

# Synchronization of Nonsmooth Mechanical Systems with Impulsive Motion

A dissertation submitted to

ETH Zurich

for the degree of  
Doctor of Sciences

presented by

**Michael Baumann**

MSc ME, ETH Zurich  
born March 29, 1988  
citizen of Zurich

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Jürg Dual, examiner  
Prof. Dr. ir. habil. Remco I. Leine, co-examiner  
Prof. Dr. ir. Nathan van de Wouw, co-examiner

# Abstract

---

In this thesis, theoretical results are developed which ensure synchronization of nonsmooth systems with impulsive motion. Special focus lies on mechanical systems subjected to unilateral constraints. The time evolution of the states of these types of systems is generally discontinuous in time such as velocity jumps in the case of impacts due to collisions. Nonsmooth systems are capable to describe a rich class of systems in a vast variety of fields of application, but their analysis is much more involved than in the smooth case. Many classical results from nonlinear dynamics rely on certain smoothness conditions and can therefore not be applied to nonsmooth systems. The lack of smoothness poses a big challenge to adapt and generalize existing results, however, it also opens up new possibilities and enables conceptually new approaches.

Synchronization is the time conformity of processes or events of multiple systems. There exist various types and forms of synchronization. Here, the focus lies on full-state synchronization of two identical systems. The possible coupling between the systems can be either bidirectional or unidirectional. In the latter case, a master-slave setting is used where the master system is dominant and independent of the slave system.

Based on master-slave synchronization, state observers for Lagrangian systems subjected to perfect unilateral constraints are presented. Only the information of the impact time instants is used and no other sensor information is necessary. The state observers are designed to be attractively incrementally stable for which the use of switched unilateral constraints is key. The property of attractive incremental stability guarantees that the solution of the observers converge to the solution in synchrony with the observed system for any initial condition. Although the available sensor information is very limited, the presented observers replicate the full state of the observed system after a brief synchronization phase.

Considering the property of incremental stability of a unilaterally constrained mechanical system, the choice of the force and impact laws describing the unilateral constraints are essential. In this regard, the central property of these constitutive laws is maximal monotonicity, which is a stronger condition than dissipativity. Many commonly used impact laws for hard unilateral constraints such as the generalized Poisson's or Newton's impact law are maximal monotone under some mild assumptions. This and related properties for general as well as some specific impact laws are analyzed in the framework of variational analysis.

In the case of unidirectional synchronization, the impacts of the slave system are chosen to occur simultaneously with those of the master system. Coinciding impact time instants cannot be ensured for synchronization problems with bidirectional coupling, even

if the compared solutions are arbitrarily ‘close’ to each other. This is a major complication in the stability analysis of those type of systems and demands a careful choice of the distance function when considering stability in the sense of Lyapunov. An intuitively correct comparison of discontinuous solutions is possible using the distance function induced by the quotient metric based on the impact map. This distance function evaluated along jumping solutions is continuous in time and it is therefore suitable for Lyapunov techniques. Based on this generic distance function, the synchronization problem is defined for mutually coupled mechanical systems with discontinuous solutions and sufficient conditions for controlled and uncontrolled synchronization are derived.

Chaos synchronization is of particular interest as it combines the complexity of chaotic behavior with the regularity of synchronized motion. Two diffusely coupled smooth dynamical systems achieve synchronization if the coupling gain is large enough. Moreover, the critical coupling gain corresponds to the maximal Lyapunov exponent, which captures the maximal divergence rate of nearby trajectories. This relation arises from the competitive behavior of separation due to trajectory instability and the convergence due to the coupling. Here, the result is generalized for the class of nonsmooth systems written as measure differential inclusions. The relation can directly be applied to estimate the maximal Lyapunov exponent using chaos synchronization.

The main contributions of this thesis are (a) a profound understanding of inequality impact laws due to variational analysis including the application of state observers using only impact time instants, (b) controlled and uncontrolled synchronization of mutually coupled impacting mechanical systems also in the presence of accumulation points and (c) an extension of chaos theory from a nonsmooth perspective.

# Zusammenfassung

---

Diese Dissertation ist eine theoretische Abhandlung über die Synchronisation von nicht-glatten Systemen mit impulsiver Bewegung. Insbesondere gilt das Interesse mechanischen Systemen mit unilateralen Kontakten. Die zeitliche Entwicklung der Zustände solcher Systeme kann Sprünge aufweisen, wie zum Beispiel Geschwindigkeitssprünge aufgrund von Stößen im Falle von Kollisionen. Mit nichtglatten Systemen kann man eine umfangreiche Klasse von Systemen in unzähligen Anwendungsbereichen beschreiben. Deren Analyse ist jedoch deutlich komplizierter als im glatten Falle. Viele klassische Resultate der nichtlinearen Dynamik setzen gewisse Stetigkeitsanforderungen voraus und können aus diesem Grund nicht für nichtglatte Systeme verwendet werden. Die fehlende Stetigkeit stellt eine grosse Herausforderung dar, wenn bestehende Resultate angepasst oder verallgemeinert werden sollen. Allerdings eröffnet sie auch neue Möglichkeiten und erlaubt konzeptionell neue Ansätze.

Synchronisation ist die zeitliche Übereinstimmung von Prozessen und Ereignissen von mehreren Systemen. Es existieren diverse Typen und Formen von Synchronisation. Diese Abhandlung konzentriert sich auf die vollständige Synchronisation von zwei identischen Systemen. Eine mögliche Kopplung zwischen den Systemen ist entweder unidirektional oder bidirektional. Bei unidirektionaler Kopplung spricht man von einer Master/Slave-Anordnung, bei welcher das dominante Master-System unabhängig vom Slave-System ist.

Basierend auf Master/Slave-Synchronisation werden in dieser Arbeit Zustandsbeobachter für Lagrange-Systeme mit perfekten unilaterale Kontakten präsentiert. Nur die Information der Stosszeitpunkte wird verwendet und es werden keine anderen Messgrößen benötigt. Die Zustandsbeobachter werden so entworfen, dass sie attraktiv inkrementell stabil sind. Dafür ist die Verwendung von geschalteten unilaterale Kontakten entscheidend. Die Eigenschaft der attraktiven inkrementellen Stabilität garantiert, dass die Lösungen der Beobachter für alle Anfangszustände zur Lösung des beobachteten Systems konvergiert. Trotz der sehr limitierten Sensorinformation ist es den vorgestellten Zustandsbeobachtern möglich, den vollen Zustand des beobachteten Systems nach einer kurzen Synchronisationsphase zu rekonstruieren.

Für die Eigenschaft der inkrementellen Stabilität von einseitig gebundenen mechanischen Systemen ist die Wahl der Kraft- und Stossgesetze, welche die einseitigen Kontakte beschreiben, essentiell. In dieser Hinsicht ist die zentrale Eigenschaft dieser konstitutiven Gesetze die maximal-Monotonie, welche eine stärkere Bedingung als Dissipativität darstellt. Viele häufig gebrauchte Stossgesetze für harte unilaterale Bindungen, wie die generalisierten Stossgesetze von Poisson oder Newton, sind unter einigen schwachen Annahmen maximal-monoton. Diese und verwandte Eigenschaften von allgemeinen wie auch

von einigen bestimmten Stossgesetzen sind mithilfe von Methoden der „variational analysis“ untersucht.

Im Falle der unidirektionalen Synchronisation können die Stösse des Slave-Systems so gewählt werden, dass sie gleichzeitig mit denjenigen des Master-Systems auftreten. Übereinstimmende Stosszeitpunkte können in Synchronisationsproblemen mit bidirektionaler Kopplung nicht garantiert werden, auch dann nicht, wenn die verglichenen Lösungen beliebig „nahe“ beieinander sind. Dies ist eine bedeutende Erschwerung für die Stabilitätsanalyse und erfordert eine besondere Sorgfalt bei der Wahl der Distanzfunktion für die Betrachtung von Stabilität im Sinne von Lyapunov. Ein intuitiv-richtiger Vergleich von unstetigen Lösungen ist mithilfe derjenigen Distanzfunktion möglich, welche durch die Quotientenmetrik basierend auf der Stossabbildung induziert wird. Diese Distanzfunktion ist stetig, wenn sie entlang von springenden Lösungen ausgewertet wird und ist somit geeignet für Lyapunov-Methoden. Basierend auf dieser generischen Distanzfunktion wird das Synchronisationsproblem von beidseitig gekoppelten mechanischen Systemen mit unstetigen Lösungen definiert und hinreichende Bedingungen für geregelte wie auch unregelte Synchronisation werden hergeleitet.

Chaos-Synchronisation ist von besonderem Interesse, da sie die Komplexität von chaotischem Verhalten mit der Regularität synchroner Bewegungen kombiniert. Zwei diffus gekoppelte glatte dynamische Systeme synchronisieren, falls die Kopplung genügend stark ist. Die kritische Kopplungsstärke entspricht genau dem grössten Lyapunovexponenten, welcher die maximale Separationsgeschwindigkeit benachbarter Trajektorien beschreibt. Dieser Zusammenhang beruht auf dem konkurrierenden Verhalten der Separation aufgrund von Instabilität der Trajektorien und der Konvergenz aufgrund der Kopplung. In der vorliegenden Arbeit wird dieses Resultat für die Klasse von nichtglatten Systemen verallgemeinert, deren Dynamik durch eine Massdifferenzialinklusion beschrieben werden kann. Der erwähnte Zusammenhang kann direkt verwendet werden um den maximalen Lyapunovexponenten mithilfe von Chaos-Synchronisation zu schätzen.

Die Hauptbeiträge dieser Arbeit sind (a) das vertiefte Verständnis von Stossgesetzen harter Kontakte dank der „variational analysis“ zusammen mit der Anwendung von Zustandsbeobachtern, welche nur die Stosszeitpunkte messen, (b) geregelte und unregelte Synchronisation von beidseitig gekoppelten mechanischen Systeme mit Stössen auch in der Gegenwart von Akkumulationspunkten und (c) die Erweiterung der Chaostheorie aus der Perspektive nichtglatter Systeme.