Diss. ETH No. 23002

Quantized tensor-structured finite elements for second-order elliptic PDEs in two dimensions

A thesis submitted to attain the degree of
Doctor of sciences of ETH Zurich
(Dr. sc. ETH Zurich)

presented by

VLADIMIR KAZEEV

M. sc. in Applied Mathematics and Physics
Moscow Institute of Physics and Technology

born on 26.08.1988
citizen of Russia

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Christoph Schwab, ETH Zurich, examiner
Prof. Dr. Reinhold Schneider, TU Berlin, co-examiner
Prof. Dr. Eugene Tyrtyshnikov, INM RAS Moscow, co-examiner

2015

Abstract

The solutions of second-order elliptic problems in polygons with straight or, more generally, analytic edges are known to belong to certain countably normed spaces of analytic functions, which may exhibit point singularities at the boundary of the domain. This work is focused on the approximation of such functions with a first-order, h-version finite element (FE) method based on uniform tensor-product meshes. Such FE approximations are well known to converge with algebraic rate: generally $1/2$ in terms of the number of degrees of freedom, and even slower in the presence of singularities. The present work proves that this apparent inefficiency is eliminated by representing the corresponding FE coefficient vectors in the so-called *quantized tensor train* (QTT) format, which is a low-parametric decomposition of vectors based on the separation of variables in the hierarchical structure of data.

For the reference square $(0,1)^2$, we prove that continuous piecewise-bilinear FE approximations constructed on uniform tensor-product meshes converge exponentially in terms of the effective number N of degrees of freedom involved in the QTT representations: $N = \mathcal{O}(\log^5 \varepsilon^{-1})$, where $\varepsilon \in (0,1)$ is the accuracy measured in the energy norm.

For a curvilinear polygon with piecewise-analytic boundary, we consider partitions into quadrilateral patches which are the images of the reference square under invertible analytic mappings. By composition with the inverse mappings, FE spaces of continuous bilinear functions defined, for each patch, in the reference square induce a FE space of continuous functions defined on the original domain. We prove that such spaces admit QTT-structured approximations converging exponentially with respect to the effective number of degrees of freedom.

Numerically we show for solutions from the same analyticity classes that the entire process of solving the tensor-structured Galerkin first-order FE discretizations can achieve accuracy ε in the energy norm with $N = \mathcal{O}(\log^\kappa \varepsilon^{-1})$ parameters, where $\kappa < 3$.

Zusammenfassung

Es ist bekannt, dass die Lösungen elliptischer Probleme zweiter Ordnung auf Polygonen mit geraden – oder allgemeiner, analytischen – Kanten zu gewissen abzählbar normierten Räumen analytischer Funktionen gehören, welche Endpunktsingularitäten am Rand des Gebiets haben können. Der Fokus dieser Arbeit ist, solche Funktionen mit einer h-Finite Element (FE) Methode erster Ordnung, basierend auf uniformen Tensorproduktgittern, zu approximieren. Solche FE-Approximationen konvergieren bekanntlich algebraisch, generell mit Rate $1/2$ bezüglich der Anzahl Freiheitsgrade, beziehungsweise noch langsamer falls die Lösung Singularitäten aufweist. In der vorliegenden Arbeit zeigen wir, dass diese scheinbare Ineffizienz ausgeräumt werden kann, indem man die entsprechenden FE-Koeffizientenvektoren im sogenannten QTT-Format (für *quantized tensor train*; etwa: "quantisierte Tensor-Kette") darstellt, welche eine parameter-arme Zerlegung der Vektoren basierend auf Separation der Variablen in der hierarchischen Struktur der Daten ist.

Für das Referenzquadrat $(0,1)^2$ zeigen wir, dass stetige, stückweise bilineare FE-Approximationen auf uniformen Tensorproduktgittern exponentiell konvergieren, relativ zur effektiven Anzahl der Freiheitsgrade N in der QTT-Darstellung: $N = \mathcal{O}(\log^5 \varepsilon^{-1})$, wobei $\varepsilon \in (0,1)$ die Genauigkeit in der Energienorm ist.

Um ein Polygon mit gekrümmten und stückweise analytischen Kanten zu behandeln, betrachten wir eine Partition in rechteckige Gebiete, welche die Bilder des Referenzquadrats unter einer invertierbaren, analytischen Abbildung sind. Unter gewissen Bedingungen lässt sich zeigen, dass FE-Räume auf diesen Rechtecken, die durch die Komposition mit den Inversen aus dem FE-Raum stetiger, bilinearer Funktionen auf dem Referenzquadrat hervorgehen, einen FE-Raum stetiger Funktionen auf dem ursprünglichen Gebiet induzieren. Wir beweisen, dass solche FE-Räume QTT-strukturierte Approximationen zulassen, welche bezüglich der effektiven Anzahl der Freiheitsgrade exponentiell konvergieren.

Anhand numerischer Experimente zeigen wir, dass der gesamte Prozess des Lösens der tensorstrukturierten Galerkin FE-Diskretisierung erster Ordnung – für Funktionen derselben Analytizitätsklasse – Genauigkeit ε in der Energienorm mit $N = \mathcal{O}(\log^{\kappa} \varepsilon^{-1})$ Parametern erzielen kann, wobei $\kappa < 3$.