Prom. Nr. 3139

# HOMOTOPY THEORY IN GENERAL CATEGORIES

Von der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN ZÜRICH

zur Erlangung
der Würde eines Doktors der Mathematik
genehmigte

PROMOTIONSARBEIT

Vorgelegt von

**Peter Jost Huber**
Dipl. Math. E. T. H.

von

Besenbüren (A. G.)

Referent: Herr Prof. Dr. B. Eckmann
Korreferent: Herr Prof. Dr. H. Hopf

Brühlsche Universitätsdruckerei Gießen
1961

## Zusammenfassung in deutscher Sprache

Die Homotopiegruppen der topologischen Räume sind von ECKMANN-HILTON zu Gruppen $\Pi_n(X, Y)$ verallgemeinert worden, die von zwei Räumen $X$, $Y$ abhängen, und welche die Homotopie- und Cohomologiegruppen (für beliebige Koeffizientenbereiche), nebst den entsprechenden exakten Sequenzen, als Spezialfälle enthalten. Die klassische Homotopie und Cohomologie sind zueinander dual im Sinne einer einfachen (heuristischen) Dualität, welche im Vertauschen von $X$ und $Y$ besteht.

Eine analoge Homotopietheorie, samt einer dualen, existiert in der Kategorie der Moduln über einem Ring — oder allgemeiner, in jeder abelschen Kategorie mit genügend vielen injektiven und projektiven Objekten (vgl. ECKMANN [1]); hier ist die Dualität nicht nur heuristisch, wie in der Kategorie der Räume, sondern gilt streng: für jeden beweisbaren Satz ist automatisch auch der duale Satz beweisbar. In der fraglichen Analogie entspricht z. B. die Einbettung eines topologischen Raumes $X$ in den Kegel $CX$ der Einbettung eines Moduls $X$ in einen injektiven Modul $\overline{X}$; die topologische Einhängung $\Sigma X = CX/X$ entspricht der algebraischen $\Sigma X = \overline{X}/X$; und in beiden Fällen können die Homotopiegruppen mit Hilfe iterierter Einhängungen definiert werden.

Diese beiden heuristischen Prinzipien

a) die Dualität in der Kategorie der Räume,

b) die Analogie zwischen Räumen und Moduln,

haben entscheidenden Einfluß auf die Entwicklung der Eckmann-Hiltonschen Homotopietheorie gehabt. In dieser Arbeit wird nun gezeigt, daß die beiden Prinzipien theoretisch begründet werden können.

Zu diesem Zweck wird eine Homotopietheorie im Rahmen allgemeiner Kategorien entwickelt, welche die Homotopietheorien der Räume und der Moduln als Spezialfälle enthält, ebenso wie die Homotopietheorie der Abbildungen von Räumen, usw. Außerdem liefert *ein allgemeines Dualitätsprinzip* in allen Fällen, wo diese Homotopietheorie definiert werden kann, eine Dualität im strengen Sinn. Dadurch wird nicht nur ein präziser Begriff der Analogie zwischen den Homotopietheorien der Räume und der Moduln gewonnen, sondern es ist auch möglich, gewisse Beweise wesentlich zu vereinfachen. Zum Beispiel folgt die Exaktheit der Homotopiesequenzen in den Kategorien der Moduln, der Räume, der Paare von Moduln, der Paare von Räumen, der Paare von Paaren, usw., *aus ein- und demselben Beweis, und es ist hervorzuheben,* daß dieser eine Beweis, vermöge der Dualität, beide Seiten des Bildes liefert, also z. B. in der Kategorie der Räume die Exaktheit sowohl der Homotopie- als auch der Cohomologiesequenz.

Unser wichtigstes Werkzeug ist dabei die semisimpliziale Standardkonstruktion, welche ursprünglich von R. GODEMENT [4] erfunden und zur Erzeugung der Garbencohomologie verwendet worden ist. Da auch die Hochschildsche Homologietheorie der assoziativen Algebren (vgl. [4]) und die Theorie der derivierten Funktoren in den Kategorien der Moduln mit Hilfe von Standardkonstruktionen erhalten werden können, erweisen sich diese als eines der mächtigsten Hilfsmittel der homologischen und homotopischen Algebra.

Die Standardkonstruktionen können als eine Verallgemeinerung der topologischen Wegeraum- und Kegelkonstruktionen aufgefaßt werden. Zum Beispiel ist das Tripel $\{E, k, p\}$, bestehend aus dem Wegeraumfunktor $E$ (der jedem Raum $Y$ den Raum $EY$ der im Basispunkt von $Y$ beginnenden Wege zuordnet), aus der natürlichen Faserabbildung $k(Y): EY \to Y$ (die jedem Weg seinen Endpunkt zuordnet) und aus einer sonst kaum beachteten natürlichen Abbildung $p(Y): EY \to EEY$, eine Standardkonstruktion in der Kategorie der topologischen Räume mit Basispunkt. Dual bilden der Kegelfunktor $C$ (der jedem Raum $X$ den Kegel $CX$ über $X$ zuordnet), die natürliche Einbettung $k(X): X \to CX$ von $X$ in die Grundfläche des Kegels und eine gewisse Abbildung $p(X): CCX \to CX$ eine duale Standardkonstruktion in derselben Kategorie.

Abschnitt 1 dient zur Einführung der Terminologie, Abschnitt 2 enthält die Definition der Standardkonstruktion, und in Abschnitt 3 wird der zu einer Standardkonstruktion gehörende semisimpliziale Komplex eingeführt, dessen Kansche Homotopiegruppen die Eckmann-Hiltonschen Gruppen verallgemeinern werden. In Abschnitt 5 werden die Homotopiegruppen in der Kategorie der Moduln behandelt. Die sogenannten projektiven, resp. injektiven Homotopiegruppen werden mit Hilfe von zwei verschiedenen Standardkonstruktionen erzeugt.

Die erste, $\{C, k, p\}$, besteht aus dem Funktor $C$, der jedem Modul $Y$ den freien Modul $CY$ über der Menge $Y$ zuordnet; $k(Y)$ ist die natürliche Projektion von $CY$ auf $Y$, die jedem Basiselement von $CY$ das gleichbezeichnete Element von $Y$ zuordnet, während $p(Y)$ jedem Basiselement von $CY$ das gleichbezeichnete Basiselement von $CCY$ zuordnet. Die zweite, $\{\bar{C}, \bar{k}, \bar{p}\}$, hängt eng mit der ersten zusammen; der Funktor $\bar{C}$ ordnet jedem Modul $X$ einen injektiven Modul $\bar{C}X$ zu, während $\bar{k}(X): X \to \bar{C}X$ eine natürliche Einbettung ist. Es wird gezeigt, daß die Kanschen Homotopiegruppen der entsprechenden semisimplizialen Komplexe gerade die Eckmann-Hiltonschen projektiven, resp. injektiven Homotopiegruppen sind. Zur Vereinfachung der entsprechenden Beweise wurden Teile davon in den allgemein-kategorietheoretischen Rahmen vorverlegt (Abschnitte 3 und 4). Abschnitt 6 leistet das entsprechende für die Homotopiegruppen der Räume; als Standardkonstruktionen werden die Kegel- und Wegeraumkonstruktionen benützt. Abschnitt 7 enthält unter anderem eine interessante Verallgemeinerung des singulären Komplexes: ebenso, wie man die Hurewiczschen Homotopiegruppen $\pi_n(Y)$ eines Raumes $Y$ auch als Kansche Homotopiegruppen des singulären Komplexes von $Y$ deuten kann, können die Eckmann-Hiltonschen Gruppen

$\Pi_n(X, Y)$ auch als Kansche Homotopiegruppen eines verallgemeinerten singulären Komplexes von $Y$ aufgefaßt werden, der in den gewöhnlichen singulären Komplex übergeht, falls $X$ die Nullsphäre ist. In Abschnitt 8 wird die Exaktheit der Homotopiesequenz für allgemeine Kategorien bewiesen. Abschnitt 9 enthält eine Untersuchung der Faserungen und Cofaserungen; es wird gezeigt, daß man bereits im Rahmen der allgemeinen Kategorien die Analoga der Einhängung $\Sigma X$ (d. h. der Cofaser von $k(X): X \to CX$) und des Schleifenraumes $\Omega Y$ (d. h. der Faser von $k(Y): EY \to Y$) definieren und ihre Haupteigenschaften beweisen kann.