

DISS. ETH NO. 22018

NUMÉRAIRE-INDEPENDENT MODELLING
OF FINANCIAL MARKETS

A dissertation submitted to
ETH ZURICH

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by

MARTIN PETER GERHARD HERDEGEN

MSc in Mathematical Sciences
University of Bath, United Kingdom
born April 10, 1986
citizen of Germany

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Martin Schweizer	examiner
Prof. Dr. Josef Teichmann	co-examiner
Prof. Dr. Konstantinos Kardaras	co-examiner

2014

Abstract

In this thesis, we develop a new framework for modelling financial markets which does not depend on an ex-ante choice of a currency unit and a numéraire. In this framework, we then study central concepts of mathematical finance like (no-)arbitrage or financial bubbles. The motivation for doing this is to overcome several deficiencies of the standard modelling approach in mathematical finance, first and foremost the initial choice of currency unit and numéraire, which is not justified from an economic point of view. In addition, our framework can be seen as a great unifying paradigm encompassing various other recent approaches to modelling financial markets and studying (no-)arbitrage.

Numéraire-independent modelling starts by describing a financial market not by a single process but by an equivalence class of processes. As a consequence, familiar concepts such as admissible trading strategies, contingent claims or superreplication prices have to be revisited and redefined in a numéraire-independent way. In particular—even though this sounds absurd—we have to give a numéraire-independent definition of the key notion of “numéraire” itself.

After this groundwork has been finished, we translate in our framework the catchphrase that arbitrage means “making a profit out of nothing without risk” into a rigorous mathematical definition as literally as possible by saying that a market satisfies *numéraire-independent no-arbitrage* (NINA) if and only if there does not exist a nonzero contingent claim (“the profit”) which can be superreplicated for free (“out of nothing”). We study this notion in detail and compare it to classic no-arbitrage concepts from the literature.

If a market fails NINA, a natural question is whether there is a stopping time σ such that strictly before σ , we can never “make a profit out of nothing without risk”, and immediately after σ , we always can. Another interesting question in the same setup is whether it is possible to find a probability measure \mathbb{Q} that is absolutely continuous to the physical measure \mathbb{P} such that the market satisfies NINA *under* \mathbb{Q} . We answer both questions in the affirmative and in full generality.

On the other hand, if a market satisfies NINA, an important mathematical problem is to find a dual characterisation of that property. We show that the corresponding dual objects are *pairs* (η, \mathbb{Q}) of numéraire strategies and equivalent σ -martingale measures. Of course, we also compare this numéraire-independent version of the fundamental theorem of asset pricing to the classic result by Delbaen and Schachermayer.

Last but not least, we propose a numéraire-independent approach to modelling financial bubbles. Unlike most papers in the recent literature we do not define

bubbles by a dual object, usually a *strict* local martingale measure, but start from primary concepts that are economically motivated. To this end, we introduce the notions of static and dynamic viability and efficiency of a market and derive their dual characterisations. In particular, we show that strict local martingale measures arise naturally in the context of modelling financial bubbles.

Kurzfassung

In dieser Arbeit entwickeln wir einen neuen Modellierungsansatz für Finanzmärkte, welcher nicht von der Vorab-Wahl einer Währungseinheit und eines Numéraire abhängt. Innerhalb dieses Ansatzes studieren wir dann zentrale Konzepte der Finanzmathematik wie Arbitrage(freiheit) oder Spekulationsblasen. Die Motivation dafür ist, mehrere Schwächen des Standardmodellierungsansatzes der Finanzmathematik zu überwinden, vor allem die Vorab-Wahl von Währungseinheit und Numéraire, welche aus ökonomischer Sicht nicht gerechtfertigt ist. Unseren Modellierungsansatz kann man zudem als ein grosses einheitliches Paradigma betrachten, in das sich zahlreiche andere neuere Modellierungsansätze für Finanzmärkte und Arbitrage(freiheit) einordnen lassen.

Numéraire-unabhängige Modellierung beginnt damit, dass man Finanzmärkte nicht durch einen einzigen Prozess, sondern eine Äquivalenzklasse von Prozessen beschreibt. Folglich muss man bekannte Konzepte wie zulässige Handelsstrategien, Eventualforderungen oder Superreplikationspreise überdenken und in Numéraire-unabhängiger Weise neu definieren. Insbesondere – auch wenn das absurd klingt – muss man den Schlüsselbegriff „Numéraire“ selbst Numéraire-unabhängig definieren.

Nach Abschluss dieser Vorarbeit, übersetzen wir innerhalb unseres Modellierungsansatzes den Allgemeinplatz, das Arbitrage bedeutet „aus Nichts einen Gewinn ohne Risiko zu erzielen“, so wörtlich wie möglich in eine präzise mathematische Definition, indem wir sagen, dass ein Markt genau dann *Numéraire-unabhängige Arbitragefreiheit* (NINA¹) erfüllt, wenn es keine Eventualforderung („den Gewinn“) gibt, der kostenlos („aus nichts“) superrepliziert werden kann. Wir studieren dann diesen Begriff sorgfältig und vergleichen ihn mit klassischen Konzepten der Arbitrage(freiheit) aus der Literatur.

Wenn ein Markt NINA nicht erfüllt, stellt sich ganz natürlich die Frage, ob eine Stoppzeit σ existiert, so dass man strikt vor σ in keinem Fall „aus Nichts einen Gewinn ohne Risiko erzielen“ kann, aber unmittelbar nach σ dies immer kann. Eine weitere interessante Frage unter der gleichen Voraussetzung ist, ob es möglich ist, ein Wahrscheinlichkeitsmass \mathbb{Q} zu finden, welches absolut stetig zum physischen Mass \mathbb{P} ist, so dass der Markt NINA *unter* \mathbb{Q} erfüllt. Wir geben auf beide Fragen eine positive Antwort und dies in voller Allgemeinheit.

Im anderen Fall, dass der Markt NINA erfüllt, besteht ein wichtiges mathematisches Problem darin, eine duale Charakterisierung dieser Eigenschaft zu finden.

¹Dies ist die englische Abkürzung des Begriffs, die wir im Folgenden aus Konsistenzgründen verwenden.

Wir zeigen, dass die geeigneten dualen Objekte *Paare* (η, \mathbb{Q}) von Numéraire-Strategien und äquivalenten σ -Martingalmassen sind. Selbstverständlich vergleichen wir diese Numéraire-unabhängige Version des Fundamentalsatzes der Anlagenbewertung mit dem klassischen Resultat von Delbaen und Schachermayer.

Zum Schluss schlagen wir einen Numéraire-unabhängigen Modellierungsansatz für Spekulationsblasen vor. Anders als die meisten neueren Artikel in der Literatur definieren wir dabei eine Spekulationsblase nicht mittels eines dualen Objekts, normalerweise eines *strikt* lokalen Martingalmasses, sondern starten von primären Konzepten, die ökonomisch motiviert sind. Dazu führen wir die Begriffe der statischen und dynamischen Viabilität und Effizienz ein und leiten deren duale Charakterisierung her. Insbesondere zeigen wir, dass strikt lokale Martingalmasse auf ganz natürliche Weise im Zusammenhang mit Spekulationsblasen auftauchen.