quad (4.12.2)$$

und indem man wieder einsetzt

$$\frac{P_x - m_x}{P_y - m_y} = \operatorname{tg}^2 \varphi \quad (4.13)$$

Für den Fall A ($\operatorname{tg} \varphi \geq 0$) gibt es folgende Möglichkeiten für die Vorzeichen von R_x und R_y :

a)
$$\begin{aligned} R_x &\geq 0 \\ R_y &\geq 0 \end{aligned}$$

Für diese Bedingung ist der qualitative Verlauf der Funktion $F(\varphi)$ in Abb. 4.5 dargestellt. Diese Funktion besitzt zwei Minima. Es ist sofort ersichtlich, daß durch Erfüllen der Ungleichung (4.8) an den Stellen der Minima die Ungleichung für jedes φ erfüllt ist.

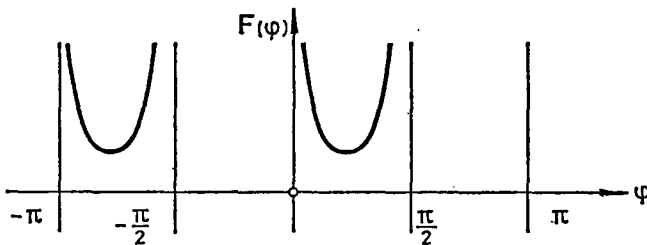


Abb. 4.5 Qualitativer Verlauf von $F(\varphi)$ im Fall «A» und $R_x \geq 0, R_y \geq 0$

b)
$$\begin{aligned} R_x &\leq 0 \\ R_y &\geq 0 \end{aligned}$$

Abb. 4.6 zeigt den qualitativen Verlauf der Funktion $F(\varphi)$. Diese Funktion besitzt kein Minimum; sie geht von minus Unendlich nach

plus Unendlich. Die Ungleichung (4.8) kann daher nicht für jedes φ erfüllt werden. Die Möglichkeit $R_x \leq 0$ und $R_y \geq 0$ ist nicht zulässig.

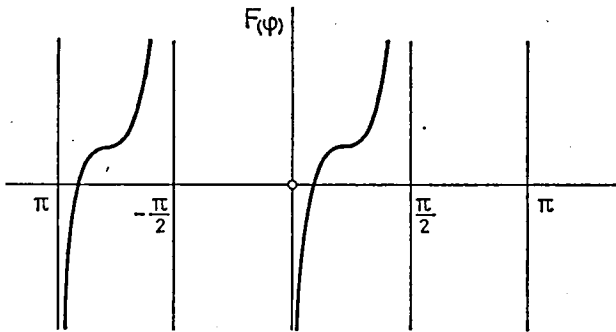


Abb. 4.6 Qualitativer Verlauf von $F(\varphi)$ im Fall «A» und $R_x \leq 0, R_y \geq 0$

c)

$$R_x \geq 0$$

$$R_y \leq 0$$

Für diese Bedingung ist der qualitative Verlauf der Funktion $F(\varphi)$ in Abb. 4.7 dargestellt. Die Funktion besitzt kein Minimum. Sie geht von

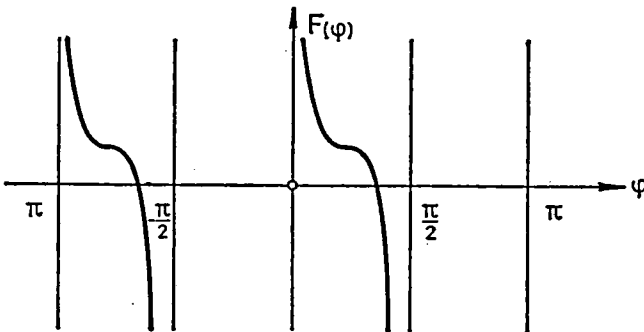


Abb. 4.7 Qualitativer Verlauf von $F(\varphi)$ für Fall «A» und $R_x \geq 0, R_y \leq 0$

plus Unendlich nach minus Unendlich. Die Ungleichung (4.8) kann nicht erfüllt werden für jedes φ . Die Möglichkeit $R_x \geq 0$ und $R_y \leq 0$ ist nicht zulässig.

d)
$$\begin{aligned} R_x &\leq 0 \\ R_y &\leq 0 \end{aligned}$$

Der qualitative Verlauf der Funktion $F(\varphi)$ ist in Abb. (4.8) dargestellt. Diese Funktion besitzt zwei Maxima, und es ist sofort ersichtlich, daß die Ungleichung (4.8) nicht für jedes φ erfüllt werden kann.

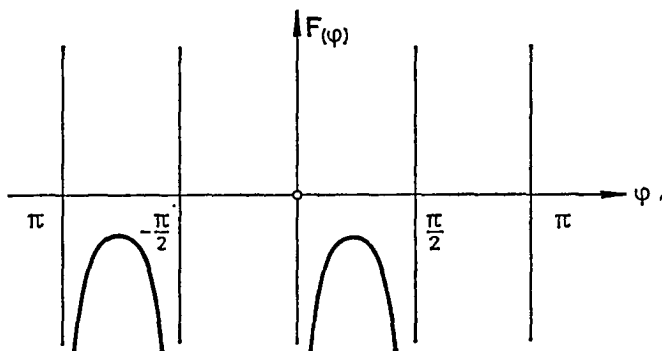


Abb. 4.8 Qualitativer Verlauf von $F(\varphi)$ für Fall «A» und $R_x \leq 0, R_y \leq 0$

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß für $\operatorname{tg} \varphi \geq 0$ $R_x \geq 0$ und $R_y \geq 0$ sein müssen, damit die Ungleichung (4.8) für jedes φ erfüllt werden kann. Dies wird erreicht, indem man die Ungleichung nur an den beiden Minima der Funktion $F(\varphi)$ erfüllt.

Für den Fall B, bei dem $\operatorname{tg} \varphi \leq 0$ ist, kann nach analoger Diskussion der verschiedenen Möglichkeiten der Vorzeichen von R_x und R_y folgendes ausgesagt werden:

Für $\operatorname{tg} \varphi \leq 0$ müssen $R_x \geq 0$ und $R_y \geq 0$ sein, damit die Ungleichung (4.9) für jedes φ erfüllt werden kann. Dies wird erreicht, indem man die Ungleichung nur an den beiden Maxima der Funktion $F(\varphi)$ erfüllt.

Erfüllen der Ungleichungen an den Extremen:

Für den Fall A gilt die Ungleichung

$$R_x \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} + R_y \operatorname{tg} \varphi \geq m_{xy} \quad (4.8)$$

mit der Bedingung, daß $R_x \geq 0$ und $R_y \geq 0$ und $\operatorname{tg} \varphi \geq 0$ sind.

Der Ort der Minima ist durch Gleichung (4.12.2) gegeben. Sie lautet:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{R_x}{R_y} \quad (4.12.2)$$

oder

$$\operatorname{tg} \varphi = + \sqrt{\frac{R_x}{R_y}} \quad (4.12.3)$$

Durch Einsetzen in die Ungleichung (4.8) erhält man die Bedingungen an den Minima der Funktion $F(\varphi)$, bei deren Erfüllung die Ungleichung für jedes φ in Ordnung ist, d.h.

$$+ \sqrt{\frac{R_y}{R_x}} R_x + + \sqrt{\frac{R_x}{R_y}} R_y \geq m_{xy}$$

oder

$$+ \sqrt{4R_x R_y} \geq m_{xy} \quad (4.14)$$

und ohne die Abkürzungen

$$+ \sqrt{(P_x - m_x)(P_y - m_y)} \geq m_{xy} \quad (4.15)$$

Für den Fall B gilt die Ungleichung

$$R_x \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} + R_y \operatorname{tg} \varphi \leq m_{xy} \quad (4.9)$$

mit den Bedingungen $R_x \geq 0$, $R_y \geq 0$ und $\operatorname{tg} \varphi \leq 0$.

Der Ort der Maxima ist durch Gleichung (4.12.2) gegeben. Sie heißt

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{R_x}{R_y} \quad (4.12.2)$$

und

$$\operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{\frac{R_x}{R_y}} \quad (4.12.4)$$

Durch Einsetzen in die Ungleichung findet man die Bedingungen an den Maxima der Funktion $F(\varphi)$, bei deren Erfüllung die Ungleichung für jedes φ in Ordnung ist.

Sie lauten

$$-\sqrt{\frac{R_y}{R_x}} R_x + -\sqrt{\frac{R_x}{R_y}} R_y \leq m_{xy}$$

oder

$$-\sqrt{4R_x R_y} \leq m_{xy}$$

oder

$$+\sqrt{4R_x R_y} \geq -m_{xy} \quad (4.16)$$

und ohne Abkürzungen

$$+\sqrt{(P_x - m_x)(P_y - m_y)} \geq -m_{xy} \quad (4.17)$$

Durch Zusammenfassung der beiden Fälle A und B kann die Ungleichung (4.5.1) bzw. (4.6) durch die folgenden Beziehungen (4.18), die unabhängig von φ sind, ersetzt werden.

$$\begin{aligned}
 P_x - m_x &\geq 0 \\
 P_y - m_y &\geq 0 \\
 (P_x - m_x)(P_y - m_y) &\geq m^2_{xy}
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

Nun soll noch die Ungleichung (4.5.2) untersucht werden, die nach kurzer Umformung folgendermaßen angeschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}
 (N_x + m_x) \cos^2 \varphi + (N_y + m_y) \sin^2 \varphi &\geq -m_{xy} \sin 2\varphi = \\
 -2m_{xy} \cos \varphi \sin \varphi
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

Durch Vergleich der Beziehungen (4.6) mit (4.19) ergibt sich, daß durch Ersetzen der Koeffizienten $(P_x - m_x)$ durch $(N_x + m_x)$, $(P_y - m_y)$ durch $(N_y + m_y)$ und von m_{xy} durch $-m_{xy}$ in Beziehung (4.6) die Beziehung (4.19) erhalten wird. Auf Grund dieser Tatsache werden nun in den Bedingungen (4.18) diese Koeffizienten ebenfalls durch die entsprechenden ersetzt und dadurch die von φ unabhängige Beziehung (4.20) erhalten.

$$\begin{aligned}
 N_x + m_x &\geq 0 \\
 N_y + m_y &\geq 0 \\
 (N_x + m_x)(N_y + m_y) &\geq m^2_{xy}
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$

Die beiden Bedingungen (4.18) und (4.20) erfüllen die Ungleichungen (4.6) und (4.19), die zusammen die Forderung (4.3.1)

$$-N_n \leq m_n \leq P_n$$

darstellen. Unter der Voraussetzung, daß zusätzlich die Bedingungen (4.3.2) erfüllt sind, was anschließend gezeigt wird, lauten die *Plastizitätsbedingungen für eine Platte mit orthogonaler Armierung in x- und y-Richtung*:

$$\begin{array}{l}
 P_x - m_x \geq 0 \\
 P_y - m_y \geq 0 \\
 (P_x - m_x)(P_y - m_y) = m_{xy}^2 \\
 N_x + m_x \geq 0 \\
 N_y + m_y \geq 0 \\
 (N_x + m_x)(N_y + m_y) \geq m_{xy}^2
 \end{array}
 \tag{4.21}$$

Jetzt muß noch gezeigt werden, daß bei Erreichen von $m_n = P_n$ bzw. $-N_n$ auch $m_{n\varphi} = P_{n\varphi}$ bzw. $N_{n\varphi}$ ist. Dies wird hergeleitet für den Fall, daß die untere Armierung fließt. Für ein Fließen der oberen Armierung ist das Vorgehen analog.

Das plastische Drillungsmoment für eine beliebige Richtung φ ist nach Gleichung (4.2)

$$P_{n\varphi} = \frac{1}{2} (P_y - P_x) \sin 2\varphi \tag{4.2}$$

Das auftretende Drillungsmoment ist durch Gleichung (4.4) gegeben

$$m_{n\varphi} = \frac{1}{2} (m_y - m_x) \sin 2\varphi + m_{xy} \cos 2\varphi \tag{4.4}$$

Um nun das vorhandene Drillungsmoment $m_{n\varphi}$ und das plastische Drillungsmoment $P_{n\varphi}$ miteinander vergleichen zu können, bildet man ihre Differenz.

$$\Delta = m_{n\varphi} - P_{n\varphi} \tag{4.21.1}$$

oder durch Einsetzen der Beziehungen (4.2) und (4.4) erhält man

$$\Delta = \frac{1}{2} (P_x - m_x) \sin 2\varphi - \frac{1}{2} (P_y - m_y) \sin 2\varphi + m_{xy} \cos 2\varphi \tag{4.21.2}$$

und durch Einführen der Abkürzungen R_x und R_y ergibt sich

$$\Delta = R_x \sin 2\varphi - R_y \sin 2\varphi + m_{xy} \cos 2\varphi \quad (4.21.3)$$

Für den Fall A ist $m_n = P_n$, wenn

$$\operatorname{tg} \varphi = + \sqrt{\frac{R_x}{R_y}}$$

$$m_{xy} = + \sqrt{4R_x R_y}$$

$$R_x \geq 0$$

und

$$R_y \geq 0 \text{ ist.}$$

Mit diesen Bedingungen und auf Grund der trigonometrischen Beziehungen

$$\sin 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

und

$$\cos 2\varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

erhält man

$$\sin 2\varphi = \frac{2 \sqrt{R_x R_y}}{R_x + R_y}$$

(4.22)

und

$$\cos 2\varphi = \frac{R_y - R_x}{R_y + R_x}$$

Eingesetzt in Gleichung (4.21.3) wird

$$\Delta = \frac{(R_x - R_y)}{R_x + R_y} 2 \sqrt{R_x R_y} + 2 \sqrt{R_x R_y} \frac{(R_y - R_x)}{R_y + R_x} = 0 \quad (4.21.4)$$

Für den Fall B ist $m_n = P_n$, wenn

$$\operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{\frac{R_x}{R_y}}$$

$$m_{xy} = -\sqrt{4R_x R_y}$$

$$R_x \geq 0$$

und $R_y \geq 0$

Mit diesen Bedingungen erhält man

$$\sin 2\varphi = \frac{-2\sqrt{R_x R_y}}{R_x + R_y} \quad (4.23)$$

und $\cos 2\varphi = \frac{R_y - R_x}{R_y + R_x}$

Eingesetzt in Gleichung (4.21.3) wird

$$\Delta = -\frac{(R_x - R_y)}{R_x + R_y} 2\sqrt{R_x R_y} - 2\sqrt{R_x R_y} \frac{(-R_x + R_y)}{R_x + R_y} = 0 \quad (4.21.5)$$

Da die Differenz von $m_{n\varphi}$ und $P_{n\varphi} = 0$ ist, ist $m_{n\varphi} = P_{n\varphi}$. Damit ist bewiesen, daß für $m_n = P_n$ bzw. $-N_n$ auch $m_{n\varphi} = P_{n\varphi}$ bzw. $N_{n\varphi}$ ist.

4.2.2 Lineare Plastizitätsbedingungen

Die nachstehenden linearen Plastizitätsbedingungen sollen eine Näherung der abgeleiteten Plastizitätsbedingungen sein. Sie verletzen an keinem Punkt die nichtlinearen Plastizitätsbedingungen. Anders ausgedrückt kann man auch sagen, der genäherte konvexe Gültigkeitsbereich soll überall innerhalb dem tatsächlichen liegen oder ihn höchstens berühren. Die linearen Plastizitätsbedingungen lauten:

$$\begin{aligned}
P_x - m_x - |m_{xy}| &\geq 0 \\
P_y - m_y - |m_{xy}| &\geq 0 \\
N_x + m_x - |m_{xy}| &\geq 0 \\
N_y + m_y - |m_{xy}| &\geq 0
\end{aligned}
\tag{4.24}$$

Durch Einsetzen der Bedingung (4.24) in Bedingung (4.21) sieht man, daß die nichtlinearen Plastizitätsbedingungen durch die linearen nicht verletzt werden.

$$\begin{aligned}
P_x - m_x &\geq |m_{xy}| \geq 0 \\
P_x - m_y &\geq |m_{xy}| \geq 0 \\
N_x + m_x &\geq |m_{xy}| \geq 0 \\
N_y + m_y &\geq |m_{xy}| \geq 0 \\
(P_x - m_x)(P_y - m_y) &\geq |m_{xy}|^2 \geq m_{xy}^2 \\
(N_x + m_x)(N_y + m_y) &\geq |m_{xy}|^2 \geq m_{xy}^2
\end{aligned}
\tag{4.25}$$

Um in den Beziehungen (4.24) die Absolutbeträge zu ersetzen, kann man statt einer Ungleichung mit einem Absolutbetrag zwei Ungleichungen schreiben, indem man einmal die Bedingung für den positiven Betrag und einmal für den negativen Betrag der absoluten Zahl anschreibt. Die Bedingungen lauten darnach:

$P_x - m_x - m_{xy} \geq 0$	(4.26)
$P_x - m_x + m_{xy} \geq 0$	
$P_y - m_y - m_{xy} \geq 0$	
$P_y - m_y + m_{xy} \geq 0$	
$N_x + m_x - m_{xy} \geq 0$	
$N_x + m_x + m_{xy} \geq 0$	
$N_y + m_y - m_{xy} \geq 0$	
$N_y + m_y + m_{xy} \geq 0$	

Damit wurde eine Plastizitätsbedingung gefunden, die aus linearen Beziehungen in den Schnittkräften und in den plastischen Momenten aufgebaut ist. Sie genügt allen Anforderungen, um ein lineares Programm aufbauen zu können.

4.2.3 Graphische Darstellung der Plastizitätsbedingungen

Die Plastizitätsbedingungen fordern, daß ein Spannungspunkt (m_x, m_y, m_{xy}) innerhalb einer Fläche liegt. Im folgenden werden für einige spe-

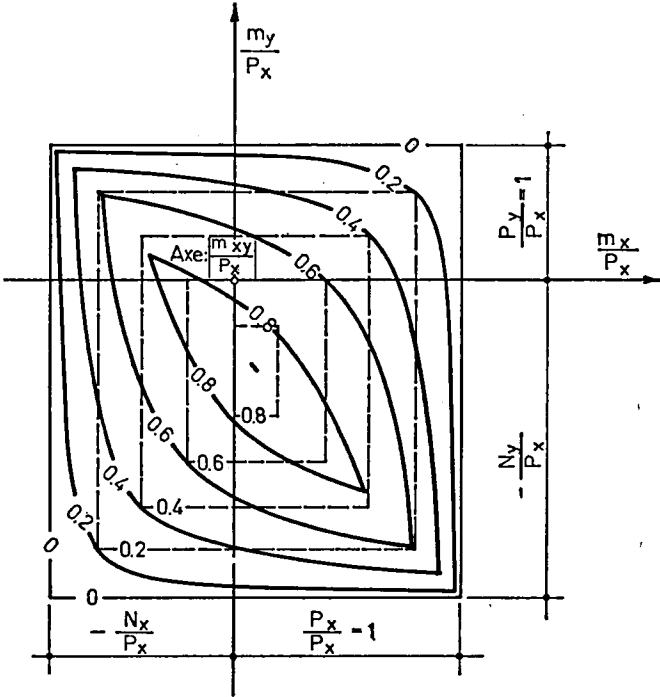


Abb. 4.9 Plastizitätsbedingungen für $P_x \neq P_y \neq N_x \neq N_y$

Verlauf von $\left| \frac{m_{xy}}{P_x} \right|$ durch Niveaulinien dargestellt

- Nicht linearisierte Plastizitätsbedingungen
- Linearisierung

Gl. (4.21)

Gl. (4.26)

zielle Fälle diese Flächen als Funktionen von m_x , m_y und m_{xy} graphisch dargestellt. In jeder Figur wird ebenfalls die zugehörige, linear genäherte Fläche gezeigt. Der durch die Linearisierung entstehende Fehler ist dann leicht ersichtlich.

In Abb. 4.9, 4.10 und 4.11 sind die Plastizitätsbedingungen für die Fälle, in denen $P_x \neq P_y \neq N_x \neq N_y$ ist, dargestellt.

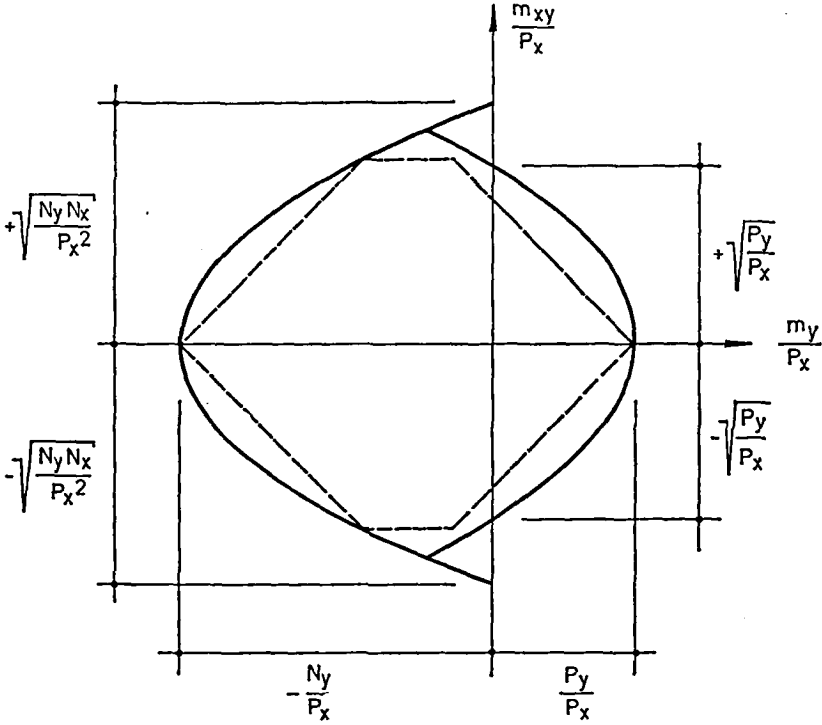


Abb. 4.10 Plastizitätsbedingungen für $P_x \neq P_y \neq N_x \neq N_y$

Verlauf von $\frac{m_{xy}}{P_x}$ bei $m_y = 0$

- Nicht linearisierte Plastizitätsbedingungen
- Linearisierung

Gl. (4.21)
Gl. (4.26)

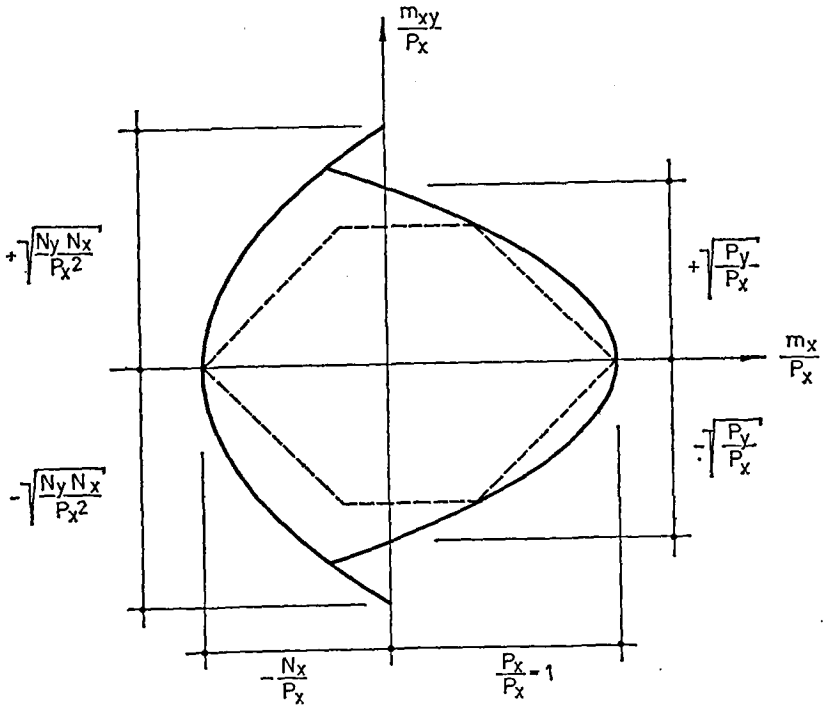


Abb. 4.11 Plastizitätsbedingungen für $P_x \neq P_y \neq N_x \neq N_y$

Verlauf von $\frac{m_{xy}}{P_x}$ bei $m_x = 0$

- Nicht linearisierte Plastizitätsbedingungen
- Linearisierung

Gl. (4.21)
Gl. (4.26)

Abb. 4.12 und 4.13 zeigen die Plastizitätsbedingungen für $P_x = P_y = N_x = N_y$.

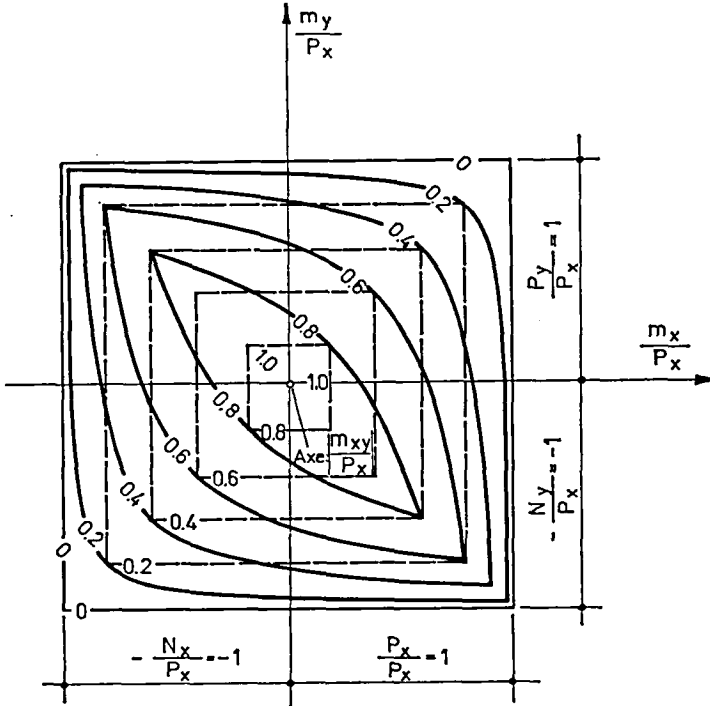


Abb. 4.12 Plastizitätsbedingungen für $P_x = P_y = N_x = N_y$

Verlauf von $\left| \frac{m_{xy}}{P_x} \right|$ durch Niveaulinien dargestellt

———— Nicht linearisierte Plastizitätsbedingungen

..... Linearisierung

Gl. (4.21)

Gl. (4.26)

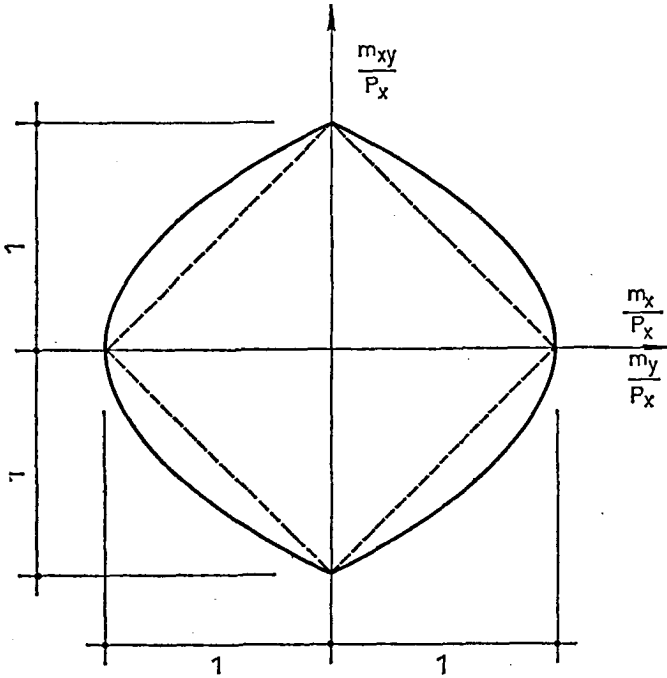


Abb. 4.13 Plastizitätsbedingungen für $P_x = P_y = N_x = N_y$
 Verlauf von $\frac{m_{xy}}{P_x}$ bei $m_y = 0$, bzw. $m_x = 0$

In Abb. 4.14 sind die Plastizitätsbedingungen für nur unten armierte Platten ersichtlich. Auf die Darstellungen der Flächen für $m_x = 0$ oder $m_y = 0$ wird verzichtet, weil sie qualitativ den selben Verlauf haben wie bei den isotropen Platten. Sie erstrecken sich jedoch nur über den positiven Quadranten.

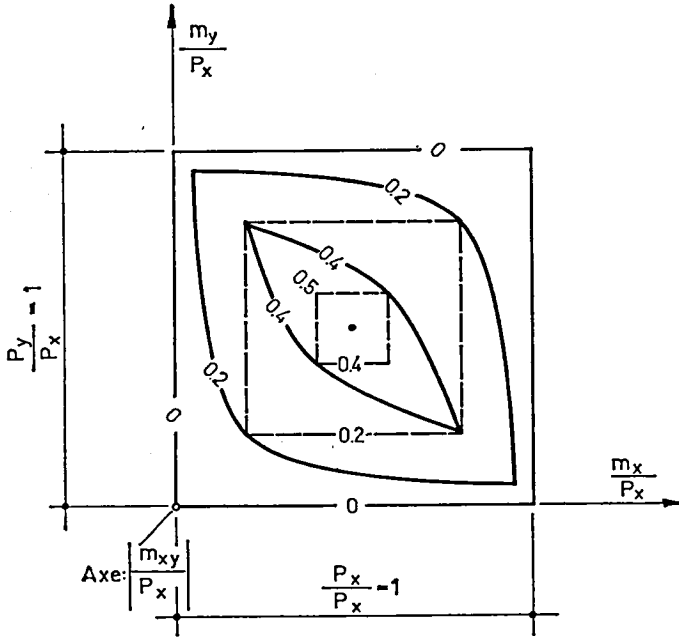


Abb. 4.14 Plastizitätsbedingungen für eine nur unten armierte Platte mit $P_x = P$ und $N_x = N_y = 0$

Verlauf von $\left| \frac{m_{xy}}{P_x} \right|$ mit Niveaulinien dargestellt

Bei nur in x -Richtung armierten Platten, bei denen $N_y = P_y = 0$ ist, degeneriert die Fläche zu einer Geraden (Abb. 4.15), die von $\frac{-N_x}{P_x}$ bis 1 verläuft. Es können keine Drillungsmomente m_{xy} und keine Momente m_y auftreten.

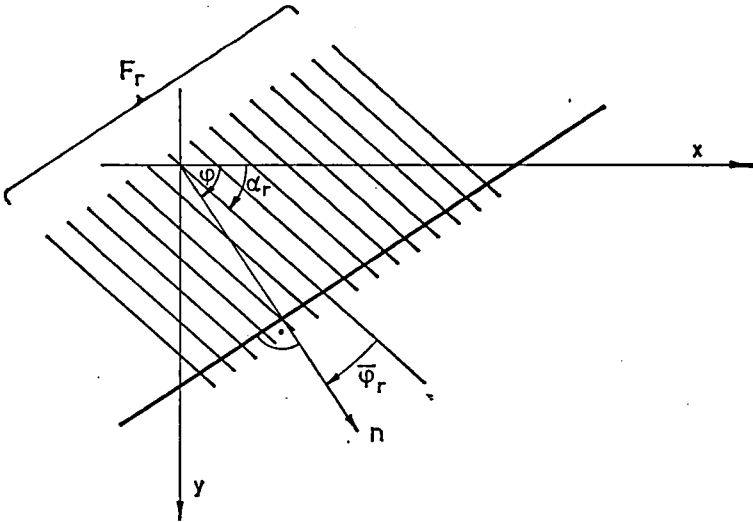


Abb. 4.16 Bezeichnungen bei beliebiger Armierungsrichtung

Die Zugkraft der fließenden unteren Stahlunterlagen für einen Schnitt parallel zur Armierungsrichtung α_r ist

$$Z_{r+\pi/2}^P = 0 \quad (4.28)$$

Die Zugkomponenten der fließenden Armierung parallel den Schnitt-richtungen α_r und $\alpha_r + \frac{\pi}{2}$ sind null. Z_r^P und $Z_{r+\pi/2}^P$ wirken also in den Hauptrichtungen.

Die Schnittfläche für einen beliebigen Schnitt φ erhält man aus den Transformationsformeln

$$\begin{aligned} Z_n^P &= \cos^2 \bar{\varphi}_r Z_r^P \\ Z_\varphi^P &= \sin^2 \bar{\varphi}_r Z_r^P \\ Z_{n\varphi}^P &= -\sin 2\bar{\varphi}_r \frac{1}{2} Z_r^P \end{aligned} \quad (4.29)$$

Diese Beziehungen haben auch Gültigkeit für das Fließen der oberen Armierung. Man muß nur die Indizes P durch N ersetzen. In Zukunft werden sie der Einfachheit halber weggelassen.

Sind mehrere Armierungsrichtungen r vorhanden, in denen die Stahleinlagen fließen, so gehen die Gleichungen (4.29) über in

$$\begin{aligned} Z_n &= \sum_{r=1}^r Z_r \cos^2 \bar{\varphi}_r \\ Z_\varphi &= \sum_{r=1}^r Z_r \sin^2 \bar{\varphi}_r \\ Z_{n\varphi} &= - \sum_{r=1}^r Z_r \frac{1}{2} \sin 2 \bar{\varphi}_r \end{aligned} \quad (4.30)$$

Durch Ersetzen von $\bar{\varphi}_r$ durch $\varphi - \alpha_r$ erhält man

$$\begin{aligned} Z_n &= \sum_{r=1}^r Z_r \cos^2 (\varphi - \alpha_r) \\ Z_\varphi &= \sum_{r=1}^r Z_r \sin^2 (\varphi - \alpha_r) \\ Z_{n\varphi} &= - \sum_{r=1}^r Z_r \frac{\sin 2 (\varphi - \alpha_r)}{2} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Unter Beachtung, daß

$$\begin{aligned} \cos (\varphi - \alpha) &= \cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha \\ \sin (\varphi - \alpha) &= \sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \alpha \end{aligned} \quad (4.32)$$

wird

$$\begin{aligned}\cos^2(\varphi - \alpha) &= \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + 2 \cos \varphi \sin \varphi \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha \\ \sin^2(\varphi - \alpha) &= \sin^2 \varphi \cos^2 \alpha - 2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \alpha \sin \alpha + \cos^2 \varphi \sin^2 \alpha \\ \sin(2\varphi - 2\alpha) &= \sin 2\varphi \cos 2\alpha - \cos 2\varphi \sin 2\alpha\end{aligned}\quad (4.33)$$

oder

$$\begin{aligned}\cos^2(\varphi - \alpha) &= \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sin 2\alpha + \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha \\ \sin^2(\varphi - \alpha) &= \sin^2 \varphi \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sin 2\alpha + \cos^2 \varphi \sin^2 \alpha \\ \sin(2\varphi - 2\alpha) &= \sin 2\varphi (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \cos 2\varphi \sin 2\alpha\end{aligned}\quad (4.34)$$

und daraus

$$\begin{aligned}Z_n &= \sum_{r=1}^r (Z_r \cos^2 \alpha_r) \cos^2 \varphi + (Z_r \sin^2 \alpha_r) \sin^2 \varphi + \left(Z_r \frac{\sin 2\alpha_r}{2}\right) \sin 2\varphi \\ Z_\varphi &= \sum_{r=1}^r (Z_r \cos^2 \alpha_r) \sin^2 \varphi + (Z_r \sin^2 \alpha_r) \cos^2 \varphi - \left(Z_r \frac{\sin 2\alpha_r}{2}\right) \sin 2\varphi \\ Z_{n\varphi} &= \sum_{r=1}^r \frac{1}{2} (-Z_r \cos^2 \alpha_r + Z_r \sin^2 \alpha_r) \sin 2\varphi + \left(Z_r \frac{\sin 2\alpha_r}{2}\right) \cos 2\varphi\end{aligned}\quad (4.35)$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^r Z_r \cos^2 \alpha_r &= Z_x \\ \sum_{r=1}^r Z_r \sin^2 \alpha_r &= Z_y \\ \sum_{r=1}^r Z_r \frac{\sin 2\alpha_r}{2} &= Z_{xy}\end{aligned}\quad (4.36)$$

erhält man

$$\begin{aligned} Z_n &= Z_x \cos^2 \varphi + Z_y \sin^2 \varphi + Z_{xy} \sin 2\varphi \\ Z_\varphi &= Z_x \sin^2 \varphi + Z_y \cos^2 \varphi - Z_{xy} \sin 2\varphi \\ Z_{n\varphi} &= \frac{1}{2} (Z_y - Z_x) \sin 2\varphi + Z_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (4.37)$$

Die drei Gleichungen (4.37) stellen ebenfalls die Beziehungen zwischen den Spannungskomponenten $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ und $\sigma_n, \sigma_\varphi, \sigma_{n\varphi}$ im ebenen Spannungszustand dar, sofern man Z durch σ ersetzt.

Somit kann man auch die Richtungen φ_1 und φ_2 , bei welchen Z_n verschwindet, anschreiben

$$\operatorname{tg} 2\varphi_{1,2} = \frac{2Z_{xy}}{Z_x - Z_y} \quad (4.38)$$

Die zugehörigen, mit Z_1 und Z_2 bezeichneten Extremwerte von Z_n lauten:

$$Z_{1,2} = \frac{1}{2} (Z_x + Z_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(Z_x - Z_y)^2 + 4Z_{xy}^2} \quad (4.39)$$

Die Werte $\varphi_{1,2}$ und $Z_{1,2}$ können auch mit dem Mohrschen Kreis gefunden werden. Daraus ist ersichtlich, daß jede beliebige Armierungsanordnung (Z_x, Z_y, Z_{xy}) durch eine äquivalente orthogonale Armierung (Z_1, Z_2) ersetzt werden kann. Die Armierungen Z_1 und Z_2 bilden die Winkel φ_1 und $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ mit der x -Achse.

Es bleibt indessen nur noch die Aufgabe, die Plastizitätsbedingungen für eine Armierung Z_1 und Z_2 zu finden, die senkrecht aufeinanderstehen und mit der x -Achse den Winkel φ_1 bzw. φ_2 einschließen.

Für einen Schnitt φ_1 ist das positive plastische Moment

$$P_1 = Z_1^p \eta_1^p b \quad (4.40)$$

Weil in diesem Schnitt die Zugkraft keine Komponente senkrecht zu Z_1 besitzt, ist das plastische Drillungsmoment null.

$$P_{12} = 0 \quad (4.41)$$

Analog erhält man für den Schnitt φ_2

$$P_2 = Z_2^P \eta_2^P b \quad (4.42)$$

und
$$P_{21} = 0 \quad (4.43)$$

Für das Fließen der oberen Armierung wird

$$N_1 = Z_1^N \eta_1^N b \quad (4.44)$$

$$N_{12} = 0 \quad (4.45)$$

bzw.
$$N_2 = Z_2^N \eta_2^N b \quad (4.46)$$

$$N_{21} = 0 \quad (4.47)$$

Nach den Transformationsformeln (z. B. [12]) erhält man die plastischen Momente:

$$\begin{aligned} P_n &= P_1 \cos^2(\varphi - \varphi_1^P) + P_2 \sin^2(\varphi - \varphi_1^P) \\ P_{n\varphi} &= \frac{1}{2} (P_2 - P_1) \sin 2(\varphi - \varphi_1^P) \\ (-N_n) &= (-N_1) \cos^2(\varphi - \varphi_1^N) + (-N) \sin^2(\varphi - \varphi_1^N) \\ N_{n\varphi} &= \frac{1}{2} (N_2 - N_1) \sin 2(\varphi - \varphi_1^N) \end{aligned} \quad (4.48)$$

In der Druckzone des plastifizierten Bereiches existiert auch wieder ein Spannungszustand, bei dem φ_1 und φ_2 Hauptachsen sind. Die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 sind nach Abb. 3.7 gleich der Prismendruckfestigkeit β . Nach den Bruchhypothesen von Mohr ist dies ein zulässiger Spannungszustand (siehe Kapitel 4.2, Seite 37).

Durch Umformen der Gleichungen (4.48) lauten die positiven plastischen Momente für die Richtung φ

$$\begin{aligned}
 P_n &= (P_1 \cos^2 \varphi_1^P + P_2 \sin^2 \varphi_1^P) \cos^2 \varphi + (P_1 \sin^2 \varphi_1^P \\
 &\quad + P_2 \cos^2 \varphi_1^P) \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \sin 2 \varphi_1^P (P_1 - P_2) \sin 2 \varphi \\
 P_{n\varphi} &= \frac{1}{2} \sin 2 \varphi (P_2 \cos^2 \varphi_1^P - P_1 \cos^2 \varphi_1^P - P_2 \sin^2 \varphi_1^P \\
 &\quad + P_1 \sin^2 \varphi_1^P) + \frac{1}{2} \sin 2 \varphi_1^P (P_1 - P_2) \cos 2 \varphi
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 P_x &= P_1 \cos^2 \varphi_1^P + P_2 \sin^2 \varphi_1^P \\
 P_y &= P_1 \sin^2 \varphi_1^P + P_2 \cos^2 \varphi_1^P \\
 P_{xy} &= \frac{1}{2} (P_1 - P_2) \sin 2 \varphi_1^P
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
 P_n &= P_x \cos^2 \varphi + P_y \sin^2 \varphi + P_{xy} \sin 2 \varphi \\
 P_{n\varphi} &= \frac{1}{2} (P_y - P_x) \sin 2 \varphi + P_{xy} \cos 2 \varphi
 \end{aligned} \tag{4.51.1}$$

und analog für die negativen plastischen Momente

$$\begin{aligned}
 (-N_n) &= (-N_x) \cos^2 \varphi + (-N_y) \sin^2 \varphi + N_{xy} \sin 2 \varphi \\
 N_{n\varphi} &= \frac{1}{2} \left((-N_y) - (-N_x) \right) \sin 2 \varphi + N_{xy} \cos 2 \varphi
 \end{aligned} \tag{4.51.2}$$

Die auftretenden Biegemomente m_n und die Drillungsmomente $m_{n\varphi}$ für die Richtung φ lauten:

$$\begin{aligned}
 m_n &= m_x \cos^2 \varphi + m_y \sin^2 \varphi + m_{xy} \sin 2 \varphi \\
 m_{n\varphi} &= \frac{1}{2} (m_y - m_x) \sin 2 \varphi + m_{xy} \cos 2 \varphi
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Eingesetzt in die Forderung (4.3.1)

$$-N_n \leq m_n \leq P_n$$

erhält man

$$\begin{aligned} (-N_x) \cos^2 \varphi + (-N_y) \sin^2 \varphi + N_{xy} \sin 2 \varphi &\leq m_x \cos^2 \varphi + m_y \sin^2 \varphi \\ + m_{xy} \sin 2 \varphi &\leq P_x \cos^2 \varphi + P_y \sin^2 \varphi + P_{xy} \sin 2 \varphi \end{aligned} \quad (4.52)$$

oder nach kurzer Umformung

$$(P_x - m_x) \cos^2 \varphi + (P_y - m_y) \sin^2 \varphi \geq (m_{xy} - P_{xy}) \sin 2 \varphi \quad (4.53.1)$$

$$(N_x + m_x) \cos^2 \varphi + (N_y + m_y) \sin^2 \varphi \geq -(m_{xy} - N_{xy}) \sin 2 \varphi \quad (4.53.2)$$

Es sei noch bemerkt, daß N_x , N_y , P_x , P_y positiv sind. P_{xy} und N_{xy} können größer oder kleiner als null sein.

Durch den Vergleich der Ungleichungen (4.53.1) (4.53.2) mit den Gleichungen (4.5.1) und (4.5.2) stellt man fest, daß sie identisch sind, wenn man m_{xy} in der Beziehung (4.5.1) durch $(m_{xy} - P_{xy})$ ersetzt und in der Beziehung (4.5.2) m_{xy} durch $(m_{xy} - N_{xy})$.

Durch entsprechende Substitution in den Plastizitätsbedingungen für eine in x - und y -Richtung armierte Platte (4.21) erhält man die *allgemeinen Plastizitätsbedingungen für eine Stahlbetonplatte*.

$\begin{aligned} P_x - m_x &\geq 0 \\ P_y - m_y &\geq 0 \\ (P_x - m_x)(P_y - m_y) &\geq (m_{xy} - P_{xy})^2 \\ N_x + m_x &\geq 0 \\ N_y + m_y &\geq 0 \\ (N_x + m_x)(N_y + m_y) &\geq (m_{xy} - N_{xy})^2 \end{aligned}$	(4.54)
--	--------

Um zu zeigen, daß bei $m_n = P_n$ bzw. $= -N_n$ auch $m_{n\varphi} = P_{n\varphi}$ bzw. $= N_{n\varphi}$ erfüllt ist, braucht man in den Betrachtungen für eine Armierung in x - und y -Richtung nur m_{xy} durch $(m_{xy} - P_{xy})$ bzw. bei Fließen der oberen Armierung durch $(m_{xy} - N_{xy})$ zu ersetzen. Weil die Herleitung sofort überblickt werden kann, wird hier auf die Ausführung verzichtet.

4.3.2 Allgemeine lineare Plastizitätsbedingungen

Auch hier werden die linearen Plastizitätsbedingungen durch Substitution von m_{xy} durch $(m_{xy} - P_{xy})$ (untere Armierung) bzw. $(m_{xy} - N_{xy})$ (obere Armierung) gefunden.

$$\begin{array}{l}
 P_x - m_x - m_{xy} + P_{xy} \geq 0 \\
 P_x - m_x + m_{xy} - P_{xy} \geq 0 \\
 P_y - m_y - m_{xy} + P_{xy} \geq 0 \\
 P_y - m_y + m_{xy} - P_{xy} \geq 0 \\
 N_x + m_x - m_{xy} + N_{xy} \geq 0 \\
 N_x + m_x + m_{xy} - N_{xy} \geq 0 \\
 N_y + m_y - m_{xy} + N_{xy} \geq 0 \\
 N_y + m_y + m_{xy} - N_{xy} \geq 0
 \end{array} \tag{4.55}$$

Es sei nochmals bemerkt, daß P_x, P_y, N_x und N_y positive Zahlen sind, wogegen m_x, m_y, m_{xy}, P_{xy} und N_{xy} größer oder kleiner als null sein können.

Näherung

Wenn $\eta_1^P = \eta_2^P = \eta^P$ und $\eta_1^N = \eta_2^N = \eta^N$ angenommen werden können, so ist der Umweg über P_1 und P_2 bzw. N_1 und N_2 nicht nötig.

Man kann direkt anschreiben:

$$\begin{aligned} P_x &= Z_x^P \eta^P b \\ P_y &= Z_y^P \eta^P b \\ P_{xy} &= Z_{xy}^P \eta^P b \\ N_x &= Z_x^N \eta^N b \\ N_y &= Z_y^N \eta^N b \\ N_{xy} &= Z_{xy}^N \eta^N b \end{aligned} \tag{4.56}$$

5. Gleichgewichtszustände für Platten

5.1 Gleichgewichtsbedingungen

In Abb. 5.1 sind an einem infinitesimalen Plattenteil mit den Seitenlängen dx und dy die auf die Längeneinheit bezogenen Schnittkräfte in positiver Richtung eingezeichnet. Durch Formulieren der Gleichgewichtsbedingungen erhält man die folgenden Beziehungen:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = q_x \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = q_y \tag{5.3}$$

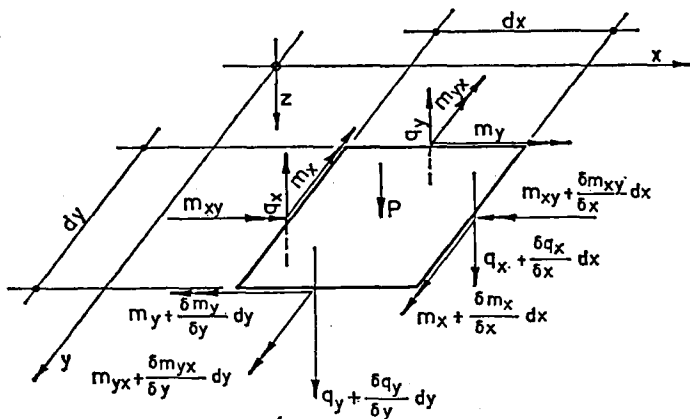


Abb. 5.1 Schnittkräfte an einem Plattenelement

Die Differentialgleichung (5.1) wird in drei Teile aufgespalten.

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -p_x \quad (5.4.1)$$

$$2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -p_{xy} \quad (5.4.2)$$

$$\frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p_y \quad (5.4.3)$$

mit der Bedingung

$$p_x + p_{xy} + p_y = p \quad (5.5)$$

Physikalisch bedeutet dies, daß eine Platte in drei ideale Platten zerlegt wird, von denen die eine nur Momente in x -Richtung, eine zweite nur Momente in y -Richtung und die dritte nur Drillungsmomente m_{xy} aufnehmen kann. Die Summe der Teilbelastungen muß natürlich gleich der tatsächlichen Belastung sein.

Durch Integration der Gleichungen (5.1; 5.2; 5.3) erhält man die Momente

$$m_x = \int_0^x d\bar{x} \int_0^{\bar{x}} (-p_x) d\bar{x} + f_1(y) + x f_2(y) + k_1 \quad (5.6.1)$$

$$m_y = \int_0^y d\bar{y} \int_0^{\bar{y}} (-p_y) d\bar{y} + f_3(x) + y f_4(x) + k_2 \quad (5.6.2)$$

$$m_{xy} = \frac{1}{2} \int_0^x d\bar{x} \int_0^{\bar{x}} (-p_{xy}) d\bar{y} + f_5(x) + f_6(y) + k_3 \quad (5.6.3)$$

Für y , bzw. $x = \text{konstant}$, erhält man aus Gleichung (5.6.1) und (5.6.2) die Biegemomente längs einer Parallelen zur x - bzw. y -Achse. Man sieht sofort die Übereinstimmung mit den Momenten eines Balkens.

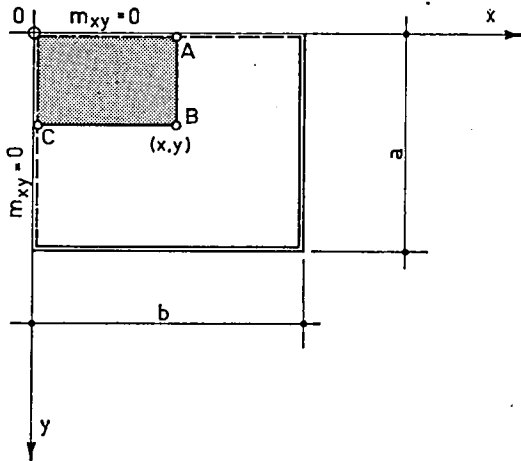


Abb. 5.2 Aufgabenstellung zur Bestimmung des Drillungsmomentenverlaufes

Das Drillungsmoment (5.6.3) ergibt sich durch Summation der halben p_{xy} über den entsprechenden Plattenbereich unter Berücksichtigung der Randbedingungen. Anhand eines Beispiels (Abb. 5.2) soll das Vorgehen erläutert werden.

Eine ideelle Platte, die nur Drillungsmomente aufnehmen kann, sei an den Rändern $x = 0$ und $y = 0$ frei. An diesen Rändern sind daher die Drillungsmomente gleich null, weil an einem freien Rand keine Schubspannungen angreifen können. Also längs $x = 0$ und $y = 0$ ist $m_{xy} = 0^*$. An den Rändern $x = a$ und $y = b$ ist die Platte fähig, m_{xy} -Momente aufzunehmen. Die Belastung p_{xy} sei konstant über die Platte.

$$m_{xy} = \frac{1}{2} \int_0^x dx \int_0^y (-p_{xy}) dy + f_5(x) + f_6(y) + k_3$$

oder
$$m_{xy} = -\frac{1}{2} x y p_{xy} + f_5(x) + f_6(y) + k_3 \quad (5.7)$$

Für $x = 0$ und $y = 0$ ist $m_{xy} = 0$, und daher wird

für $x = 0, y = 0$	$k_3 = 0$
für $x = 0$	$f_6(y) = 0$
für $y = 0$	$f_5(x) = 0$

Daraus erhält man
$$m_{xy} = -\frac{1}{2} x y p_{xy} \quad (5.8)$$

* Diese Bedingung hat auch bei elastischen Platten Gültigkeit. Sie wird jedoch bei der klassischen Plattentheorie durch die Näherung der Ersatzscherkräfte umgangen, um dadurch die Zahl der Randbedingungen der Zahl der Integrationskonstanten anzugleichen.

Das Drillungsmoment m_{xy} am Punkt x, y kann man auch finden, indem man zu der halben negativen Belastung des Vierecks $OABC$ das Drillungsmoment in Punkt A zu demjenigen in Punkt C addiert und das Drillungsmoment in Punkt O subtrahiert:

$$m_{xy} = -\frac{1}{2} x y \dot{p}_{xy} + m_{xy}^A + m_{xy}^C - m_{xy}^O \quad (5.9)$$

wobei $m_{xy}^A = m_{xy}^C = m_{xy}^O = 0$ und daher wieder

$$m_{xy} = -\frac{1}{2} x y \dot{p}_{xy} \text{ ist.} \quad (5.8)$$

5.2 Randbedingungen

Die Randbedingungen können allgemein in folgende zwei Hauptgruppen eingeteilt werden:

- a) Statische Randbedingungen
- b) Geometrische Randbedingungen

Für das Finden eines unteren Grenzwertes der Traglast benötigt man auf Grund des unteren Grenzwertsatzes weder Aussagen über Durchbiegungen, Verdrehungen und Verschiebungen noch über Verformungsgeschwindigkeiten. Es werden keine geometrischen Kontinuitätsbedingungen gebraucht. Somit entfallen auch die geometrischen Randbedingungen. Nur die statischen Randbedingungen werden benützt.

5.2.1 Freier Rand

Der Rand $x = \text{konstant}$ liegt vollkommen frei. Es können keine Kräfte angreifen. Es gilt also

$$\sigma_x = 0 \quad (5.9.1)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad (5.9.2)$$

$$\tau_{xx} = 0 \quad (5.9.3)$$

und damit bekommt man die Schnittkräfte

$$m_x = \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} \sigma_x z \, dz = 0 \quad (5.10.1)$$

$$m_{xy} = \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} \tau_{xy} z \, dz = 0 \quad (5.10.2)$$

$$q_x = \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} \tau_{xz} \, dz = 0 \quad (5.10.3)$$

Nach Gleichung (5.2) ist

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad (5.2)$$

m_{xy} ist nach (5.10.1) längs des ganzen Randes $x = \text{konstant}$ gleich null.
Daher ist auch

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (5.11)$$

und die Gleichung (5.2) vereinfacht sich zu

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} = 0$$

Somit lauten die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für einen freien Rand längs $x = \text{konstant}$

$$\left| \begin{array}{l} m_x = 0 \\ m_{xy} = 0 \\ \frac{\partial m_x}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (5.12)$$

Diese Bedingungen haben auch bei elastischen Platten Gültigkeit. Bei der klassischen Plattentheorie kann man jedoch die Lösung $w(x,y)$ nur je zwei Randbedingungen anpassen. Durch die Einführung der Ersatzscherkräfte werden die Bedingungen (5.10.2) und (5.10.3) zu einer vereint, um von den drei auf zwei Randbedingungen zu gelangen.

5.2.2 Einfach gelagerter Rand

Die Platte sei längs des Randes $x = \text{konstant}$ frei gelagert. Bei diesem Falle gibt es zwei Möglichkeiten.

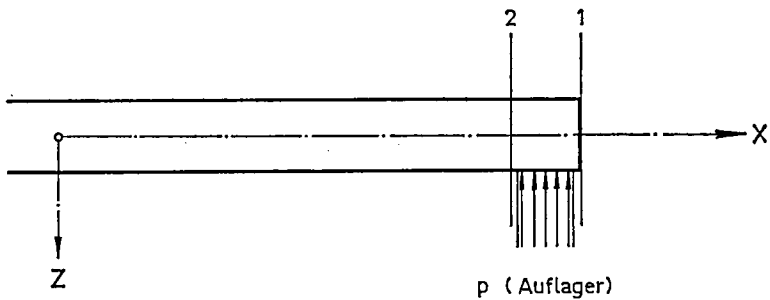


Abb. 5.3 Einfach gelagerter Rand

a) Man betrachtet den Schnitt 1 rechts vom Auflager (Abb. 5.3) als freien Rand. Dann ist es jedoch nötig, die Auflagerkraft als eine unbekannte Reaktion einzuführen, die natürlich mit der Belastung im Gleichgewicht sein muß. Dies ist empfehlenswert, wenn man sich direkt für

den Auflagerdruck interessiert, um z.B. die Gleichgewichtsbedingungen eines Randträgers zu formulieren (Abb. 5.4) oder um Bedingungen an den Auflagerdruck zu stellen.

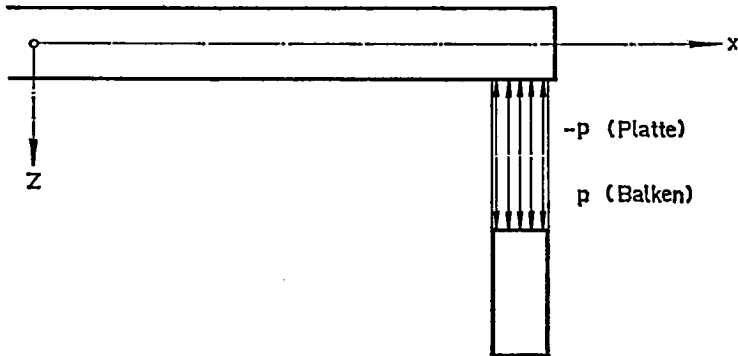


Abb. 5.4 Auf einem Randträger einfach gelagerter Rand

b) Man betrachtet den Schnitt 2 links vom Auflager (Abb. 5.3). Die einzige Bedingung lautet:

$$| \quad m_x = 0.$$

Diese beiden Möglichkeiten sind gleichwertig. Der Unterschied besteht darin, daß unter b der Auflagerdruck nur implizit gegeben ist.

5.2.3 Eingespannter Rand

An einem eingespannten Rand existieren keine statischen Randbedingungen. Das heißt, m_x , m_y , m_{xy} können jeden Wert annehmen, der für einen Gleichgewichtszustand notwendig ist.

5.3 Gleichgewichtszustände für eine spezielle Belastungsverteilung

5.3.1 Voraussetzungen

Eine Platte wird durch parallele Linien zu den x - und y -Achsen in ein Netz eingeteilt. Die Ränder werden treppenförmig approximiert, so daß sie mit den Netzlinien zusammenfallen (Abb. 5.5). Für die Belastung p

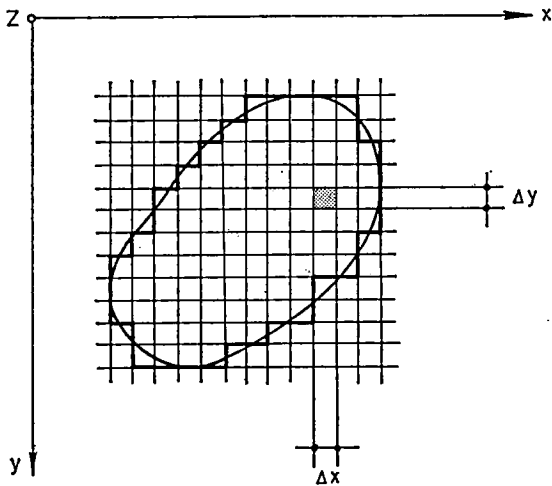


Abb. 5.5 Netzeinteilung einer beliebigen Platte mit Vereinfachung der Plattenform längs der Netzlinien

und die Teilbelastungen p_x , p_y und p_{xy} wird vorausgesetzt, daß sie über jedem Teilbereich konstant sind. Diese Annahme wurde aus folgenden Überlegungen getroffen:

- Eine äußere Belastung und speziell eine Einzellast läßt sich gut nachbilden.
- Sind p_x , p_y , p_{xy} in jedem Teilbereich bekannt, so sind die Momente in jedem Punkt eindeutig bestimmt. Wären zum Beispiel nur die Ordi-

naten der Teilbelastungen in einzelnen Punkten gegeben (übliche Differenzenverfahren), wären die Schnittkräfte nicht bestimmt, weil der Verlauf der Teilbelastungen zwischen den einzelnen Ordinaten nicht gegeben ist.

- c) Mit dieser Lastverteilung lassen sich Fehler gut abschätzen (siehe Kapitel 7 und 8), was bei einer anderen Lastverteilung sehr schwer, ja beinahe unmöglich ist.

Im weiteren soll noch vorausgesetzt werden, daß die Randmomente m_x und m_y in jedem Randteilstück Δy bzw. Δx konstant und die Drillungsmomente m_{xy} längs jeden Randteilstücks Δx und Δy linear in y und x sind. Der Verlauf der Randmomente, bzw. ihrer Ableitungen $\frac{\partial m_x}{\partial x}$, $\frac{\partial m_y}{\partial y}$, $\frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$ und $\frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$ ist durch die Beträge ihrer Momente bzw. Ableitungen in den Eckpunkten der Randteilstücke bestimmt. Diese Beträge werden als Randwerte bezeichnet.

5.3.2 Endlichfach statisch unbestimmtes System

Nach den Gleichungen (5.6) erhält man für jede der drei ideellen Platten die Schnittkräfte als lineare Funktionen von gewissen Randwerten der Momente und Teilbelastungen.

Die Randbedingungen stellen gewisse Forderungen an die Randwerte,

z.B. $m_x = 0$ oder $\frac{\partial m_x}{\partial x} = 0$. Die Randwerte der Ableitungen sind

lineare Funktionen von einzelnen Teilbelastungen und einzelnen Randwerten der Momente (siehe Gl. 5.6). Die drei ideellen Platten sind miteinander durch die Bedingung (5.5) verknüpft, daß die Summe der Teilbelastungen gleich der äußeren Last sein muß.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Schnittkräfte als lineare Funktionen der äußeren Belastung, einer endlichen Anzahl frei wählbarer Teilbelastungen und einer endlichen Anzahl frei wählbarer Randwerte der Momente angeschrieben werden können.

Solche in bezug auf die Gleichgewichtszustände frei wählbaren Werte nennt man auch überzählige Größen. Es existiert also ein endlichfach statisch unbestimmtes System.

5.3.3 Näherung des Momentenverlaufs

Durch Anschreiben der Beziehung (5.6) für ein Teilstück mit den Seitenlängen Δx und Δy erhält man mit den obigen Voraussetzungen

$$\begin{aligned} m_x &= -\frac{x^2 \dot{p}_x}{2} + K_1 + x K_2 \\ m_y &= -\frac{y^2 \dot{p}_y}{2} + K_3 + y K_4 \\ m_{xy} &= -\frac{1}{2} x y \dot{p}_{xy} + x K_5 + y K_6 + K_7 \end{aligned} \quad (5.13)$$

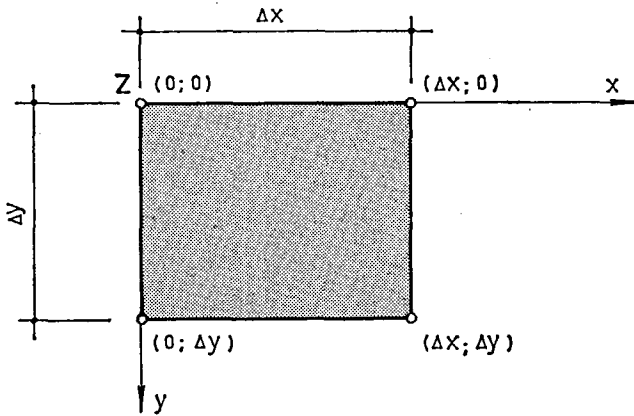


Abb. 5.6 Teilfläche $\Delta x \Delta y$

Die Momente m_x und m_y sind nicht linear in bezug auf die Koordinaten x und y . Sie werden nun durch Funktionen genähert, die in x und y linear sind und an den Eckpunkten mit den tatsächlichen Momenten übereinstimmen. Dabei entsteht eine Fehlerfunktion ϵ .

Die Beziehungen für m_x im Teilbereich $\Delta x \Delta y$ (Abb. 5.6) lauten

$$m_x = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + e = -\frac{x^2}{2} p_x + K_1 + x K_2 \quad (5.14)$$

Durch die Bedingung, daß die Fehlerfunktion e in den vier Eckpunkten den Wert null annimmt, erhält man

$$a_0 = K_1$$

$$a_1 = K_2 - \frac{p_x \Delta x}{2}$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = 0$$

Durch Einsetzen dieser Werte in Gleichung (5.14) ergibt sich

$$m_x = K_1 + \left(K_2 - \frac{p_x \Delta x}{2} \right) x + e = K_1 + K_2 x - p_x \frac{x^2}{2} \quad (5.15)$$

und daraus

$$e = x p_x \frac{\Delta x}{2} - \frac{x^2}{2} P_x \quad (5.16)$$

An der Stelle $x = \frac{\Delta x}{2}$ besitzt die Funktion e das Maximum. Es ist

$$e_{max} = \frac{p_x \Delta x^2}{8} \quad (5.17)$$

Dies bedeutet nichts anderes, als daß diese Annäherung gleich den Momenten der Knotenlasten in den Begrenzungen der Teilflächen ist. Die Beziehungen für m_y sind analog.

Die Drillungsmomente genügen direkt den gestellten Forderungen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Momente m_x und m_y durch eine Näherung als eine Funktion dargestellt werden, die innerhalb der Teilflächen $\Delta x \times \Delta y$ linear in x - und y -Richtung ist. Sie stimmt mit den tatsächlichen Momenten in den Eckpunkten überein und besitzt einen Fehler, der bei $\frac{\Delta x}{2}$ bzw. $\frac{\Delta y}{2}$ den maximalen Wert von $p_x \frac{\Delta x^2}{8}$ bzw. $p_y \frac{\Delta y^2}{8}$ erreicht. Die Momente m_x bzw. m_y können längs der Netzlinien y bzw. $x = \text{konstant}$ unstetig sein. Die Drillungsmomente m_{xy} sind innerhalb einer Teilfläche linear in x und y . An den Netzlinien sind sie immer stetig.

6. Erfüllen der Plastizitätsbedingungen

An den Verlauf der plastischen Momente $P_x, P_y, P_{xy}, N_x, N_y$ und N_{xy} wird die Forderung gestellt, daß er innerhalb einer Teilfläche $\Delta x \times \Delta y$ linear in x und y sei. An den Netzlinien kann er unstetig sein.

Die linearisierten Plastizitätsbedingungen (4.26) (4.55) fordern, daß Linearkombinationen der Schnittkräfte m_x, m_y und m_{xy} sowie der plastischen Momente $P_x, P_y, P_{xy}, N_x, N_y$ und N_{xy} größer oder gleich null sind. Weil nun alle Schnittkräfte und plastischen Momente über einem Teilbereich lineare Funktionen in x und y sind, sind auch deren Linearkombinationen linear in x und y . Eine solche Linearkombination ist

durch die Ordinaten an den vier Eckpunkten eines Rechteckes eindeutig bestimmt. Die Extremwerte einer solchen Funktion liegen in den Eckpunkten.

Durch Erfüllen der Plastizitätsbedingungen an allen Eckpunkten der Teilbereiche sind die Plastizitätsbedingungen über dem ganzen Plattenbereich erfüllt.

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß im allgemeinen Fall wegen der Unstetigkeiten des Verlaufs der Biegemomente und der plastischen Momente an einem Netzpunkt vier voneinander unabhängige Eckpunkte von Teilflächen existieren.

Die Plastizitätsbedingungen müssen an jedem der vier Eckpunkte erfüllt werden.

Von den 4×8 Plastizitätsbedingungen je Netzpunkt sind immer je zwei Bedingungen identisch bei folgender Voraussetzung. An einem Netzpunkt müssen die plastischen Momente P_x, N_x, P_{xy}, N_{xy} in der x -Richtung einen kontinuierlichen Verlauf haben wie die Biegemomente m_x .

Das Entsprechende gilt für die plastischen Momente P_y, N_y, P_{xy}, N_{xy} in der y -Richtung.

Die Zahl der Plastizitätsbedingungen reduziert sich damit auf 2×8 . Diese Voraussetzung ist bei Platten mit orthogonaler Armierung in x - und y -Richtung praktisch immer erfüllt. Die plastischen Drillungsmomente P_{xy} und N_{xy} sind gleich null. Der Verlauf der plastischen Momente P_x, N_x bzw. P_y, N_y darf in der x - bzw. y -Richtung auch bei Zulagearmierungen angenommen werden. Der Verlauf von P_x und N_x (Armierung in x -Richtung) kann längs einer Netzlinie $y = \text{konstant}$ in der y -Richtung immer noch diskontinuierlich sein.

7. Traglast einer Platte (Analysis)

7.1 Lösungsweg

Die Lösung soll einen unteren Grenzwert darstellen. Dies ist der Fall, wenn ein Gleichgewichtssystem gefunden werden kann, das an keinem Punkt die Plastizitätsbedingungen verletzt. Durch Einteilen der Platte in ein Netz mit Linien parallel der Koordinatenachsen und durch die Auferlegung von Bedingungen an die Belastungsaufteilung, an den Verlauf der Randmomente und an die Näherung der Momente m_x und m_y , wie sie in Kapitel 4 gemacht wurden, erhält man ein statisch unbestimmtes System mit einer endlichen Zahl Unbekannten. Durch Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich die Schnittkräfte als Linearkombinationen der überzähligen Größen und der äußeren Belastung. Die Schnittkräfte sind über jedem Teilbereich $\Delta x \Delta y$ lineare Funktionen in x - und y -Richtung. In Kapitel 5 wurde gezeigt, daß durch Erfüllen der linearisierten Plastizitätsbedingungen nur an den Eck-

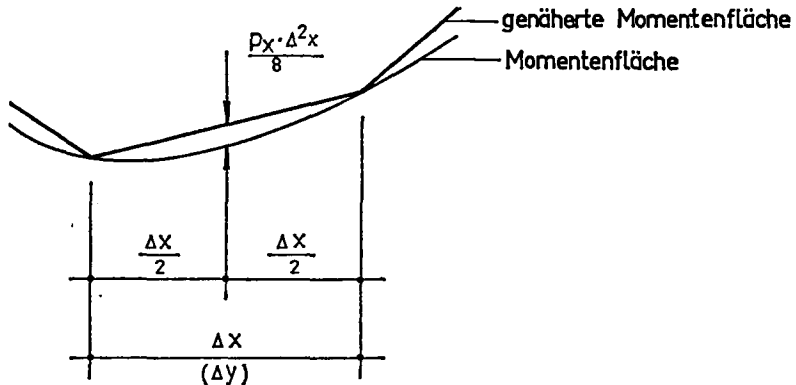


Abb. 7.1 Näherung der Momentenfläche durch Ebenen in einem Intervall Δx (Δy)

punkten die Plastizitätsbedingungen über dem ganzen Plattenbereich erfüllt sind. Jede Erfüllung der linearisierten Plastizitätsbedingungen an einem Punkt setzt sich zusammen aus maximal acht linearen Beziehungen in $P_x, P_y, N_x, N_y, m_x, m_y$ und m_{xy} . Weil jedoch die m_x, m_y und m_{xy} auch lineare Funktionen der Belastung und der überzähligen Größen sind, gehen die acht Plastizitätsbedingungen in acht lineare Bedingungen der überzähligen Größen und der Belastung über. Damit hat man die Ungleichungen eines linearen Programms gefunden. Die Zielfunktion besteht in der Bedingung, p solle maximiert werden, also $Z = p$, wobei Z ein Maximum werden soll.

7.2 Fehlerbetrachtungen

Es soll noch auf die Fehler eingegangen werden, die durch die stückweise Näherung des Momentenverlaufs von m_x und m_y durch Ebenen entstehen (Abb. 7.1). Nach Kapitel 5 befindet sich die maximale Abweichung in der Intervallmitte und beträgt für die Biegemomente m_x

$$e = \frac{p_x \Delta x^2}{8} \quad (5.17)$$

Je kleiner die Intervallsteilung angenommen wird, desto kleiner wird der Fehler. Der Fehler an der Traglast kann nur beurteilt werden, wenn die Plastizitätsbedingungen über dem ganzen Plattenbereich kontrolliert werden.

Die Lösung eines Problems sei bekannt. Damit kennt man auch die Werte von p_x, p_y und p_{xy} in jedem Teilbereich und daraus ebenfalls die Schnittkräfte m_x, m_y und m_{xy} . Durch Einsetzen dieser Momente in die linearen Plastizitätsbedingungen stellt man fest, ob sie zwischen den Netzpunkten verletzt sind.

Für den Fall, daß dies zutrifft (Abb. 7.2), kann man z.B. an den Stellen $\frac{\Delta x}{2}$ bzw. $\frac{\Delta y}{2}$ die nicht linearisierten Plastizitätsbedingungen anschreiben.

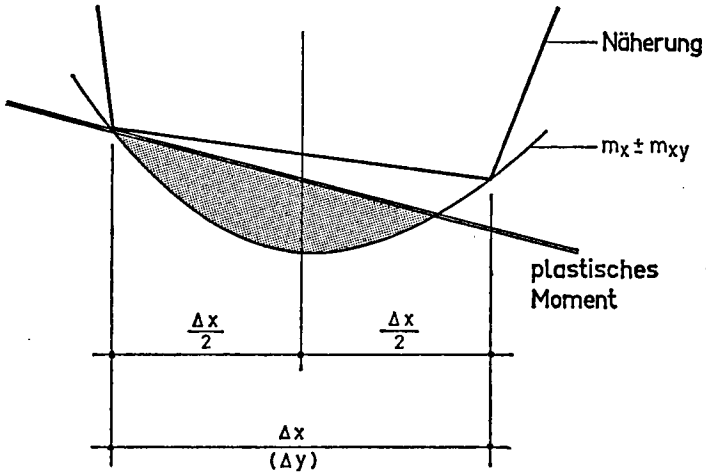


Abb. 7.2 Fehlerbetrachtungen in einem Intervall Δx bei orthogonaler Armierung in x - und y -Richtung

Es können folgende Fälle auftreten:

- Die Plastizitätsbedingungen sind erfüllt. Die erhaltene Lösung liegt auf der sicheren Seite.
- Die Plastizitätsbedingungen sind leicht verletzt. Die erhaltene Belastung kann um denjenigen Prozentsatz abgemindert werden, daß die Plastizitätsbedingungen überall erfüllt werden.

- c) Die Plastizitätsbedingungen sind stark verletzt. Am betreffenden Ort wird man noch die Plastizitätsbedingungen formulieren, indem man dem linearen Programm die entsprechenden Ungleichungen hinzufügt. Diese Änderung ist in kurzer Zeit ausgeführt, und das Problem kann nochmals gelöst werden.

Bei allen in dieser Arbeit gelösten Aufgaben (siehe Tafel II) sind folgende Fälle aufgetreten:

In einem Beispiel waren die Plastizitätsbedingungen leicht, bei einem anderen waren sie stark verletzt. Bei allen übrigen Fällen waren die nicht linearisierten Plastizitätsbedingungen über dem ganzen Plattenbereich erfüllt.

Es sei jedoch nochmals betont, daß es empfehlenswert ist, den Momentenverlauf aufzuzeichnen und damit zu prüfen, ob die Plastizitätsbedingungen an keinem Punkt verletzt werden. Die linearisierten Plastizitätsbedingungen sind am stärksten längs der Netzlinien verletzt. Es ist deshalb ausreichend, die Momente längs der Netzlinien aufzuzeichnen. Man erhält dadurch ein gutes Bild über den Kräfteverlauf, und zudem sind auch Fehler, die durch unrichtiges Aufstellen des linearen Programms entstehen, sofort ersichtlich.

7.3 *Beispiel*

Im folgenden soll die Traglast einer gleichmäßig belasteten Quadratplatte, die allseitig aufgelagert ist, bestimmt werden. Die Platte besitzt nur eine untere Armierung in x - und y -Richtung. Die Bewehrung ist in den beiden Richtungen so angeordnet, daß die positiven plastischen Momente einander gleich und über die ganze Platte konstant sind. Die negativen plastischen Momente sind über dem ganzen Plattenbereich gleich null. Die Platte wird durch ein Netz in 16 gleiche Teilbereiche

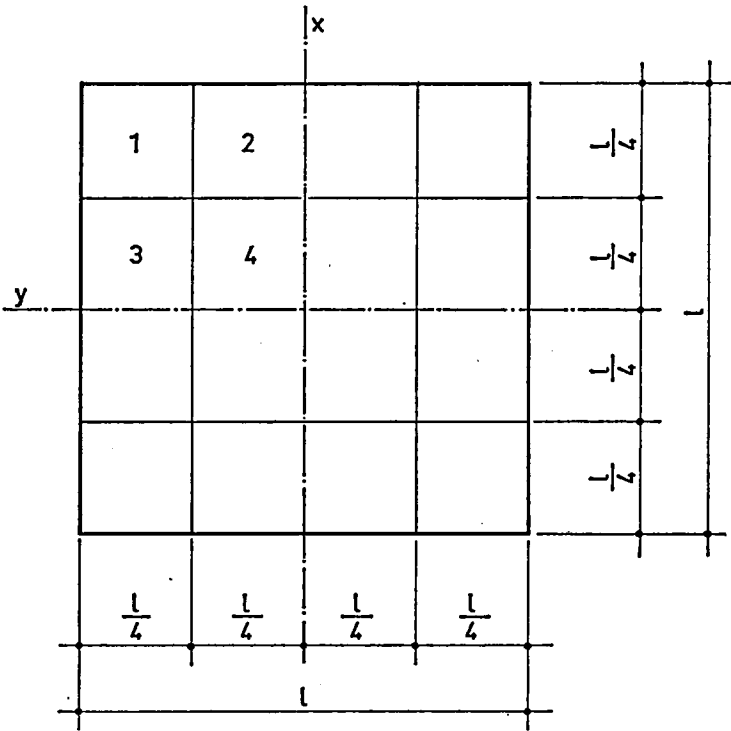


Abb. 7.3 Beispiel zur Bestimmung der Traglast

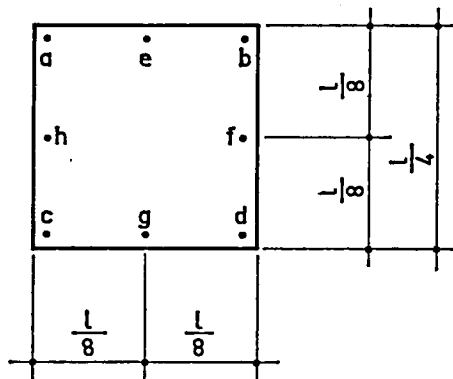


Abb. 7.4 Bezeichnung der Punkte eines Teilbereichs

eingeteilt (Abb. 7.3). Wegen der Symmetrie wird nur ein Viertel der Platte betrachtet. Die i Teilbereiche werden mit den Nummern 1 bis i (4) bezeichnet. Die Eckpunkte jedes Teilbereiches tragen die Indices a, b, c, d (Abb. 7.4). Die Momente in den Eckpunkten jedes Teilbereiches werden wie folgt angeschrieben:

Momente in x -Richtung (m_x):

$$\begin{aligned}
 m_x^{1a} &= m_x^{1c} = m_x^{3a} = m_x^{3c} = 0 \text{ (frei aufgelegt)} \\
 m_x^{1b} &= m_x^{1d} = m_x^{2a} = m_x^{2c} = \frac{l^2}{32} (p_{x,1} + 2 p_{x,2}) \\
 m_x^{2b} &= m_x^{2d} &= \frac{l^2}{32} (p_{x,1} + 3 p_{x,2}) \\
 m_x^{3b} &= m_x^{3d} = m_x^{4a} = m_x^{4c} = \frac{l^2}{32} (p_{x,3} + 2 p_{x,4}) \\
 m_x^{4b} &= m_x^{4d} &= \frac{l^2}{32} (p_{x,3} + 3 p_{x,4})
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Momente in y -Richtung (m_y):

$$\begin{aligned}
 m_y^{1a} &= m_y^{1b} = m_y^{2a} = m_y^{2b} = 0 \\
 m_y^{1c} &= m_y^{1d} = m_y^{3a} = m_y^{3b} = \frac{l^2}{32} (p_{y,1} + 2 p_{y,3}) \\
 m_y^{2c} &= m_y^{2d} &= \frac{l^2}{32} (p_{y,1} + 3 p_{y,3}) \\
 m_y^{2c} &= m_y^{2d} = m_y^{4a} = m_y^{4b} = \frac{l^2}{32} (p_{y,2} + 2 p_{y,4}) \\
 m_y^{4c} &= m_y^{4d} &= \frac{l^2}{32} (p_{y,2} + 3 p_{y,4})
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Drillungsmomente (m_{xy}):

$$\begin{aligned}
 m_{xy}^{Ad} &= m_{xy}^{Ac} = m_{xy}^{Ab} = m_{xy}^{2d} = m_{xy}^{2b} = m_{xy}^{3d} = m_{xy}^{3c} = 0 \text{ (Symmetrie)} \\
 m_{xy}^{Aa} &= m_{xy}^{2c} = m_{xy}^{3b} = m_{xy}^{1d} = -p_{xy,4} \frac{l^2}{32} \\
 m_{xy}^{2a} &= m_{xy}^{1b} = -(p_{xy,4} + p_{xy,2}) \frac{l^2}{32} \\
 m_{xy}^{3a} &= m_{xy}^{1c} = -(p_{xy,4} + p_{xy,3}) \frac{l^2}{32} \\
 m_{xy}^{1a} &= -(p_{xy,1} + p_{xy,2} + p_{xy,3} + p_{xy,4}) \frac{l^2}{32}
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Die Platte hat in x - und y -Richtung analoge Eigenschaften, und demnach gilt

$$\begin{aligned}
 p_{x,1} &= p_{y,1} \\
 p_{x,2} &= p_{y,3} \\
 p_{x,3} &= p_{y,2} \\
 p_{x,4} &= p_{y,4}
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Wegen der Bedingung, daß die Summe der ideellen Teilbelastungen gleich derjenigen der tatsächlichen Teilbelastungen ist, wird

$$\begin{aligned}
 -p_{xy,1} &= p_{x,1} + p_{y,1} - p_1 = 2 p_{x,1} - p_1 \\
 -p_{xy,2} &= p_{x,2} + p_{y,2} - p_2 = p_{x,2} + p_{x,3} - p_2 \\
 -p_{xy,3} &= p_{x,3} + p_{y,3} - p_3 = p_{x,2} + p_{x,3} - p_3 \\
 -p_{xy,4} &= p_{x,4} + p_{y,4} - p_4 = 2 p_{x,4} - p_4
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Eingesetzt in die Gleichungen (7.2) und (7.3) und unter Beachtung, daß bei gleichmäßig verteilter Belastung $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p$ ist, erhält man

$$\begin{aligned}
 m_y^{1c} = m_y^{1d} = m_y^{3a} = m_y^{3b} &= \frac{l^2}{32} (p_{x,1} + 2 p_{x,2}) \\
 m_y^{2c} = m_y^{2d} &= \frac{l^2}{32} (p_{x,1} + 3 p_{x,2}) \\
 m_y^{2e} = m_y^{2d} = m_y^{4a} = m_y^{4b} &= \frac{l^2}{32} (p_{x,3} + 2 p_{x,4}) \\
 m_y^{4c} = m_y^{4d} &= \frac{l^2}{32} (p_{x,3} + 3 p_{x,4})
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

und

$$\begin{aligned}
 m_{xy}^{2d} = m_{xy}^{4c} = m_{xy}^{4b} = m_{xy}^{2d} = m_{xy}^{2b} = m_{xy}^{3d} = m_{xy}^{2e} &= 0 \\
 m_{xy}^{4a} = m_{xy}^{2c} = m_{xy}^{3b} = m_{xy}^{1d} &= \frac{l^2}{32} (2 p_{x,4} - p) \\
 m_{xy}^{2a} = m_{xy}^{1b} = m_{xy}^{3a} = m_{xy}^{1c} &= \frac{l^2}{32} (p_{x,2} + p_{x,3} + 2 p_{x,4} - 2 p) \\
 m_{xy}^{1a} &= \frac{l^2}{32} (2 p_{x,1} + 2 p_{x,2} + 2 p_{x,3} + 2 p_{x,4} - 4 p)
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Um nun einen Gleichgewichtszustand zu finden, bei dem die Plastizitätsbedingungen an keinem Ort verletzt werden, schreibt man an den Eckpunkten die linearen Plastizitätsbedingungen an. Mit den Werten $P_x = P_y = P$ und $N_x = N_y = 0$ lauten sie nach den Bedingungen (4.26) für jeden Punkt

$$\begin{aligned}
P - m_x + m_{xy} &\geq 0 \\
P - m_x - m_{xy} &\geq 0 \\
m_x + m_{xy} &\geq 0 \\
m_x - m_{xy} &\geq 0 \\
P - m_y + m_{xy} &\geq 0 \\
P - m_y - m_{xy} &\geq 0 \\
m_y + m_{xy} &\geq 0 \\
m_y - m_{xy} &\geq 0
\end{aligned}
\tag{7.8}$$

Da die Kombinationen der m_y mit den m_{xy} den entsprechenden Verlauf haben wie die Kombinationen der m_x mit den m_{xy} genügt es, nur die Hälfte der Plastizitätsbedingungen zu benutzen. Bei ihrer Erfüllung sind die anderen Bedingungen automatisch befriedigt.

Die ausreichenden Plastizitätsbedingungen lauten demnach

$$\begin{aligned}
P - m_x + m_{xy} &\geq 0 \\
P - m_x - m_{xy} &\geq 0 \\
m_x + m_{xy} &\geq 0 \\
m_x - m_{xy} &\geq 0
\end{aligned}
\tag{7.9}$$

die für alle ausgewählten Punkte angeschrieben werden.

Punkt 1a:

$$P + 0 + \frac{l^2}{32} (2 p_{x,1} + 2 p_{x,2} + 2 p_{x,3} + 2 p_{x,4} - 4 p) \geq 0$$

$$P + 0 - \frac{l^2}{32} (2 p_{x,1} + 2 p_{x,2} + 2 p_{x,3} + 2 p_{x,4} - 4 p) \geq 0$$

$$0 + \frac{l^2}{32} (2 p_{x,1} + 2 p_{x,2} + 2 p_{x,3} + 2 p_{x,4} - 4 p) \geq 0$$

$$0 - \frac{l^2}{32} (2 p_{x,1} + 2 p_{x,2} + 2 p_{x,3} + 2 p_{x,4} - 4 p) \geq 0$$

Aus diesen Ungleichungen ist sofort ersichtlich, daß $m_{xy}^{1a} = 0$ sein muß. Also sind

$$2 p_{x,1} + 2 p_{x,2} + 2 p_{x,3} + 2 p_{x,4} - 4 p = 0 \quad (7.10)$$

Punkt 1c, 3a:

Analog muß $m_{xy}^{1b} = m_{xy}^{1c} = m_{xy}^{2a} = m_{xy}^{3a} = 0$ sein

oder
$$p_{x,2} + p_{x,3} + 2 p_{x,4} - 2 p = 0 \quad (7.11)$$

Aus den Gleichungen (7.10) und (7.11) kann man sofort zwei Unbekannte ersetzen und auf einfache Art die Anzahl Ungleichungen um acht verkleinern. (Selbstverständlich könnte man auch ohne diesen Eingriff mit allen Ungleichungen und Unbekannten weiterrechnen. Das Resultat wäre identisch.) Man eliminiert z. B. $p_{x,3}$ und $p_{x,4}$

$$\begin{aligned} p_{x,4} &= p_{x,1} \\ p_{x,3} &= +2 p - 2 p_{x,1} - p_{x,2} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Mit diesen beiden Bedingungen sind die Plastizitätsbedingungen in den Punkten 1a, 1c und 3a immer erfüllt.

Punkt 1d, 2c (1b, 2a):

$$\begin{aligned} P - \frac{l^2}{32} (p_{x,1} + 2 p_{x,2}) + \frac{l^2}{32} (2 p_{x,1} - p) &\geq 0 \\ P - \frac{l^2}{32} (p_{x,1} + 2 p_{x,2}) - \frac{l^2}{32} (2 p_{x,1} - p) &\geq 0 \\ \frac{l^2}{32} (p_{x,1} + 2 p_{x,2}) + \frac{l^2}{32} (2 p_{x,1} - p) &\geq 0 \\ \frac{l^2}{32} (p_{x,1} + 2 p_{x,2}) - \frac{l^2}{32} (2 p_{x,1} - p) &\geq 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

Die Punkte 1b und 2a sind in diesen vier Ungleichungen enthalten. Die plastischen Momente und die m_x sind in diesen Punkten dieselben. An den Randpunkten ist das Drillungsmoment $m_{xy} = 0$; wenn die Plastizitätsbedingungen mit einem Drillungsmoment $\neq 0$ befriedigt sind, so sind sie sicher auch für $m_{xy} = 0$ erfüllt.

Punkt 2d, 2b:

$$\begin{aligned}
 P - \frac{l^2}{32} (p_{x,1} + 3 p_{x,2}) &\geq 0 \\
 \frac{l^2}{32} (p_{x,1} + 3 p_{x,2}) &\geq 0
 \end{aligned}
 \tag{7.14}$$

Weil die Drillungsmomente gleich null sind, werden die vier Ungleichungen auf zwei reduziert.

Punkt 3b, 4a (3d, 4c):

$$\begin{aligned}
 P - \frac{l^2}{32} (+ 2 p - p_{x,2}) + \frac{l^2}{32} (2 p_{x,1} - p) &\geq 0 \\
 P - \frac{l^2}{32} (+ 2 p - p_{x,2}) - \frac{l^2}{32} (2 p_{x,1} - p) &\geq 0 \\
 \frac{l^2}{32} (+ 2 p - p_{x,2}) + \frac{l^2}{32} (2 p_{x,1} - p) &\geq 0 \\
 \frac{l^2}{32} (+ 2 p - p_{x,2}) - \frac{l^2}{32} (2 p_{x,1} - p) &\geq 0
 \end{aligned}
 \tag{7.15}$$

Punkt 4d, 4b:

$$\begin{aligned}
 P - \frac{l^2}{32} (2 p + p_{x,1} - p_{x,2}) &\geq 0 \\
 + \frac{l^2}{32} (2 p + p_{x,1} - p_{x,2}) &\geq 0
 \end{aligned}
 \tag{7.16}$$

Es existieren zwölf Ungleichungen mit drei unabhängigen Variablen. Es gibt unendlich viele Lösungen dieses Problems. Jede von diesen Lösungen stellt einen unteren Grenzwert dar, d.h. es sind Lösungen auf der sicheren Seite. Interessant ist jedoch die größtmögliche Belastung, für die alle Ungleichungen erfüllt sind. Man fügt den Ungleichungen noch eine Optimalbedingung an, bei der p ein Maximum sein soll. Die Ungleichungen und die Optimalbedingung ordnet man mit transponierter Beschriftung [10] und erhält damit das Schema des linearen Programms.

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	Z_{max}
$-p_{x,1}$	-1	3	-3	1	1	-1	-2	2	-2	2	1	-1	0
$-p_{x,2}$	2	2	-2	-2	3	-3	-1	-1	1	1	-1	1	0
$-p$	1	-1	1	-1	0	0	3	1	-1	-3	2	-2	-1
$\frac{32P}{l^2}$	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	

Mit den Nebenbedingungen y_1 bis $y_{12} \geq 0$, $p \geq 0$, $p_{x,1}$ und $p_{x,2}$ ohne Bedingungen, findet man folgende Resultate:

$$\text{Traglast } p = 0,5454 \frac{32 P}{l^2} = \frac{17,45 p}{l^2}$$

$$p_{x,1} = 0,182 \frac{32 P}{l^2}$$

$$p_{x,2} = 0,273 \frac{32 P}{l^2}$$

und daraus nach den Gleichungen (7.12)

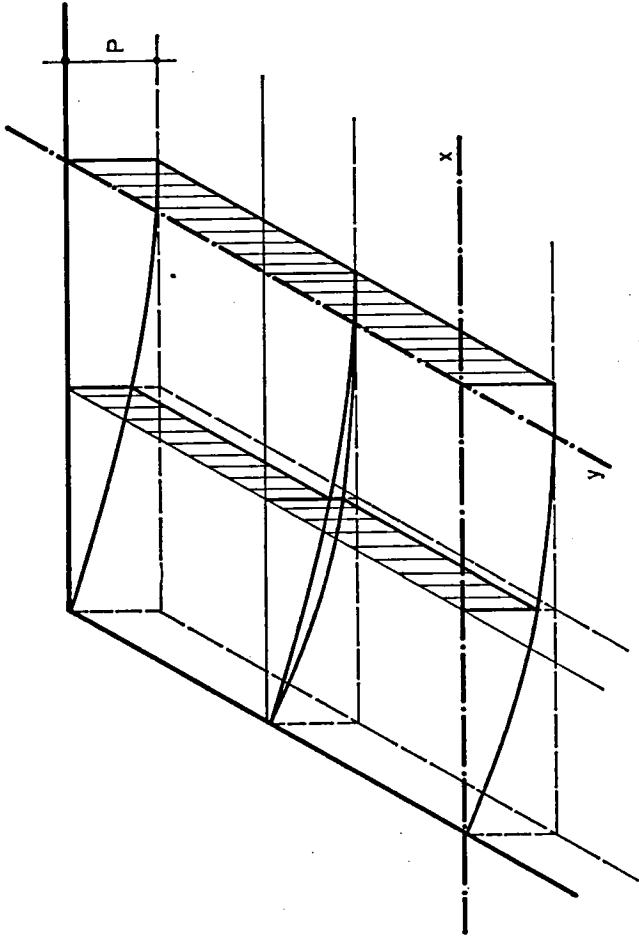


Abb. 7.5 Momente m_x (m_y)

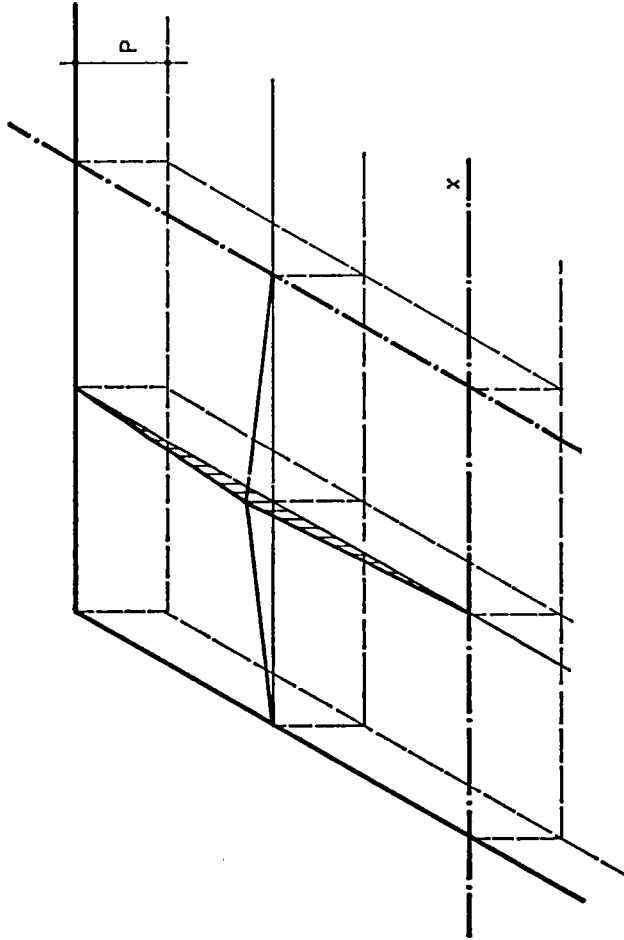


Abb. 7.6 Drillungsmomente M_{xy}

$$p_{x,3} = 0,454 \frac{32 P}{l^2}$$

$$p_{x,4} = 0,182 \frac{32 P}{l^2}$$

Die Momente m_x nach den Gleichungen (7.1) sind

$$\begin{aligned} m_x^{1a} &= m_x^{1c} = m_x^{3a} = m_x^{3b} = 0 \\ m_x^{1b} &= m_x^{1d} = m_x^{2a} = m_x^{2c} = 0,728 P \\ m_x^{2b} &= m_x^{2d} &= 1,000 P \\ m_x^{3b} &= m_x^{3d} = m_x^{4a} = m_x^{4c} = 0,818 P \\ m_x^{4b} &= m_x^{4d} &= 1,000 P \end{aligned}$$

Der zugehörige Momentenverlauf ist in Abb. 7.5 dargestellt. Weil die Platte und die Belastung in x - und y -Richtung analoge Eigenschaften besitzen, entsprechen die Momente m_x den Momenten m_y .

Die Drillungsmomente m_{xy} nach Gleichung (7.7) sind:

$$\begin{aligned} m_{xy}^{Ad} &= m_{xy}^{Ac} = m_{xy}^{Ab} = m_{xy}^{2d} = m_{xy}^{2b} = m_{xy}^{3d} = m_{xy}^{2c} = 0 \\ m_{xy}^{4a} &= m_{xy}^{2c} = m_{xy}^{3b} = m_{xy}^{1d} = -0,182 P \\ m_{xy}^{2a} &= m_{xy}^{1b} = m_{xy}^{3a} = m_{xy}^{1c} = 0 \\ m_{xy}^{1a} & &= 0 \end{aligned}$$

Die zugehörige Momentenfläche ist in Abb. 7.6 dargestellt.

Um an diesem Beispiel zu prüfen, ob die Plastizitätsbedingungen über dem ganzen Plattenbereich erfüllt sind, trägt man entsprechend Gleichung (7.9) die Summen der Momente $m_x + m_{xy}$ und $m_x - m_{xy}$ über dem Plattenbereich auf und kontrolliert, ob sie kleiner als P und größer

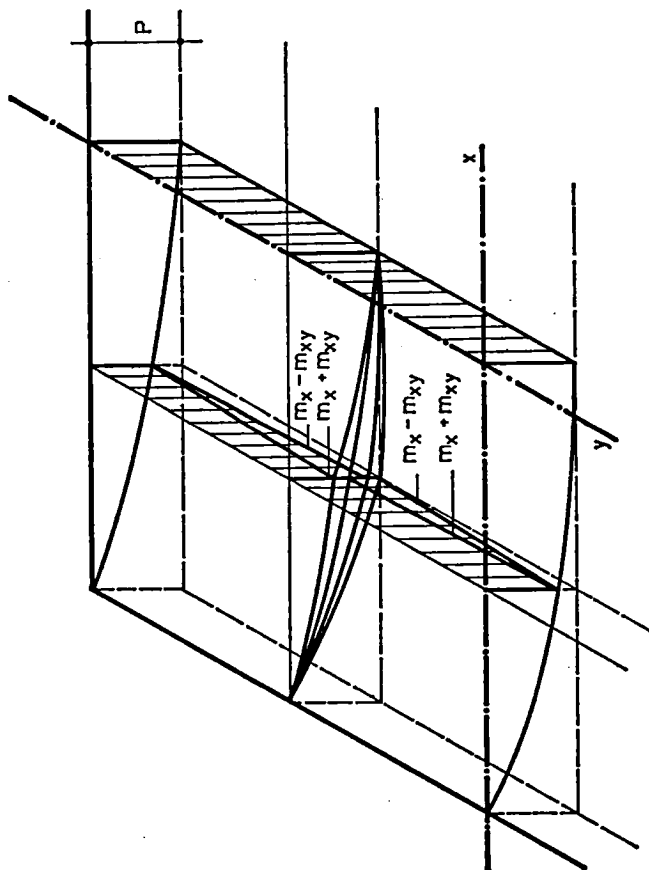


Abb. 7.7 Plastizitätskontrolle

als 0 sind (Abb. 7.7). Man stellt sofort fest, daß die linearen Plastizitätsbedingungen in den Teilbereichen 2 und 4 leicht verletzt sind. Am stärksten verletzt sind sie immer entlang der Netzlinien. Zur Prüfung, ob die nicht linearisierten Plastizitätsbedingungen trotzdem erfüllt sind, schreibt man sie an den Punkten 2g und 4e an (Abb. 7.4).

Mit den Schnittkräften in diesen Punkten

$$\begin{aligned} m_x^{2g} &= \frac{1}{2} (0,728 + 1,00) P + 0,273 \frac{32 P}{l^2} \frac{l^2}{16 \cdot 8} = (0,864 + 0,068) P \\ &= 0,932 P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_x^{4e} &= \frac{1}{2} (0,818 + 1,00) P + 0,182 \frac{32 p}{l^2} \frac{l^2}{16 \cdot 8} = (0,909 + 0,045) P \\ &= 0,954 P \end{aligned}$$

$$m_y^{2g} = m_y^{4e} = m_x^{3b} = 0,818 P$$

$$m_{xy}^{2g} = m_{xy}^{4e} = \frac{1}{2} (-0,182 + 0) P = -0,091 P$$

lauten sie nach Gleichung (4.21)

$$(P - m_x) (P - m_y) \geq m_{xy}^2$$

(Die anderen Bedingungen sind nicht maßgebend)
für den Punkt 4e

$$\begin{aligned} (1 - 0,954) (1 - 0,818) P^2 &\geq (-0,091)^2 P^2 \\ 0,084 P^2 &\geq 0,083 P^2 \end{aligned}$$

und für den Punkt 2g

$$\begin{aligned} (1 - 0,932) (1 - 0,818) P^2 &\geq (-0,091)^2 P^2 \\ 0,124 P^2 &\geq 0,083 P^2 \end{aligned}$$

Die nicht linearisierten Plastizitätsbedingungen sind in diesen Punkten erfüllt. Nun kann man mit ziemlicher Sicherheit sagen, daß die nicht linearisierten Plastizitätsbedingungen über dem ganzen Plattenbereich erfüllt sind. Somit hat man einen unteren Grenzwert für die Traglast p gefunden. Durch eine Verkleinerung der Netzweiten wird man bessere Resultate erhalten. Zum Vergleich sei auf die Beispiele in Tafel II verwiesen.

8. Minimalarmierung einer Platte (Bemessung)

8.1 Lösungsweg

Die minimale Armierung für die gegebene Belastung ist gesucht, zu der ein möglicher Gleichgewichtszustand existiert, dessen Schnittkräfte an keinem Punkt die Plastizitätsbedingungen verletzen. Durch analoges Vorgehen wie bei der Bestimmung der Traglast erhält man durch Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen und der Plastizitätsbedingungen je Eckpunkt acht Ungleichungen. Diese Ungleichungen unterscheiden sich von jenen bei der Bestimmung der Traglast nur darin, daß die plastischen Momente an den Eckpunkten frei zu wählende Größen sind und die äußere Belastung eine Konstante ist. Für unendlich viele Armierungen sind diese Ungleichungen erfüllt. Von diesen ist jedoch nur diejenige gesucht, die das kleinste Volumen aufweist. Mit

einer in den unabhängigen Variablen linearen Funktion des Armierungsvolumens, für die das Minimum gefordert wird, stellen diese Ungleichungen ein lineares Programm dar.

Nun soll das Armierungsvolumen für orthogonale Armierungen berechnet werden.

Für η , b und σ_f konstant ist nach Gleichung (3.17)

$$\begin{aligned} F^P &= \epsilon_3 P \\ F^N &= \epsilon_3 N \end{aligned} \quad (3.17)$$

wobei $\epsilon_3 = \frac{1}{\eta b \sigma_f}$ konstant ist.

Für eine Platte ist

$$\begin{aligned} F_x^P &= \epsilon_x^P P_x \\ F_x^N &= \epsilon_x^N N_x \\ F_y^P &= \epsilon_y^P P_y \\ F_y^N &= \epsilon_y^N N_y \end{aligned} \quad (8.1)$$

wobei P_x , P_y , N_y und N_x positiv sind.

Das gesamte Volumen der Armierung V ist:

$$V = \int \int_{\text{Tragwerk}} (F_x^P + F_x^N + F_y^P + F_y^N) dx dy \quad (8.2)$$

Durch das Einsetzen der Gleichungen (8.1) erhält man

$$V = \int \int_{\text{Tragwerk}} (\epsilon_x^P P_x + \epsilon_x^N N_x + \epsilon_y^P P_y + \epsilon_y^N N_y) dx dy \quad (8.3)$$

Wegen der Bedingung, daß P_x , N_x , P_y , N_y stückweise in x und y linear sind, geht Gleichung (8.3) über in

$$\begin{aligned}
 V = \frac{1}{4} \sum^{\text{Tragwerk}} \left\{ c_x^P (P_x^a + P_x^b + P_x^c + P_x^d) + c_x^N (N_x^a + N_x^b + N_x^c + N_x^d) \right. \\
 \left. + c_y^P (P_y^a + P_y^b + P_y^c + P_y^d) + c_y^N (N_y^a + N_y^b + N_y^c + N_y^d) \right\} \Delta x \Delta y
 \end{aligned}
 \tag{8.4}$$

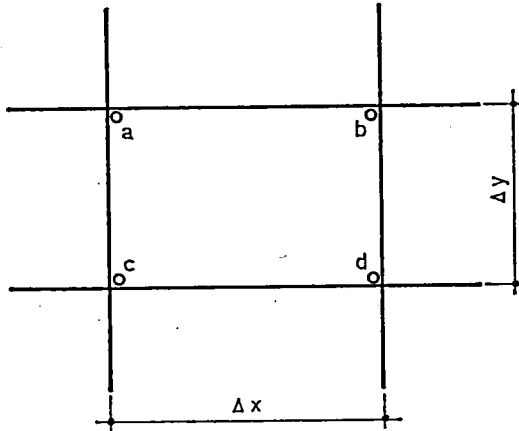


Abb. 8.1 Numerierung der Eckpunkte eines Teilbereichs

Die Indices a, b, c, d bezeichnen die Eckpunkte eines Teilbereichs nach Abb. 8.1. Die Zielfunktion $Z = V$, die minimiert werden muß, ist eine lineare Funktion der plastischen Momente in den Eckpunkten jedes Teilbereichs. Die Werte P_x, P_y, N_x und N_y sind positive Größen. Alle gestellten Forderungen zur Aufstellung eines linearen Programms sind erfüllt.

Es ist auch bei Platten nicht schwierig, die Minimalarmierung unter zusätzlichen Bedingungen zu bestimmen. Auch hier kann die Armierung durch einen oberen oder unteren Wert begrenzt werden (siehe Kapitel

3.2). Man kann auch eine bestimmte Armierungsanordnung vorschreiben, z.B. die Bewehrung müsse über einem gewissen Bereich konstant sein (Beispiel 12). Solche Bedingungen werden in lineare Beziehungen der unabhängigen Variablen gekleidet. Zusammen mit den anderen Ungleichungen und der Zielfunktion bilden sie wieder ein lineares Programm.

Mit der Voraussetzung, daß die Teilbelastungen p_x , p_y und p_{xy} über jedem Teilbereich konstant sind, wird die Wahl der möglichen Gleichgewichtszustände beschränkt. Werden nun gewisse Bedingungen an die Armierung gestellt, so ist die Traglast für die Platte mit der gefundenen Armierung nicht unbedingt gleich der gegebenen Belastung. Nach dem unteren Grenzwertsatz kann man jedoch sagen, daß sie sicher nicht kleiner als die gegebene Belastung ist.

Die Bestimmung der minimalen Armierung, wenn mehrere Belastungsfälle auftreten können, unterscheidet sich generell nicht vom besprochenen Problem.

8.2 Fehlerbetrachtungen

Den Betrachtungen werden die gleichen Überlegungen wie in Kapitel 7.2 zugrunde gelegt. Generell unterscheiden sie sich nicht voneinander. Das Finden der Minimalarmierung stellt ein Bemessungsproblem dar. Die Verhaltensregeln sind daher leicht zu ändern.

Sie lauten:

- a) Die Plastizitätsbedingungen sind erfüllt. Die erhaltene Lösung befindet sich auf der sicheren Seite.

- b) Die Plastizitätsbedingungen sind leicht verletzt. Die Armierung kann lokal oder über einem frei zu wählenden Bereich verstärkt werden, damit die Plastizitätsbedingungen überall erfüllt sind. Somit entsteht eine Lösung auf der sicheren Seite.
- c) Die Plastizitätsbedingungen sind stark verletzt. Es wäre möglich, die Armierung lokal zu verstärken. Dadurch würde man stark von der optimalen Lösung abkommen. Es ist empfohlen, an diesen Stellen die Plastizitätsbedingungen noch zu formulieren und das Problem nochmals durchzurechnen.

9. Zusammenstellung der berechneten Beispiele

In Tafel II werden alle durchgerechneten Beispiele aufgeführt. Zu den Berechnungen wurde die elektronische Rechenmaschine (IBM 1620) des Instituts für Baustatik und Massivbau benützt.

Bei den Beispielen Nr. 1 und 2 wurden die unteren Grenzwerte der Traglast der gleichen Platte bestimmt. Der Unterschied besteht einzig in verschiedenen Netzweiten. Aus dem Vergleich der beiden Resultate ist der Einfluß der Netzweite ersichtlich. In diesem Falle beträgt der Unterschied etwa 7%.

Unter Beispiel Nr. 3 findet man einen unteren Grenzwert der Traglast einer Quadratplatte mit unten und oben in x - und y -Richtung konstanter

Armierung. Die Traglast läßt sich für dieses Beispiel genau angeben. Sie beträgt $\frac{24 M_p}{l^2}$. Der Unterschied zum gefundenen unteren Grenzwert beträgt etwa 5%.

In Beispiel Nr. 4 ist die eingespannte Quadratplatte behandelt. Johansen fand für diese Platte einen oberen Grenzwert der Traglast von $\frac{44 M_p}{l^2}$. Von R. H. Wood [6] wurde erstmals eine Bruchlinienkonfiguration gezeigt, die einen Wert von $\frac{37,7 M_p}{l^2}$ ergibt.

In diesem Beispiel wurde ein unterer Grenzwert der Traglast von $\frac{37,4 M_p}{l^2}$ gefunden. Der obere Grenzwert von Johansen weicht um etwa 18% auf die unsichere Seite von den beiden anderen Werten ab.

Der untere Grenzwert der Traglast von Beispiel Nr. 2 ergibt genau die Hälfte desjenigen von Beispiel Nr. 4. Johansen hat einen Grenzwert der Traglast für die Platte Nr. 2 mit $\frac{22 M_p}{l^2}$ angegeben. Das ist ebenfalls die Hälfte desjenigen von Nr. 4. Es erscheint wahrscheinlich, daß die Traglast beim Beispiel Nr. 2 wirklich die Hälfte derjenigen von Beispiel Nr. 4 ist. Die Abweichung des oberen vom unteren Grenzwert beträgt auch hier 18%.

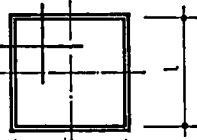
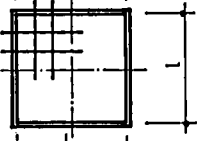
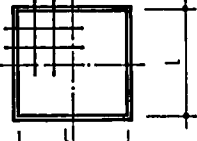
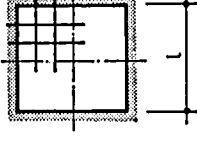
Der Unterschied zwischen dem unteren Grenzwert der Traglast von Beispiel Nr. 5 und dem oberen, welcher mit der Bruchlinientheorie berechnet wurde, beträgt etwa 23%.

Die Platte in Beispiel Nr. 6 verhält sich bei Erreichen der Traglast genau gleich wie ein Plattenstreifen, der längs den Säulenachsen aufgelagert ist.

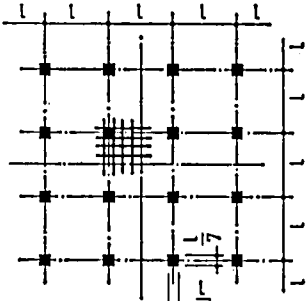
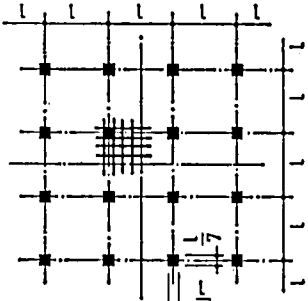
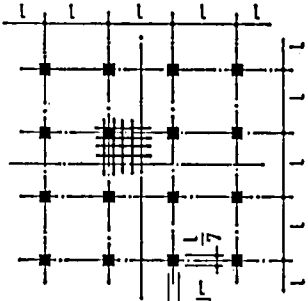
Tafel II

Zusammenstellung der durchgerechneten Beispiele

a) Bestimmung der Bruchlast bei gegebener Armierung

Nr.	Plattenart und Netzeinteilung	Belastungsart	Verlauf von M_p , Armierungsanordnung		Unterer Grenzwert der Traglast
			unten	oben	
1		Gleichmäßig verteilte Belastung	$P_y = M_p$ $P_x = M_p$	$N_x = 0$ $N_y = 0$	$\frac{17,45 M_p}{l^2}$
2		Gleichmäßig verteilte Belastung	$P_y = M_p$ $P_x = M_p$	$N_x = 0$ $N_y = 0$	$\frac{18,7 M_p}{l^2}$
3		Gleichmäßig verteilte Belastung	$P_y = M_p$ $P_x = M_p$	$N_x = M_p$ $N_y = M_p$	$\frac{22,65 M_p}{l^2}$
4		Gleichmäßig verteilte Belastung	$P_y = M_p$ $P_x = M_p$	$N_x = M_p$ $N_y = M_p$	$\frac{37,4 M_p}{l^2}$

Nr.	Plattenart und Netzeinteilung	Belastungsart	Verlauf von M_p , Armierungsanordnung		Unterer Grenzwert der Traglast
			unten	oben	
5			$P_y = M_p$ $P_x = M_p$	$N_x = M_p$ $N_y = M_p$	$\frac{120 M_p}{l^2}$ oder $Q = 13,3 M_p$
6		Gleichmäßig verteilte Belastung	$P_y = M_p$ $P_x = M_p$	$N_x = M_p$ $N_y = M_p$	$\frac{10 M_p}{l^2}$
7		Gleichmäßig verteilte Belastung	$P_y = M_p$ $P_x = 2M_p$	$N_x = M_p$ $N_y = M_p$	$\frac{16,3 M_p}{l^2}$
8		Gleichmäßig verteilte Belastung	$P_y = M_p$ $P_x = M_p$	$N_x = 0$ $N_y = 0$	$\frac{6,26 M_p}{l^2}$





Nr.	Plattenart und Netzeinteilung	Belastungsart	Verlauf von M_p , Armierungsanordnung		Unterer Grenzwert der Traglast
			unten	oben	
9		Gleichmäßig verteilte Belastung	$P_y = M_p$ $P_x = M_p$	$N_x = M_p$ $N_y = M_p$	$\frac{13,0 M_p}{l^2}$
10		Gleichmäßig verteilte Belastung	$P_y = M_p$ $P_x = M_p$	$N_x = 2M_p$ $N_y = 2M_p$	$\frac{19,5 M_p}{l^2}$
11		Gleichmäßig verteilte Belastung	$P_x = M_p$ $P_y = M_p$	$N_x = 0$ $N_y = 0$	$\frac{6,5 M_p}{l^2}$

b) Bestimmung der minimalen Armierung bei gegebener Belastung


Nr.	Plattenart und Netzeinteilung	Belastungsart	Verlauf von M_p , Armierungsanordnung		Unterer Grenzwert der Traglast
			unten	oben	
12		Gleichmäßig verteilte Belastung	$P_x = P_y = \infty 0$		p
			$N^F = \frac{pl^2}{43,5} ; N^{St} = \frac{pl^2}{4,65}$		

Legende:

Randbedingungen:

-  Freier Rand
-  Frei drehbar gelagerter Rand
-  Eingespannter Rand
-  Säule

Belastungsart:

-  Gleichmäßig verteilte Belastung p
über schraffiertem Bereich

Durch Vergleich der Beispiele 9, 10 und 11 sieht man, daß bei einer Armierung, bei der $P_x = P_y = P$ und $N_x = N_y = N$ sind, die Traglast proportional $(P + N)$ ist.

In Beispiel Nr. 12 wurde bei gegebener Anordnung der Armierung die Größe der minimalen Armierung gesucht. In einem praktischen Fall würde man noch die zusätzliche Bedingung stellen, daß die untere Armierung eine bestimmte Grenze nicht unterschreiten darf.

Aus der Zusammenfassung dieser Beispiele geht hervor, daß die Bruchlinientheorie zu Resultaten führen kann, die stark auf der unsicheren Seite liegen.

10. Schlußbemerkungen

Die Bestimmung eines möglichst guten unteren Grenzwertes der Traglast für Platten und die Bestimmung der optimalen Armierung für eine Platte bei gegebener Belastung wurde durch Lösung folgender Teilaufgaben auf ein lineares Programm zurückgeführt.

1. Aufstellen der Plastizitätsbedingungen als Funktion der plastischen Momente $(P_x, N_x, N_{xy}, P_y, N_y, P_{xy})$ und der Schnittkräfte (m_x, m_y, m_{xy}) .
2. Näherung der Plastizitätsbedingungen durch lineare Funktionen.

3. Vereinfachung einer Platte auf ein endlichfach statisch unbestimmtes System.
4. Erfüllen der Plastizitätsbedingungen nur an einzelnen Punkten, so daß über dem ganzen Plattenbereich die Plastizitätsbedingungen nicht verletzt werden.

Bei komplizierten Plattenformen (keine Symmetrie) steigt der Rechenaufwand zur Lösung des linearen Programms sehr schnell an, und daher kann nicht auf die Hilfe von elektronischen Rechenmaschinen verzichtet werden. Es ist wünschenswert, das Aufstellen der Matrizen ebenfalls durch die Maschine ausführen zu lassen.

Bei dieser Methode erhält man immer untere Grenzwerte der Traglast. Wird das Problem stark vereinfacht, z.B. größere Netzweiten gewählt, liegen die Resultate weit von der Traglast entfernt, aber sie sind immer noch auf der sicheren Seite.

Bei Kenntnis der Plastizitätsbedingungen und unter der Voraussetzung, daß die Plastizitätstheorie Gültigkeit hat, ist diese Methode auf jedes beliebige Tragwerk anwendbar. Im besonderen kann sie auch auf Stabtragwerke angewendet werden.

11. Anhang

11.1 *Einschreiben und Umschreiben der Momentenfläche*

Anstelle der Näherung des Momentenverlaufs mit nur einer Ebene über jedem Teilbereich kann man den Momentenverlauf mit Ebenen ein- und umschreiben.

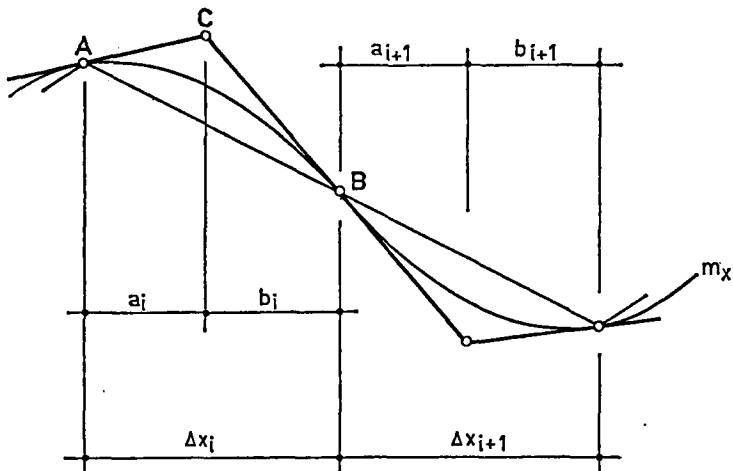


Abb. 11.1 Ein- und Umschreibung der Momentenfläche durch Ebenen, dargestellt in einem Schnitt parallel der x -Achse

In Abb. 11.1 ist in einem Schnitt parallel der x -Achse die Ein- und Umschreibung der Momente m_x dargestellt. Innerhalb eines Teilbereiches ist m_x in der x -Richtung eine Parabel. In der y -Richtung ist m_x konstant. Der Verlauf der Momente m_x wird daher mit Ebenen, die in der y -Richtung auch konstant sind, eingegabelt. Durch die Angaben in Abb. 11.1 ist der Verlauf der Momente und der Ein- und Umschreibung über einem ganzen Teilbereich eindeutig bestimmt.

Im Teilbereich i liegt der Momentenverlauf von m_x innerhalb ABC . Durch AC und BC verlaufen die Tangentialebenen der m_x -Flächen in A bzw. B . Diese beiden Ebenen schneiden sich in der Intervallmitte.

$a_i = b_i = \frac{\Delta x_i}{2}$ ist eine Invariante und daher nicht von der Belastung ab-

hängig. Dies führt zu der wichtigen Tatsache, daß durch Bestimmung der Ordinaten für A , B und C an den Rändern der Teilbereiche bzw. in der Intervallmitte die drei Ebenen, die den Verlauf von m_x ein- und umschreiben, eindeutig bestimmt sind.

Wenn man für alle Ebenen die Plastizitätsbedingungen erfüllt, so sind an keinem Ort, auch nicht zwischen den Netzpunkten, die Plastizitätsbedingungen verletzt. Bei relativ großen Netzweiten würde man damit für die Lösungen zu sichere Werte erhalten. Nicht zu übersehen ist auch die Tatsache, daß bei dieser Lösung an doppelt sovielen Punkten die Plastizitätsbedingungen erfüllt werden müssen, d.h. bei gleicher Netzweite erhält man doppelt so viele Ungleichungen für das lineare Programm. In normalen Fällen wird man durch Verkleinern der Netzweite mehr erreichen als mit Hilfe einer Ein- und Umschreibung, wenn beide Fälle den gleichen Rechenaufwand aufweisen sollen.

11.2 Lösung eines linearen Programms mit Hilfe eines speziellen Maschinenprogramms

Die Mehrheit der vorhandenen Maschinenprogramme benützen die Vorschrift, daß alle Variablen positiv sein müssen. Dies kommt daher, daß die Programme ausschließlich für «Operation Research» geschrieben und gebraucht werden. Das vorliegende Programm besitzt jedoch Variable, die positiv sein müssen und solche, die positiv oder negativ sein können. Die Variablen, welche positiv oder negativ sein können, sind Belastungsgrößen wie p_x , p_y und p_{xy} und die überzähligen Größen.

Mit den Bedingungen $-N_x^i - P_x^i \leq \frac{p_{x,i} \Delta x_i^2}{8}$ beziehungsweise $-N_y^i - P_y^i \leq \frac{p_{y,i} \Delta y_i^2}{8}$, die innerhalb eines Intervalls auf alle Fälle Gültigkeit haben, kann man auch schreiben:

$$0 \leq p_{x,i} + (N_x^i + P_x^i) \frac{8}{\Delta x_i^2}$$

und

$$0 \leq p_{y,i} + (N_y^i + P_y^i) \frac{8}{\Delta y_i^2}$$

und durch die Substitution

$$p_{x,i} + (N_x^i + P_x^i) \frac{8}{\Delta x_i^2} = \bar{p}_{x,i}$$

und

$$p_{y,i} + (N_y^i + P_y^i) \frac{8}{\Delta y_i^2} = \bar{p}_{y,i}$$

lauten die Bedingungen

$$\begin{aligned} \bar{p}_{x,i} &\geq 0 \\ \bar{p}_{y,i} &\geq 0 \end{aligned}$$

Ein analoges Vorgehen ist auch bei den überzähligen Größen möglich.

Damit ist das Problem auf ein lineares Programm mit Variablen, die positiv sein müssen, zurückgeführt. Es sei noch bemerkt, daß alle Beispiele mit einem solchen Maschinenprogramm gelöst worden sind.

11.3 Genauigkeit bei der Lösung eines linearen Programms

Bei der Lösung von Beispielen hat sich gezeigt, daß manchmal durch Stellenverluste bei der Rechenmaschine die Resultate verfälscht werden. Daher sind auf alle Fälle nach der Berechnung des linearen Programms die Resultate in die Matrix einzusetzen und die Genauigkeit zu prüfen. Ist die Genauigkeit nicht zufriedenstellend, so wird immer durch eine geeignete Substitution von der Art $\bar{p}_{x,i} + \gamma p = \bar{p}_{x,i}$ die gewünschte Genauigkeit erreicht. γ stellt in diesem Falle den frei zu wählenden Faktor und p die Last über einem bestimmten Intervall dar. Der Faktor kann auch negativ sein, wenn dadurch im Resultat die p_x , p_y und p_{xy} nicht unnötig beschränkt werden. Im räumlichen Polyeder des linearen Programms bewirkt eine solche Substitution eine Verzerrung des Körpers, wodurch z.B. schleifende Schnitte in schärfere übergehen können.

Nomenklatur

Δ	Differenz zwischen m_{np} und P_{np}
Δx (Δy , Δz)	Netzweite
Δx_i (Δy_i , Δz_i)	Netzweite des Teilbereiches «i»
Φ	Krümmung
Φ_p	Bezugskrümmung
α_r	Winkel zwischen der x-Achse und der allgemeinen Armierungsrichtung «r»
β	Prismendruckfestigkeit von Beton
γ	Multiplikationsfaktor
ε	Dehnung
ε_s	Stahldehnung
ε_f	Stahldehnung an der Fließgrenze
ε_p	Stahldehnung an der Verfestigungsgrenze
ε_g	Gleichmaßdehnung
ηb	Innerer Hebelarm
$\eta_x^P b \left(\eta_y^P b, \eta_x^N b \right)$	Innerer Hebelarm eines senkrecht zur x-Achse plastifizierten Querschnittes (Fließen der unteren Armierung)
μ (μ_{min} , μ_{max})	Armierungsgehalt in Prozenten der Betonfläche
γb	Höhe der Druckzone
σ	Normalspannung
σ_f	Fließspannung
σ_x (σ_y , σ_z , σ_n , σ_φ)	Normalspannung in x-Richtung
$\sigma_{xy} = \tau_{xy}$ ($\sigma_{np} = \tau_{np}$)	Schubspannung «xy»
σ_1 (σ_2)	Hauptspannung in Richtung φ_1
φ	Winkel zwischen der x- und der n-Achse
$\overline{\varphi_r}$	Winkel zwischen der allgemeinen Armierungsrichtung «r» und der n-Achse
φ_1 (φ_2)	Hauptrichtung (Winkel)
D	Resultierende Druckkraft
D_x (D_y)	Resultierende Druckkraft in x-Richtung
F (φ)	Funktion von φ
F	Eisenquerschnitt
F_r	Querschnitt der Stahleinlagen, die in der allgemeinen Armierungsrichtung «r» liegen

F_x^P (F_x^N, F_y^P, F_y^N)	Querschnitt der unteren Armierung in x-Richtung
K_1 ($K_1 \div K_1$)	Integrationskonstante
M	Moment
M_i (M_1, M_2, \dots)	Stabmoment in Punkt «i»
M_p	Plastisches Moment
M_x	Moment am Grundsystem infolge der überzähligen Größe $X = 1$
M_o	Moment am Grundsystem infolge der äußeren Belastung gleich 1
$-N$	Negatives plastisches Moment
$-N_i$ ($-N_1, -N_2, \dots$)	Negatives plastisches Moment im Stabpunkt «i»
$-N_x$ ($-N_y, -N_n, -N_\varphi$)	Negatives plastisches Moment in x-Richtung
N_{xy}	Plastisches Drillungsmoment beim Fließen der oberen Armierung
$-N_x^i$ ($-N_y^i$)	Negatives plastisches Moment in x-Richtung im Plattenteilbereich «i»
$-N_x^a$ ($-N_x^b, -N_x^c, -N_x^d$) ($-N_y^a, -N_y^b, -N_y^c, -N_y^d$)	Negatives plastisches Moment in x-Richtung im Eckpunkt a (Abb. 8.1)
P	Positives plastisches Moment
P_i (P_1, P_2, \dots)	Positives plastisches Moment im Stabpunkt «i»
P_x (P_x, P_n, P)	Positives plastisches Moment in x-Richtung
P_{xy}	Plastisches Drillungsmoment beim Fließen der unteren Armierung
P_x^a (P_x^b, P_x^c, P_x^d) ($P_y^a, P_y^b, P_y^c, P_y^d$)	Positives plastisches Moment in x-Richtung im Eckpunkt a (Abb. 8.1)
Q	Einzellast
Q_p	Traglast
R_x (R_y)	Abkürzung für $\frac{P_x - m_x}{2}$
V	Volumen der Armierung
Z	Objektfunktion
Z_r^P	Zugkraft infolge Fließens der unteren Armierung in Richtung «r»

Z_x^N	(Z_y^N, Z_n^N, Z^N)	Zugkraft infolge Fließens der oberen Armierung in x-Richtung
Z_{xy}^P	(Z_n^P)	Zugkraftskomponente der fließenden unteren Armierungen parallel der Schnittebenen x und y
Z_1	(Z_1)	Zugkraft in der Haupttrichtung φ_1
a_0	$(a_1 \div a_2)$	Koeffizienten
a_{ik}		Koeffizienten des allgemeinen linearen Programms
b_i		Konstante des allgemeinen linearen Programms
c_1		Abkürzung für $\frac{1}{\eta}$
c_2		Abkürzung für $\frac{1}{\eta \sigma_f}$
c_3		Abkürzung für $\frac{1}{\eta b \sigma_f}$
e_x^P	(e_y^P, e_x^N, e_y^N)	Abkürzung für $\frac{1}{\eta_x b \sigma_f}$
e		Fehlerfunktion
f_1	$(f_1 \div f_2)$	Funktion
h		Statische Höhe
k_1	(k_1, k_2)	Konstante
l		Stablänge und Seitenlänge von Platten
m_x	(m_y, m_n, m_φ)	Plattenmoment in x-Richtung
m_{xy}	$(m_{n\varphi})$	Drillungsmoment (Platte)
m^{ia}		Moment im Eckpunkt a des Teilbereiches «i»
p		Äußere Belastung eines Teilbereiches
p_x	(p_y, p_{xy})	Teilbelastung für eine ideelle Platte, die nur Momente in x-Richtung aufnehmen kann
$p_{x,i}$	(p_y, i, p_{xy}, i)	Teilbelastung für eine ideelle Platte, die nur Momente in x-Richtung aufnehmen kann im Teilbereich «i»
$\overline{p_{x,i}}$	$(\overline{p_y}, i, \overline{p_{xy}}, i)$	Substitution von $\overline{p_{x,i}}$
$\overline{\overline{p_{x,i}}}$		Substitution von $\overline{\overline{p_{x,i}}}$
q_x	(q_y)	Querkraft der Platte
s		Stabachse
y_i	(y_1, y_2, \dots)	Abhängige Variable eines linearen Programms

Literatur

- [1] Johansen, K. W.: «Bruchmomente der kreuzweise bewehrten Platten», Abh. J.V.B.H. 1. (1932).
- [2] Drucker, D. C., Greenberg, H. J., und Prager, W.: «The Safety Factor of an Elastic-Plastic Body in Plane Strain». *Journal of Appl. Mech.* 18 (1951).
- [3] Prager, W., und Hodge Jr., P. G.: «Theory of Perfectly Plastic Solids». John Wiley & Sons, New York. Ins Deutsche übertragen von Chmelka, F.: «Plastizitäts-Theorie». Springer-Verlag, Wien (1954).
- [4] Drucker, D. C., Prager, W., und Greenberg, H. J.: «Extended Limit Design Theorems for Continuous Media». *Quart. Appl. Math.* 9 (1952).
- [5] Hill, R.: «On the State of Stress in a Plastic-Rigid Body at the Yield Point». *Phil. Mag.* 42 (1951).
- [6] Wood, R. H.: «Elastic and Plastic Design of Slabs and Plates». Thames and Hudson, London (1961).
- [7] Commentary on «Plastic Design in Steel». Welding Research Council and the America Society of Civil Engineers (1961).
- [8] Prager, W.: «Probleme der Plastizitätstheorie». Birkhäuser-Verlag, Basel und Stuttgart (1955).
- [9] Thürlimann, B., und Ziegler, H.: «Plastische Berechnungsmethoden». Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich (1963).
- [10] Stiefel, E.: «Einführung in die numerische Mathematik». Teubner-Verlagsgesellschaft, Stuttgart (1961).
- [11] Krelle, W., und Künzi, P.: «Lineare Programmierung». Verlag Industrielle Organisation, Zürich (1958).
- [12] Girkmann, K.: «Flächentragwerke». Springer-Verlag, Wien (1956).

Lebenslauf

Am 22. Dezember 1933 wurde ich in Zürich-Höngg geboren, wo ich die Primar- und Sekundarschule besuchte. Nach Abschluß meiner Lehre als Eisenbetonzeichner im Jahre 1953 bereitete ich mich bei Herrn Dr. V. Junod auf die Aufnahmeprüfung an die ETH vor, die ich 1954 bestand. Mein Studium als Bauingenieur an der Eidgenössischen Technischen Hochschule schloß ich 1958 mit dem Diplom ab. Nach einem Jahr praktischer Tätigkeit in einem Ingenieurbüro bin ich seit 1959 als Assistent und wissenschaftlicher Mitarbeiter von Herrn Prof. Dr. B. Thürliemann am Lehrstuhl und Institut für Baustatik und Massivbau tätig.